Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

6. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 30.11.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 3.12.2007

S 14 Freier Propagator im Impulsraum (11 Punkte)

Aus dem Propagator im Ortsraum, $K(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0)$, kann man durch Fouriertransformation den Propagator im Impulsraum gewinnen,

$$K(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) = \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1\right) K(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0\right) d^3x_0\, d^3x_1\,, \tag{1}$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang eines Teilchens vom Impuls $\vec{p}_0$ zur Zeit t_0 zum Impuls $\vec{p}_1$ zur Zeit t_1 beschreibt.

(a) Zeigen Sie, daß die Impulsraumdarstellung des freien Propagators

$$K_0(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_1 - t_0)}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{im(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right] \tag{2}$$

gegeben ist durch

$$K_0(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) = (2\pi\hbar)^3\, \theta(t_1 - t_0)\, \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)\, \exp\left[\frac{-i\vec{p}_0^{\,2}(t_1 - t_0)}{2\hbar m}\right]. \tag{3}$$

Hinweis: Es ist günstig, eine Transformation zu neuen Koordinaten $\vec{x} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1$, $\vec{X} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$, und $\vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1$, $\vec{P} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1$ durchzuführen.

Durch eine weitere Fouriertransformation bzgl. t erhält man den Propagator in Abhängigkeit von der Energie E,

$$K(\vec{p}_1, E_1; \vec{p}_0, E_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,E_1 t_1\right) K(\vec{p}_1, t_1; \vec{p}_0, t_0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,E_0 t_0\right) dt_0\, dt_1\,, \tag{4}$$

der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für einen Übergang von einem Impuls $\vec{p}_0$ und einer Energie E_0 zu einem Impuls $\vec{p}_1$ und einer Energie E_1 beschreibt.

(b) Berechnen Sie den freien Propagator in dieser Darstellung, d. h. $K_0(\vec{p}_1, E_1; \vec{p}_0, E_0)$.

Hinweis: Hierbei tritt ein Integral der Form $\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau$ auf, das für reelle ω nicht konvergiert. Ersetzen Sie hier $\omega \to \omega + i\epsilon$ mit $\epsilon > 0$, um Konvergenz zu erzeugen, und belassen Sie das ϵ im Ergebnis.

P 15 Parität für Teilchen mit Spin 1/2 (9 Punkte)

Wir wollen den Paritätsoperator für Teilchen mit Spin 1/2 betrachten. Zustände im Hilbertraum $\mathcal{H}_{1/2}$ für diese Teilchen sind Spinoren, d. h. sie haben die Form

$$\chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \chi_1(\vec{x}) \\ \chi_2(\vec{x}) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

worin χ_1 und χ_2 quadratintegrable Funktionen sind. Der Paritätsoperator $\mathcal{P}$ ist auf $\mathcal{H}_{1/2}$ definiert durch

$$(\mathcal{P}\chi)(\vec{x}) = \chi(-\vec{x})\,. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, daß der Paritätsoperator unitär ist und daß

$$\mathcal{P}^2 = \mathbf{1} \tag{7}$$
$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}\,. \tag{8}$$

Sei nun $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + W(r)\,\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$, und $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$.

(b) Zeigen Sie, daß $[\mathcal{P}, \mathbf{H}] = \left[\mathcal{P}, \vec{\mathbf{J}}\right] = 0$, und schließen Sie, daß es simultane Eigenfunktionen von $\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}^2, \vec{\mathbf{S}}^2, \vec{\mathbf{J}}^2, \mathbf{J}_3$ und $\mathcal{P}$ gibt. Ist $\psi(\vec{x}) = f(r)\chi^{jl}_m(\vartheta,\varphi)$ eine solche Eigenfunktion, so gilt

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x}) = (-1)^l\psi(\vec{x})\,. \tag{9}$$

(c) Durch die Angabe der Eigenwerte von $\vec{\mathbf{J}}^2, \mathbf{J}_3$ und $\mathcal{P}$ sind die Zustände $\chi^{jl}_m(\vartheta,\varphi)$ eindeutig klassifiziert. Zeigen Sie dies an Beispielen, z. B. anhand der Bedeutung der spektroskopischen Notation $J^P = \frac{3}{2}^+$ oder $J^P = \frac{7}{2}^-$.

(d) Zeigen Sie, daß für Teilchen ohne Spin (vgl. Aufg. P 12) gilt: Wenn $V(\vec{x})$ drehinvariant ist, so ist $V(\vec{x})$ paritätsinvariant.

Für Teilchen mit Spin trifft dies i. a. nicht zu. Zeigen Sie dazu, daß die Operatoren $g(r)\,\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ oder $g(r)\,\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ zwar drehinvariant, aber nicht paritätsinvariant sind.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm2-0708.html