
9. ÜBUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK

Besprechung der Präsenzaufgaben: 19.–21.12.2016
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 22.12.2016

S 42 Lorentz-Transformationen

(12 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^{1,3}$ mit den Koordinaten $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, zusammengefasst im kontravarianten 4-Vektor x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), und einem Skalarprodukt $a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, worin $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Diesen Raum bezeichnet man als *Minkowski-Raum*.

Als homogene Lorentz-Gruppe bezeichnet man die linearen Transformationen $a^\mu \rightarrow a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$, die das Skalarprodukt invariant lassen, d. h.

$$a' \cdot b' = (\Lambda a) \cdot (\Lambda b) = (\Lambda_\mu{}^\lambda a_\lambda)(\Lambda^\mu{}_\nu b^\nu) = a \cdot b. \quad (1)$$

- (a) Wir untersuchen zunächst Lorentz-Transformationen, bei denen der zeitartige Basisvektor $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$ auf sich selbst abgebildet wird, $\Lambda \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$. Argumentieren Sie, dass sich jede solche Transformation schreiben lässt als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\mathcal{R}\mathcal{P}^k)^\mu{}_\nu, \quad (2)$$

wobei \mathcal{P} die Matrix der Raumspiegelung, $k \in \{0, 1\}$ und

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit $R \in \text{SO}(3)$ sei.

- (b) Geben Sie \mathcal{P} und \mathcal{P}^2 in Matrixdarstellung an und zeigen Sie, dass für die Matrix \mathcal{T} der Zeitspiegelung gilt $\mathcal{T} = -\mathcal{P}$.

Im Folgenden wollen wir Lorentz-Boosts in x -Richtung betrachten, gegeben durch

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (4)$$

- (c) Geben Sie t' und x' explizit an. Zeigen Sie, dass $\det \Lambda = 1$ und bestimmen Sie $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$.

(d) Zeigen Sie, dass man obige Transformation erhält als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\eta K_x)]^\mu{}_\nu \quad (5)$$

worin $\eta = \text{Artanh}\left(\frac{v}{c}\right)$ als *Rapidity* bezeichnet wird und

$$(K_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

die so genannte Erzeugende der Boosts in x -Richtung ist. Wie lassen sich $\cosh \eta$ und $\sinh \eta$ mit γ und v/c in Verbindung bringen? Wie sehen die Erzeugenden für Boosts in y - und z -Richtung aus?

Hinweis: Die Exponentialfunktion einer Matrix ist durch die Reihendarstellung definiert.

- (e) Zeigen Sie, dass für zwei aufeinanderfolgende Boosts in x -Richtung die Rapidity additiv ist.
- (f) Zeigen Sie, dass die Transformation für einen Lorentz-Boost im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ in eine Galilei-Transformation übergeht.

Man kann zeigen, dass sich jede homogene Lorentz-Transformation schreiben lässt als

$$\Lambda = \text{sign}(\Lambda^0{}_0) \Lambda_B(\boldsymbol{\eta}) \mathcal{R}(\boldsymbol{\varphi}) \mathcal{P}^k, \quad (7)$$

worin wieder $k \in \{0, 1\}$, $\mathcal{R}(\boldsymbol{\varphi})$ eine Drehung mit Drehvektor $\boldsymbol{\varphi}$ ist (siehe (3)), und $\Lambda_B(\boldsymbol{\eta})$ ein Boost in Richtung $\boldsymbol{\eta}$ mit Rapidity $|\boldsymbol{\eta}|$ ist.

- (g) Drücken Sie diese Formel in Worten aus. Wie viele Erzeugende hat demzufolge die homogene Lorentz-Gruppe?

S 43 Additionstheorem für Geschwindigkeiten, Längenkontraktion

(4 + 4 Punkte)

Eine Streife der Polizei stehe im Ursprung des Inertialsystems I (Koordinaten: t, x, y) im verkehrsberuhigten Bereich (Schrittgeschwindigkeit!) am Milchstraßenrand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ rase ein Raumzeitschiff mit $v = \frac{3}{4}c$ in x -Richtung vorbei. Die Ordnungshüter nehmen sofort die Verfolgung auf. Ihr Dienstschiff kann aber maximal die halbe Lichtgeschwindigkeit erreichen. Das Ruhesystem des Polizeischiffs auf Verfolgungsjagd sei I' (Koordinaten: t', x', y').

