Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
C. Ewerz, F. Paccetti Correia | Sommersemester 2008

5. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 14.05.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 16.05.2008

S 20 Wasserstoffatom II (5 Punkte)

Wir betrachten noch einmal das Wasserstoffatom im Grundzustand. Die mittlere elektrische Ladungsverteilung durch das Elektron ist gegeben durch

$$\rho_{\mathrm{el}}(\mathbf{x}) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) , \tag{1}$$

wobei a der Bohrsche Radius und e die Elementarladung ist.

(a) Berechnen Sie das durch diese Ladungsverteilung erzeugte Potential $\varphi_{\mathrm{el}}(\mathbf{x})$.

(b) Die Ladungsverteilung des Kerns sei ρ_{K}, und der Kern sei als punktförmig angenommen. Weiter sei $\varphi_{\mathrm{K}}(\mathbf{x})$ das durch den Kern erzeugte Potential. Zeigen Sie durch explizite Berechnung der Integrale, daß die Wechselwirkungsenergie des Elektrons im Potential des Kerns,

$$V = \int_{\mathbf{R}^3} \rho_{\mathrm{el}}(\mathbf{x}) \varphi_{\mathrm{K}}(\mathbf{x})\, d^3x \, , \tag{2}$$

übereinstimmt mit

$$V = \int_{\mathbf{R}^3} \rho_{\mathrm{K}}(\mathbf{x}) \varphi_{\mathrm{el}}(\mathbf{x})\, d^3x \, . \tag{3}$$

(c) Berechnen Sie die Energie W_{el} des Feldes, das alleine durch die Ladungsverteilung des Elektrons erzeugt wird.

S 21 Earnshaw-Theorem (optional, +4 Punkte)

Wir wollen das Earnshaw-Theorem beweisen: Eine beliebige Konfiguration von Punktladungen kann sich nicht in einem stabilen Gleichgewicht befinden.

(a) Zeigen Sie zunächst, daß im ladungsfreien Raum der Wert des elektrostatischen Potentials φ am Ort $\mathbf{x}$ gleich dem Mittelwert von φ über eine beliebige Kugeloberfläche mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ ist, d. h. für jedes $R > 0$ gilt

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}')\, d\Omega \, , \tag{4}$$

wobei $B_R(\mathbf{x})$ die Kugel vom Radius R mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ ist. Dies nennt man die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.
Hinweis: Benutzen Sie das Greensche Theorem mit $\phi = \varphi$ und $\psi = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$.

(b) Benutzen Sie diese Mittelwerteigenschaft, um das Earnshaw-Theorem herzuleiten. Betrachten Sie dazu eine der Punktladungen und zeigen Sie, daß sich diese nicht in einem strengen lokalen Minimum des Potentials befinden kann.

P 22 Multipolmomente & Translation und Parität (5 Punkte)

Das Dipolmoment $\mathbf{p}$ und der (kartesische) Quadrupoltensor (q_{kl}) einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ bezüglich des Punkts $\mathbf{x} = 0$ sind gegeben durch

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{x}\,d^3x\,, \tag{5}$$

$$q_{kl} = \int \rho(\mathbf{x})(3x_k x_l - \mathbf{x}^2\delta_{kl})\,d^3x\,. \tag{6}$$

(a) Betrachten Sie eine Translation des Koordinatensystems $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Wie verhalten sich Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor unter einer solchen Translation, d. h. bezogen auf den Punkt $\mathbf{x}' = 0$? Drücken Sie insbesondere q'_{kl} durch q_{kl}, die Gesamtladung und die Komponenten p_k des Dipolmoments aus. Unter welchen Umständen ist $q'_{kl} = q_{kl}$?

(b) Wie verhalten sich Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor unter einer Paritätstransformation, also einer Raumspiegelung $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$?

Hinweis: Die Ladungsdichte transformiert sich in beiden Fällen gemäß $\rho'(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x})$.

S 23 Gestreckter Quadrupol (5 Punkte)

Wir betrachten einen gestreckten Quadrupol, d. h. eine Ladungsverteilung bei der sich eine Ladung $-2e$ im Ursprung und jeweils eine Ladung $+e$ in den Punkten $(0, 0, d)$ und $(0, 0, -d)$ befinde.

(a) Geben Sie das Potential dieser Ladungsverteilung an.

(b) Berechnen Sie das Dipolmoment und den Quadrupoltensor für diese Ladungsverteilung.

(c) Geben Sie für den Fall großer Abstände $r = |\mathbf{x}| \gg d$ das Potential bis zur zweiten Ordnung in d/r an. Zeigen Sie, daß das Potential rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse ist, also nicht vom Winkel φ abhängt.

(d) Berechnen Sie in dieser Näherung das elektrische Feld in Kugelkoordinaten.

(e) Geben Sie einen analytischen Ausdruck $r = r(\theta)$ für die Äquipotentialflächen an und skizzieren Sie diese. Skizzieren Sie auch die Feldlinien.

S 24 Fourier-Transformation (5 Punkte)

Wir betrachten (i. a. komplexwertige) Funktionen f einer reellen Variablen, von denen wir annehmen, daß sie absolut integrierbar (d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$) und stetig differenzierbar sind.

Die Fourier–Transformation einer solchen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx} f(x)\,. \tag{7}$$

Die inverse Transformation ist dann

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx} \tilde{f}(k)\,. \tag{8}$$

Seien f, g zwei Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier–Transformation:

$$\begin{array}{ll}
(a) & \mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha \mathcal{F}[f(x); k] + \beta \mathcal{F}[g(x); k] \\
(b) & \mathcal{F}[f(x-a); k] = e^{-ika} \mathcal{F}[f(x); k] \\
(c) & \mathcal{F}[f(ax); k] = a^{-1} \mathcal{F}[f(x); k/a],\ \ a > 0 \\
(d) & \mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k] \\
(e) & \mathcal{F}[(d/dx) f(x); k] = ik \mathcal{F}[f(x); k] \\
(f) & \mathcal{F}[x f(x); k] = i(d/dk) \mathcal{F}[f(x); k]
\end{array}$$

Man kann die Fourier-Transformation in natürlicher Weise auf Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ erweitern. Geben Sie für diesen Fall die zu (a)-(f) analogen Relationen an.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html