Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, F. Paccetti Correia

Universität Heidelberg
Sommersemester 2008

8. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 04.06.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 06.06.2008

S 31 Separationsansatz für die Laplace-Gleichung (8 Punkte)

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ in sphärischen Koordinaten r, θ, φ. Zeigen Sie, daß der Separationsansatz

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \tag{1}$$

bei geeigneter Wahl der Separationskonstanten auf die drei Gleichungen

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{2}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0 \tag{4}$$

führt. Geben Sie die Lösung der ersten Gleichung an und zeigen Sie deren 2π-Periodizität. Leiten Sie mit einem Potenzansatz die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung her. Zeigen Sie, daß die dritte Gleichung für den Fall $m = 0$ und bei Wahl einer geeigneten Variablen x auf die Legendresche Differentialgleichung führt.

P 32 Gruppeneigenschaft der Eichtransformationen (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Eichtransformationen der elektromagnetischen Potentiale (mit einer beliebigen Funktion $\chi(\mathbf{x}, t)$)

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{5}$$

$$\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi \tag{6}$$

bezüglich der Hintereinanderausführung eine kommutative Gruppe bilden.

S 33 Wellengleichungen für das elektromagnetische Feld (3 Punkte)

Leiten Sie direkt aus den Maxwell-Gleichungen (also ohne Verwendung der elektromagnetischen Potentiale) her, daß $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ im ladungs- und stromfreien Raum (d. h. für $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = 0$) Wellengleichungen erfüllen.

S 34 Nützliches zur Lösung der Wellengleichung (5 Punkte)

Bei der allgemeinen Lösung der freien Wellengleichung tritt die Funktion

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_0}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}\right) \tag{7}$$

auf, wobei $\omega_0 = ck$ und $k = |\mathbf{k}|$. Zeigen Sie, daß

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi c}\, \epsilon(t)\, \delta(r^2 - c^2 t^2)\,, \tag{8}$$

worin $r = |\mathbf{x}|$ und

$$\epsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} . \tag{9}$$

Hinweis: Schreiben Sie $\mathbf{k}$ in Kugelkoordinaten und zeigen Sie zunächst

$$D(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c r}\, [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)]\ . \tag{10}$$

Führen Sie dann eine Fallunterscheidung für $t < 0$ bzw. $t > 0$ durch.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/ed08.html