Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, F. Paccetti Correia

Universität Heidelberg
Sommersemester 2008

2. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 23.04.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 25.04.2008

P/S 4 Vektoranalysis II (2+5 Punkte)

Es seien $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ skalare Funktionen, $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})$ Vektorfelder, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, und $r = |\mathbf{x}|$.

P(a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\,(\phi\psi) &= \phi\,\mathrm{grad}\,\psi + \psi\,\mathrm{grad}\,\phi & (1)\\ \mathrm{div}\,(\phi\mathbf{a}) &= \phi\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,\phi\,. & (2) \end{aligned}$$

S(b) Zeigen Sie zwei der Identitäten

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,(\phi\mathbf{a}) &= \phi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} + (\mathrm{grad}\,\phi)\,\times\mathbf{a} & (3)\\ \mathrm{div}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b} & (4)\\ \mathrm{rot}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{b} & (5)\\ \mathrm{grad}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{a} + (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{b}\,. & (6) \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$(\mathbf{a}\,\mathrm{grad}) = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{7}$$

der sogenannte Vektorgradient.
Hinweis: Es kann günstig sein, die Summenkonvention zu benutzen. In dieser ist das Kreuzprodukt gegeben durch

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_k = \epsilon_{klm} a_l b_m\,, \tag{8}$$

wobei der ϵ-Tensor definiert ist durch

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (k,l,m) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (k,l,m) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,. \tag{9}$$

Es gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\,. \tag{10}$$

S(c) Berechnen Sie

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{x}}{r^3}, \quad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{x}}{r^3}, \tag{11}$$

sowie (mindestens) zwei der Ausdrücke

$$\operatorname{grad} \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{r^3}, \quad \operatorname{div} \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{r^3}, \quad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{r^3}, \quad \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}|}. \tag{12}$$

P/S 5 Zweifache Ableitungen, Laplace-Operator (1+5 Punkte)

Der Nabla-Operator ist definiert durch

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \tag{13}$$

P(a) Schreiben Sie die Identitäten der Aufgaben 4 a) und b) mit Hilfe des Nabla-Operators ∇.

S(b) Berechnen Sie $\nabla \times \nabla$. Zeigen Sie für ein skalare Funktion $\phi(\mathbf{x})$ und ein Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{14}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0. \tag{15}$$

Der Laplace-Operator Δ ist definiert durch

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{16}$$

S(c) Überzeugen Sie sich, daß für eine skalare Funktion $\phi(\mathbf{x})$

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{x}) \tag{17}$$

und zeigen Sie für die skalaren Funktionen ϕ und ψ

$$\Delta(\phi\psi) = \phi \Delta \psi + \psi \Delta \phi + 2 \left(\operatorname{grad} \phi\right) \cdot \left(\operatorname{grad} \psi\right). \tag{18}$$

S(d) Benutzen Sie die Ihnen bekannte Formel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, um zu zeigen, daß

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{x}). \tag{19}$$

P/S 6 Ladungsverteilungen (2+5 Punkte)

P(a) Drücken Sie die folgenden Ladungsverteilungen mit Hilfe der Delta- und Theta-Funktion in den jeweils angegebenen Koordinaten aus:

(i) eine Punktladung Q an der Stelle $(r_0,\, \varphi_0,\, \theta_0)$ in Kugelkoordinaten; *Hinweis:* Überprüfen Sie die Normierung.

(ii) eine Ladung Q, die gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche des Radius R verteilt ist (Kugelkoordinaten);

(iii) auf der Oberfläche eines Zylinders der Länge $2a$ wird pro Längeneinheit eine Ladung λ gleichmäßig verteilt (Zylinderkoordinaten);

(iv) eine Ladung Q, gleichmäßig auf einer unendlich dünnen Scheibe des Radius R verteilt (Zylinderkoordinaten).

S(b) Eine elektrische Ladungsverteilung sei gegeben durch die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \tag{20}$$

mit $\rho_0 \neq 0$, $a \neq 0$.

(i) Bestimmen Sie die Gesamtladung

$$Q = \int_{\mathbf{R}^3} \rho(\mathbf{x})\, d^3x \,. \tag{21}$$

(ii) Berechnen Sie den RMS-Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$, worin

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Q} \int_{\mathbf{R}^3} r^2 \rho(\mathbf{x})\, d^3x \,. \tag{22}$$

(RMS steht für *root mean square*.)

(iii) Wie hängt $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ von ρ_0 und a ab? Wie ist der Grenzfall $a \to 0$ zu interpretieren?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html