Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, F. Paccetti Correia

Universität Heidelberg
Sommersemester 2008

9. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 11.06.2008
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 13.06.2008

S 35 Erdmagnetfeld in Heidelberg (optional, +5 Punkte)

Das Magnetfeld der Erde kann an deren Oberfläche in guter Näherung durch das Feld eines im Erdmittelpunkt lokalisierten magnetischen Dipols beschrieben werden. Wie groß ist die Inklination ι (d. h. der Winkel zwischen Erdmagnetfeld und lokaler Horizontalebene) in Heidelberg? Nehmen sie dazu vereinfachend an, daß die magnetische Breite mit der geographischen Breite übereinstimmt. Letztere beträgt für Heidelberg $\beta = 49.4°$.
Hinweis: Beachten Sie, daß die geographische Breite bezüglich des Äquators gemessen wird, d. h. am Äquator ist $\beta = 0$, am Nordpol $\beta = 90°$.

P 36 Zur Wellengleichung (6 Punkte)

Wir wollen die freie Wellengleichung betrachten,

$$\Box\, \psi(\mathbf{x}, t) = 0\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, daß $\psi_1(\mathbf{x}, t) = f(x_1 - ct)$ und $\psi_2(\mathbf{x}, t) = g(x_1 + ct)$ mit zwei beliebigen (zweimal differenzierbaren) Funktionen f und g Lösungen der homogenen Wellengleichung sind. Skizzieren Sie das zeitliche Verhalten von f und g entlang der x_1-Achse.

(b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Existenz solcher Lösungen und der allgemeinen Lösung der freien Wellengleichung durch ebene Wellen?

(c) Konstruieren Sie mit geeigneten f und g *stehende* Wellen, d. h. Lösungen ψ mit $\psi(x_1, t) = \phi(x_1)\chi(t)$.

(d) Zeigen Sie, daß für eine beliebige (dreimal differenzierbare) Funktion ψ gilt $\Box(\mathrm{grad}\psi) = \mathrm{grad}(\Box\psi)$, wobei wir die Anwendung von $\Box$ auf ein Vektorfeld $\mathbf{a}$ definieren als $\Box\mathbf{a} = (\Box a_1, \Box a_2, \Box a_3)$. Gelten analoge Beziehungen auch für $\Box(\mathrm{div}\,\mathbf{a})$ und $\Box(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})$?

S 37 Polarisation ebener Wellen (5+8 Punkte)

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, die sich in x_3-Richtung ausbreitet, d. h. $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_3$. Dazu schreiben wir mit reellen Konstanten E_1, E_2

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbf{e}_1 E_1 e^{i\varphi_1} + \mathbf{e}_2 E_2 e^{i\varphi_2}\right) e^{i(kx_3 - \omega t)} . \tag{2}$$

Das elektrische Feld ist dann gegeben durch den Realteil $\operatorname{Re} \mathbf{E}$.

(a) Zeigen Sie für den Fall $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, daß für festes $\mathbf{x}$ der Vektor $\operatorname{Re} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ eine Ellipse umläuft und geben Sie deren Halbachsen an.

(b) Wodurch sind die Spezialfälle linkszirkularer Polarisation und linearer Polarisation gekennzeichnet? Was sind in diesen Fällen die Halbachsen der Ellipse?

(c) Fertigen Sie für den allgemeinen Fall elliptischer Polarisation (beliebiges δ) eine Skizze für $\operatorname{Re} \mathbf{E}$ an, in der Sie verschiedene geeignete t kennzeichnen.

(d) (optional, +8 Punkte)

Zeigen Sie für allgemeine φ_1 und φ_2, daß der Vektor $\operatorname{Re} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ eine Ellipse umläuft. Bestimmen Sie die Hauptachsen der Ellipse für diesen Fall allgemeiner elliptischer Polarisation.

Hinweis: Versuchen Sie zum Beispiel, die Kurve $\operatorname{Re} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ in einem gegenüber $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ gedrehten Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ zu schreiben, in dem sie die Form

$$\mathbf{e}_1' E_1' \cos(kx_3 - \omega t + \alpha) + \mathbf{e}_2' E_2' \sin(kx_3 - \omega t + \alpha) \tag{3}$$

hat, und lesen Sie aus dieser Hauptachsenform ab, daß es sich um eine Ellipse handelt.

S 38 Felder retardierter Potentiale (4 Punkte)

Berechnen Sie aus den retardierten elektromagnetischen Potentialen in der Lorenz-Eichung,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{4}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t'_{\text{ret}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{5}$$

mit

$$t'_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| , \tag{6}$$

die Größen $-\nabla\varphi$, $-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$, $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, und damit das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$.

S 39 Freie elektromagnetische Kugelwellen (5 Punkte)

Das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ erfüllen im ladungs- und stromfreien Raum die freie Wellengleichung (vgl. Aufg. 33). Die freie Wellengleichung kann auch durch Kugelwellen gelöst werden, so daß dann eine monochromatische Lösung der Maxwell-Gleichungen gefunden werden kann von der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{7}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \tag{8}$$

wobei $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ die Winkelabhängigkeit enthalten, aber von r unabhängig sind. Aus der Wellengleichung folgt $\omega = ck$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, daß diese Wellen transversal sind, d. h. daß $\mathbf{E} \perp \mathbf{e}_r$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{e}_r$, und $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.
Hinweis: Für obige Kugelwellen ist eine Seite der Maxwell-Gleichung $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}$ leichter zu berechnen als die andere.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed08.html