Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, F. Paccetti Correia — Sommersemester 2008

4. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 07.05.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 09.05.2008

S 14 Vektorpotential für ein homogenes Magnetfeld (3 Punkte)

Wir betrachten ein konstantes, homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}$, das entlang der z-Richtung orientiert ist, d. h. $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ ein Vektorpotential für $\mathbf{B}$ ist.

(b) Finden Sie für $\mathbf{B}$ ein Vektorpotential $\mathbf{A}'$, das in x-Richtung orientiert ist. Geben Sie eine Eichtransformation an, die $\mathbf{A}'$ in $\mathbf{A}$ überführt.

(c) Zeigen Sie, daß auch $\mathbf{A}'' = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x}$ ein Vektorpotential für $\mathbf{B}$ ist. Geben Sie auch hier eine Eichtransformation an, die $\mathbf{A}''$ in $\mathbf{A}$ überführt.

S 15 Lebensdauer von Ladungsverteilungen im Inneren von Leitern (3 Punkte)

Das Ohmsche Gesetz $I = U/R$ kann für isotrope, homogene Leiter in der differentiellen Form

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sigma\, \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

geschrieben werden, worin σ eine positive Materialkonstante ist, die sog. *spezifische Leitfähigkeit*.

(a) Zeigen Sie, daß in einem solchen Leiter die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho = 0 \tag{2}$$

genügt.

(b) Zeigen Sie durch Lösen dieser Gleichung, daß sich im Inneren des Leiters keine stationäre Ladungsverteilung ausbilden kann. Bestimmen Sie die typische Zeitspanne τ, nach der eine anfänglich vorhandene Ladungsverteilung abgeklungen ist. Wie groß ist τ für Kupfer?
Hinweis: Die spezifische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt in Gaußschen Einheiten $\sigma_{\mathrm{Cu}} = 5.4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{sec}^{-1}$. (In SI-Einheiten entspricht dies $0.6 \cdot 10^{8}\,\mathrm{S\,m}$, wobei $1\,\mathrm{S} = 1\,\mathrm{Siemens} = 1\,\Omega^{-1}$.)

S 16 Geladener Draht (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Potential und das elektrische Feld eines unendlich langen, leitenden Drahtes mit konstanter Ladungsdichte σ. Der Draht sei dabei gerade (z. B. entlang der z-Achse) und unendlich dünn.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, daß der Draht eine endliche Länge l hat. Beachten Sie dann beim Grenzwert $l \to \infty$, daß ein konstanter Beitrag zum Potential keine physikalische Bedeutung hat. Außerdem gilt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \ln\left(z + \sqrt{r^2 + z^2}\right) . \tag{3}$$

S 17 Greensches Reziprozitätstheorem (optional, +3 Punkte)

Es sei φ das von einer Ladungsverteilung ρ verursachte Potential, und φ' das von einer Ladungsverteilung ρ' verursachte Potential. Beweisen Sie das Greensche Reziprozitätstheorem

$$\int \rho(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{x})\, d^3x = \int \rho'(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\, d^3x \,. \tag{4}$$

Bemerkung: Für den Fall, daß das Volumen, in dem sich obige Ladungsverteilungen befinden, durch leitende Oberflächen berandet ist, lautet das Theorem

$$\int_V \rho\varphi'\, d^3x + \int_{\partial V} \sigma\varphi'\, df = \int_V \rho'\varphi\, d^3x + \int_{\partial V} \sigma'\varphi\, df \,, \tag{5}$$

wobei σ bzw. σ' die jeweiligen Flächenladungsdichten auf den Leiteroberflächen sind.

S 18 Ladung vor leitender Kugel (6 Punkte)

Wir betrachten eine leitende Kugel mit Radius R. Vor der Kugel befinde sich im Abstand $a > R$ vom Kugelmittelpunkt eine punktförmige Ladung q.

(a) Die Kugel sei geerdet.

  (i) Geben Sie die Greensche Funktion für diese Situation an.

  (ii) Bestimmen Sie das Potential φ und das elektrische Feld $\mathbf{E}$ außerhalb der Kugel. Wie groß ist das Feld innerhalb der Kugel?

  (iii) Berechnen Sie die influenzierte Flächenladungsdichte σ auf der Kugel. Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel?

(b) Die Kugel sei jetzt isoliert und trage eine Ladung Q. Geben Sie auch für diesen Fall das Potential und das elektrische Feld außerhalb der Kugel an.
Hinweis: Das Ergebnis von Teil (a) kann hier hilfreich sein.

P 19 Polare und axiale Vektorfelder (3 Punkte)

Wir betrachten das Verhalten von verschiedenen Größen unter orthogonalen Transformationen, die wir durch Matrizen $A \in O(3)$ darstellen, mit $(A)_{ij} = a_{ij}$. Es seien $\lambda(\mathbf{x})$ ein skalares Feld und $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld.

(a) Zeigen Sie:

  (i) $\nabla\lambda(\mathbf{x})$ ist ein polares Vektorfeld.

  (ii) $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ist ein skalares Feld.

  (iii) $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ist ein axiales Vektorfeld. (optional, +2 Punkte)
  Hinweis: Schreiben Sie die Rotation mit Hilfe des ϵ_{ijk}-Tensors. Diese Relation gilt vor und nach der Transformation. Beachten Sie außerdem, daß für orthogonale Transformationen $\det A = \pm 1$, d. h. $(\det A)^2 = 1$, und $\epsilon'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}\epsilon_{lmn} = (\det A)\epsilon_{ijk}$.

(b) Zeigen Sie, daß das elektrische Feld $\mathbf{E}$ ein polarer Vektor ist, während die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ ein axialer Vektor ist.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist durch Inspektion der Lorentzkraft.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html