Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

10. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 11.1.2008
Besprechung der Präsenzaufgaben: 14.1.2008

P 24 Potentialbarriere für relativistische Teilchen mit Spin 0 (4 Punkte)

Relativistische Teilchen mit Spin 0, Masse m und Ladung e treffen auf eine eindimensionale, rechteckige Potentialbarriere der Höhe V, wobei $eV > 2mc^2$ sei. Zeigen Sie, daß die Barriere unabhängig von ihrer Breite vollständig transparent ist, falls die Teilchen eine Gesamtenergie von $E = eV/2$ haben. Bestimmen Sie für diesen Fall die Dichte ρ und den Strom innerhalb der Barriere und interpretieren Sie das Ergebnis.

S 25 Zwei-Komponenten-Form der Klein-Gordon-Gleichung (6 Punkte)

Die Klein-Gordon-Gleichung kann auch in einer Zwei-Komponenten-Form geschrieben werden, die die Freiheitsgrade positiver und negativer Energie verdeutlicht.

(a) Φ erfülle die Klein-Gordon-Gleichung und außerdem die Schrödinger-artige Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \eta mc^2\Phi - \frac{\hbar^2}{2m}\,\zeta\,\nabla^2\Phi\,. \qquad (1)$$

Leiten Sie her, daß gelten muß

$$\eta^2 = 1\,, \quad \zeta^2 = 0\,, \quad \eta\zeta + \zeta\eta = 2\,. \qquad (2)$$

Daher müssen η und ζ mindestens 2×2-Matrizen sein, zum Beispiel

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\,. \qquad (3)$$

(b) Zeigen Sie, daß in dieser Notation geeignete Definitionen der Dichte und des Stromes gegeben sind durch

$$\rho = 2mc^2\,\Phi^\dagger\eta\,\Phi \qquad (4)$$

$$\vec{J} = -\,i\hbar c^2\left[\Phi^\dagger\eta\,\zeta\nabla\Phi - (\nabla\Phi)^\dagger\,\eta\,\zeta\Phi\right]\,. \qquad (5)$$

(c) Die Dichte und der Strom sollten unter der Ladungskonjugations-Transformation

$$\Phi \to \Phi^c = C\Phi^* \qquad (6)$$

ihr Vorzeichen ändern. Finden Sie eine dafür geeignete reelle Matrix C.

(d) Ausgedrückt durch die normale Klein-Gordon-Wellenfunktion ϕ haben wir

$$\Phi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \chi_\pm = \frac{1}{2}\left(\phi \pm \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) . \tag{7}$$

Zeigen Sie, daß für ein sich langsam bewegendes Teilchen gilt $\chi_+ \approx 1$ sowie $\chi_- = O(v^2/c^2) \ll 1$, und umgekehrt für ein sich langsam bewegendes Antiteilchen.

P 26 Vektorstrom und Axialvektorstrom (5 Punkte)

Der Vektorstrom (genauer die Vierer-Vektorstromdichte) für Dirac-Teilchen ist definiert durch $J_V^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$. Leiten Sie die Erhaltungsgleichung

$$\partial_\mu J_V^\mu = 0 \tag{8}$$

her. Benutzen Sie hierzu die kovariante Form der Dirac-Gleichung und die Relation $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

Der Axialvektorstrom (genauer die Axial-Vierer-Vektorstromdichte) ist definiert durch $J_A^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$. Zeigen Sie, daß J_A^μ nicht erhalten ist, sondern die folgende kovariante Gleichung erfüllt:

$$\partial_\mu J_A^\mu = 2im\,\bar\psi\gamma^5\psi\,. \tag{9}$$

S 27 Gamma-Matrizen (5+6 Punkte)

In praktischen Rechnungen treten häufig Spuren von Gamma-Matrizen auf. Für die Gamma-Matrizen gilt $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. Wir definieren weiter den sog. Feynman-Slash, $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$.

Zeigen Sie die folgenden Relationen: (die Teile (d)-(f) sind optionale Aufgaben)

(a) Die Spur eines Produkts einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen verschwindet.

(b) $\mathrm{Tr}(\not{a}\,\not{b}) = 4\,a\cdot b\,,$

(c) $\mathrm{Tr}(\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d}) = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c) - (a\cdot c)(b\cdot d)]\ ,$

(d) $\gamma_\mu\,\not{a}\,\gamma^\mu = -2\,\not{a}\,,$

(e) $\gamma_\mu\,\not{a}\,\not{b}\,\gamma^\mu = 4\,a\cdot b\,,$

(f) $\gamma_\mu\,\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\gamma^\mu = -2\,\not{c}\,\not{b}\,\not{a}.$

Hinweis: Verwenden Sie, daß die Spur zyklisch ist, sowie die Relationen $(\gamma^5)^2 = 1$ und $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$. ($\gamma^5$ ist definiert als $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.)

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html