Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

4. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 16.11.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 19.11.2007

P 8 Aharonov-Bohm-Effekt (8 Punkte)

Elektronen aus einer Quelle bei $\vec{x}_0$ treffen auf eine Doppelspaltanordnung, hinter der ein Schirm aufgestellt ist. Zwischen den beiden Spalten ist sei eine (unendlich lange) Spule parallel zu den Spalten angebracht, die ein Magnetfeld erzeugt, das auf das Innere der Spule beschränkt ist. Die Spule sei derart abgeschirmt, daß die Elektronen nicht in das Magnetfeld eindringen können.
Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Elektrons im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{P}} + \frac{e_0}{c}\vec{A}\right)^2 , \tag{1}$$

wobei $-e_0$ die Elektronladung und $\vec{A}$ ein Vektorpotential für $\vec{B}$ ist, d, h. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
Zeigen Sie zunächst, daß das Vektorpotential ($A \in \mathbb{R}$)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left(-\frac{Ax_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{Ax_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right) \tag{2}$$

das Magnetfeld obiger Versuchsanordnung beschreibt. Zeigen Sie weiter, daß

$$\psi_B(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{ie_0}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A}\cdot d\vec{s}\right)\psi_0(\vec{x}) \tag{3}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung mit Magnetfeld ist, wenn $\psi_0(\vec{x})$ eine Lösung der Schrödingergleichung ohne Feld ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe P 7, daß sich das Interferenzmuster auf dem Schirm ändert, wenn das Magnetfeld in der Spule ein- bzw. ausgeschaltet wird.

S 9 Landau-Niveaus (9 Punkte)

Wir wollen die Bewegung eines Elektrons in einem konstanten Magnetfeld untersuchen, wobei wir den Spin des Elektrons vernachlässigen. Das Magnetfeld sei entlang der z-Richtung orientiert, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Zeigen Sie, daß das Vektorpotential gewählt werden kann als $\vec{A} = (0, Bx, 0)$, d. h. daß $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

(a) Aus der Vorlesung wissen Sie, daß für ein konstantes Magnetfeld $\vec{B}$ auch die Wahl $\vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$ möglich ist. Zeigen Sie, daß sich dieses und das oben genannte Potential nur um ein Gradientenfeld (bzw. eine Eichtransformation) unterscheiden.

(b) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{\mathbf{P}} + \frac{e_0}{c} \vec{A} \right)^2 \tag{4}$$

sowohl mit der y- als auch mit der z-Komponente des Impulsoperators kommutiert. Die Eigenzustände von $\mathbf{H}$ können daher mit dem Separationsansatz $\psi(x, y, z) = \nu(x) f(y) g(z)$ gefunden werden. Geben Sie die Funktionen f und g an. Wir wollen $g(z)$ so wählen, daß der Eigenwert zu $\mathbf{P}_z$ gerade 0 ist.

(c) Leiten Sie eine Eigenwertgleichung für $\nu(x)$ her und führen Sie diese auf die Eigenwertgleichung für die Energie eines harmonischen Oszillators zurück.

(d) Lesen Sie das Energiespektrum ab. Die aus der Gleichung für ν resultierenden Energieniveaus heißen Landau–Niveaus.

P 10 Zeeman-Effekt für Teilchen ohne Spin (3 Punkte)

Wir wollen das Wasserstoff–Atom in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ betrachten. Der Hamiltonoperator hat die Form

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze_0^2}{r} - \frac{e_0}{2mc} \vec{B} \cdot \vec{\mathbf{L}} + \frac{e_0^2}{8mc^2} \left| \vec{x} \times \vec{B} \right|^2 . \tag{5}$$

Der dritte Term trägt zum Paramagnetismus des Atoms bei, der letzte zum Diamagnetismus. Wir wollen das Magnetfeld in z-Richtung wählen, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Für schwache Magnetfelder kann der quadratische (diamagnetische) Term vernachlässigt werden.

(a) Schätzen Sie das Verhältnis des quadratischen und des linearen Terms in B ab. *Hinweis:* Nehmen Sie an, daß $|\vec{x}|$ etwa dem Bohrschen Radius a entspricht, und setzen Sie $\langle \mathbf{L}_3 \rangle \simeq \hbar$.

(b) Wir wollen nun den Fall schwacher Magnetfelder untersuchen, den sog. normalen (d. h. ohne Spin) Zeeman–Effekt. Wir vernachlässigen also den quadratischen Term in B. Zeigen Sie, daß die bekannten Eigenzustände ψ_{nlm} des Coulomb–Problems auch Eigenzustände zu $\mathbf{H}$ sind und geben Sie das Energiespektrum an.

Bemerkung: Der Zeeman–Effekt ist ein Beispiel für Störungstheorie mit Entartung. Durch die Störung wird die Entartung der Zustände mit verschiedener magnetischer Quantenzahl m vollständig aufgehoben. Die Entartung stellt beim Zeeman–Effekt kein zusätzliches Problem dar, da die Störung bezüglich der Eigenzustände ψ_{nlm} des ungestörten Coulomb–Potentials bereits diagonal ist.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html