Hinweis: Vernachlässigen Sie alle Beschleunigungsphasen.

- (a) Die Beamten erwägen den Einsatz ihrer Dienstwaffe, deren Geschosse mit einer Mündungsgeschwindigkeit von $v = \frac{1}{3}c$ austreten. Können diese Projektile ihr Ziel erreichen? Leiten Sie hierzu das Additionstheorem für Geschwindigkeiten her. Betrachten Sie auch eine Welt mit Galilei-Invarianz.

(b) (optional, +4 Punkte)

Um sicherzugehen, die Verkehrssünder zu stellen, beschließen die Beamten, Verstärkung zu rufen. Zum Zeitpunkt $t' = 0$, zu dem das Polizeischiff die Verfolgung aufnimmt, befinde sich bei $(x', y') = (\Delta x', -\Delta y')$, wobei $\Delta x', \Delta y' > 0$ gelte, ein baugleiches Streifenschiff des galaktischen Grenzschatzes. (Dieses Raumzeitschiff ruhe im Inertialsystem I .) Die Polizeibeamten bitten es per Funk (!) um Hilfe bei der Verfolgung. Die Grenzschatzer beginnen sofort bei Erhalt der Nachricht mit Maximalgeschwindigkeit in die y -Richtung (des Inertialsystems I) zu fliegen.

Wie groß darf $\Delta y'$ maximal sein, damit der galaktische Grenzschatz die Verbrecher noch abfangen kann?

P 44 Lorentz-Transformation und Kausalität

(+5 Punkte)

Wir betrachten in einem Inertialsystem I zwei Ereignisse $E_0 = (ct_0, \mathbf{x}_0)$ und $E = (ct, \mathbf{x})$. Der invariante Abstand s zwischen diesen Ereignissen ist definiert durch die Gleichung $s^2 = c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2$. Im Folgenden sei $E_0 = (0, \mathbf{0})$. Außerdem wollen wir uns auf eine Raumdimension beschränken.

(a) Skizzieren Sie in einem Raum-Zeit-Diagramm die Bereiche

$$s^2 \begin{cases} > 0, & \text{zeitartiger Bereich,} \\ = 0, & \text{lichtartiger Bereich,} \\ < 0, & \text{raumartiger Bereich.} \end{cases} \quad (8)$$

Bestimmen Sie den so genannten kausalen Bereich, d. h. die Menge der Ereignis-punkte, die wir durch unser Zutun beeinflussen können.

(b) Überprüfen Sie am Beispiel eines Boosts, dass s^2 eine Invariante unter Lorentz-transformationen ist.

Wir nehmen nun an, dass die Ereignisse E_0 und E in I gleichzeitig sind, d. h. $E_0 = (0, 0)$ und $E = (0, a)$. Zeigen Sie:

(c) Der invariante Abstand der beiden Ereignisse ist in allen Inertialsystemen raum-artig. Der räumliche Abstand kann in anderen Inertialsystemen I' Werte zwischen a und ∞ annehmen.

(d) Der zeitliche Abstand in I' kann beliebige Werte annehmen. Wie muss man die Geschwindigkeit v wählen, damit man in I' einen vorgegebenen zeitlichen Abstand $\delta t'$ misst? Insbesondere hängt also die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse vom gewählten Inertialsystem ab. Was bedeutet dieses Ergebnis für den kausalen Zu-sammenhang von Ereignissen?

S 45 Zeitdilatation und Myonzerfall

(4 Punkte)

Der energiereiche Teil der sekundären kosmischen Strahlung besteht hauptsächlich aus schnellen Myonen mit einer Geschwindigkeit von etwa $v_L = 0,98 c$. Ohne Zeitdilatation wäre ihre Chance, bis zur Erdoberfläche zu gelangen, nur sehr gering, denn ruhende Myonen haben eine charakteristische Lebensdauer von nur $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ sec.

Betrachten Sie als einfaches Modell vom erdfesten Labor aus einen Strom von Myonen, der aus einer Höhe von $h = 3$ km mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht auf die Erdoberfläche niedergeht, und berechnen Sie das Verhältnis I_0/I_h der Intensität des Stromes an der Erdoberfläche und der Intensität in der Höhe h unter der Annahme, dass unterwegs außer durch den spontanen Zerfall keine Myonen verloren gehen.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html>