Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

12. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 25.1.2008
Besprechung der Präsenzaufgaben: 28.1.2008

S 30 Dirac-Spinor für den Grundzustand des Wasserstoffatoms
(optional, +5 Punkte)

Die Dirac-Wellenfunktion für den Grundzustand des Wasserstoffatoms hat die folgende Form (in der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen):

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ia\cos\theta \\ iae^{i\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

worin $a \simeq \alpha/2$ (mit der Feinstrukturkonstante α).

(a) Ist ψ ein Eigenzustand von $\mathbf{L}_z$?

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\mathbf{L}_z$ und kommentieren Sie das Resultat. (Welche Größenordnung hat der Wert?)

(c) Zeigen Sie, daß ψ ein Eigenzustand von $\mathbf{J}_z$ ist, und bestimmen Sie den Eigenwert.

Hinweis: Beachten Sie, daß die Wellenfunktion auf ein Elektron normiert sein soll.

S 31 Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung (5 Punkte)

Wir betrachten die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\,, \tag{2}$$

worin $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß mit $r = |\vec{x}|$

$$G_\pm(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{3}$$

Greensche Funktionen der Helmholtz-Gleichung sind, d. h.

$$(\Delta + k^2)\,G_\pm(\vec{x}) = \delta(\vec{x})\,. \tag{4}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Laplace-Operator Δ in sphärischen Polarkoordinaten.

P/S 32 Streuamplitude in Bornscher Näherung (11 Punkte)

In Bornscher Näherung ist die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ für die Streuung am Potential $V(\vec{x})$ gegeben durch

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V(\vec{q}\,)\,, \tag{5}$$

worin $V(\vec{q})$ die Fouriertransformierte des Potentials $V(\vec{x})$ ist,

$$V(\vec{q}\,) = \int d^3x\, V(\vec{x})\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,. \tag{6}$$

Dabei ist $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ der Streuwellenvektor, d. h. die Differenz zwischen den Wellenvektoren des auslaufenden und des einlaufenden Teilchens.

(a/P) Zeigen Sie, daß für kugelsymmetrische Potentiale, also für $V(\vec{x}\,) = V(r)$ mit $q = |\vec{q}\,|$ gilt

$$V(\vec{q}\,) = V(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr\, V(r)\, r \sin(qr)\,. \tag{7}$$

(b) Berechnen Sie $V(q)$ für

(i/S) das Yukawa-Potential

$$V(r) = A\,\frac{e^{-r/\mu}}{r}\,, \tag{8}$$

(ii/S) das Gauß-Potential

$$V(r) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)\,, \tag{9}$$

(iii/P) für das Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{10}$$

P 33 Streuung am Coulomb-Potential (4 Punkte)

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Coulomb-Potential in Bornscher Näherung gemäß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2\,. \tag{11}$$

Benutzen Sie dazu das Ergebnis von Aufg. 32 (b) (i),

$$V(q) = 4\pi A\,\frac{1}{q^2 + \frac{1}{\mu^2}}\,, \tag{12}$$

und nehmen Sie einen geeigneten Grenzwert des Yukawa-Potentials. Verwenden Sie außerdem $|\vec{k}_f| = |\vec{k}_i| = k$ und $q = 2k\sin(\theta/2)$ (warum?). Woher kennen Sie das Resultat bereits?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html