Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, F. Paccetti Correia

Universität Heidelberg
Sommersemester 2008

# 13. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 09.07.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 11.07.2008

Die 2. Klausur zur Elektrodynamik findet am Samstag, 12. Juli 2008, um 13 Uhr s. t. in INF 308, HS 1 und 2 statt. Es stehen Ihnen dann 120 Minuten zur Bearbeitung der Klausur zur Verfügung. Bitte bringen Sie (unbeschriebenes) Papier und Schreibgerät sowie einen Lichtbildausweis mit. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

**S 52 Horizonte: Hyperbolische Bewegung** (5 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ sollen zwei positiv geladene Körper (Ladungen $q$, Ruhemassen $m_0$) im Abstand $a = \frac{m_0 c^2}{2\pi\sigma q}$ rechts bzw. links einer unendlich ausgedehnten, dünnen ebenen Platte in der $x$-$y$-Ebene mit homogener positiver Flächenladungsdichte $\sigma$ ruhen.

(a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$F = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

und zeigen Sie, daß sich die Körper zur Zeit $t$ an den Orten

$$z(t) = \pm\, a \sqrt{1 + \frac{c^2 t^2}{a^2}} \tag{2}$$

befinden. Vernachlässigen Sie dabei die Wechselwirkung der beiden Ladungen untereinander.

(b) Zeigen Sie, daß von einem Körper ausgehendes Licht den anderen Körper nie erreichen kann. Mitfliegende Beobachter können sich daher nicht sehen, besitzen also einen Horizont.

**P 53 Lorentz-Transformation elektromagnetischer Felder** (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß die longitudinalen und transversalen Anteile der Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ in einem Inertialsystem $I'$, das sich mit der der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zum System $I$ bewegt, von den entsprechenden Komponenten in $I$ abhängen gemäß

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})\,, \tag{4}$$

wobei wie üblich $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ und $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.
*Hinweis:* Es reicht aus, einen Boost in $x$-Richtung zu betrachten. Untersuchen Sie dann die Lorentz-Transformation des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$, d. h.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho F^{\rho\sigma} (\Lambda^T)_\sigma{}^\nu \,, \tag{5}$$

worin

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

und betrachten Sie die einzelnen Komponenten von $F'^{\mu\nu}$.

**P 54 Dualer Feldstärketensor** (5 Punkte)

Wir wollen den zum Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ dualen Tensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ betrachten.

(a) Konstruieren Sie explizit den dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, worin $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor mit $\epsilon^{0123} = +1$ ist.

*Hinweis:* Wegen der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tragen zu jedem nichtverschwindenden Element von $\tilde{F}^{\mu\nu}$ nur zwei Elemente aus $F^{\mu\nu}$ bei.

(b) Was bedeutet die Gleichung $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ für die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$?

**S 55 Invarianten des elektromagnetischen Feldes** (5 Punkte)

Berechnen Sie die lorentzinvarianten Ausdrücke $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Folgern Sie aus der Invarianz dieser beiden Größen:

- Sind die Beträge von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in einem Inertialsystem gleich, so sind sie es in jedem Inertialsystem.
- Stehen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in einem Inertialsystem senkrecht aufeinander, so gilt dies in jedem Inertialsystem.

**S 56 Doppler-Effekt und extrasolare Planeten** (optional, +8 Punkte)

Ein Stern sende in der zur Erde zeigenden 1-Richtung eine linear polarisierte eben elektromagnetische Welle aus, die wir auf der Erde empfangen, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ relativ zum Ruhesystem des Sterns von ihm wegbewegt.

(a) Berechnen Sie die Doppler-Verschiebung der Frequenz $\nu'/\nu$ und die Lichtgeschwindigkeit $c'$ im Ruhesystem der Erde

  - mittels einer Galilei-Transformation.
  - mittels einer Lorentz-Transformation.

(b) Extrasolare Planeten kreisen mit ihrem Stern um den gemeinsamen Schwerpunkt. Dadurch bewegt sich der Stern periodisch, was sich in einer Doppler-Verschiebung des von ihm ausgesandten Lichts bemerkbar macht. Fast alle bisher bekannten extrasolaren Planeten wurden durch die Beobachtung dieser Verschiebung gefunden. Derzeit kann man bei Sternen relative Verschiebungen $\tilde{\lambda}/\lambda - 1$ der Wellenlängen von Absorptionslinien im sichtbaren Bereich mit einer Genauigkeit von $10^{-8}$ messen. Wie schnell bewegt sich ein Stern, dessen sichtbares Licht um diesen Betrag verschoben ist?

**S 57 Lichtstrahlen einer bewegten Quelle** (optional, +7 Punkte)

Untersuchen Sie die räumliche Verteilung der Lichtstrahlen einer in ihrem Ruhesystem isotrop abstrahlenden Punktlichtquelle, während sie sich mit konstanter hoher Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt. Drücken Sie dazu den Tangens des Winkels $\phi$ zwischen dem Dreiervektoranteil $\mathbf{k}$ des Wellenzahlvierervektors $k^\mu$ einer ausgestrahlten elektromagnetischen Welle und der Bewegungsrichtung im Laborsystem durch den entsprechenden Winkel $\phi_0$ im Ruhesystem aus. Werten Sie das Ergebnis z. B. für $\beta = 3/5$ und $\phi_0 = \pi/2$ aus. Fertigen Sie eine Skizze an und kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

**P 58 Automobile Längenkontraktion** (für den 16.7., keine Punkte)

Ein recht vermögender Mensch besitzt neuerdings ein recht schnelles Auto mit der recht stattlichen Länge von 10 m. Seine Garage ist aber nur 5 m lang. (Er wollte seine Garage rechtzeitig zum Kauf des Autos auf die erforderliche Länge umbauen lassen, der Handwerker ist aber nie aufgetaucht.) Deshalb weist er seinen Chauffeur an, mit $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ auf die Garage zuzufahren. Der Wagen sei ja dann nur noch 5 m lang, so daß er in die Garage passe. Er werde dann schnell das Garagentor schließen. Der Fahrer ist allerdings ein ängstlicher Typ und weist seinen Chef darauf hin, daß die Garage nur noch 2.5 m lang sei, wenn sie mit $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ auf das Auto zukomme. Der Wagen könne da wohl nicht hineinpassen, so daß der Chef das Tor gar nicht schließen könne, weil noch 7.5 m Auto herausragen würden. Wer von den beiden hat mehr Ahnung von Relativitätstheorie?
*Hinweis:* Führen Sie diesen Versuch nicht selber zu Hause durch. Für Ungeübte besteht Gefahr.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html