Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

7. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 7.12.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 10.12.2007

P 16 Translationsoperator (4 Punkte)

Der Translationsoperator ist für $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert als

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{a}\cdot\vec{\mathbf{P}}\right)\,, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{P}$ der Impulsoperator ist.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ unitär ist und daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,a_1\mathbf{P}_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,a_2\mathbf{P}_2\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,a_3\mathbf{P}_3\right)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie außerdem, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ die Darstellungseigenschaft besitzt, d. h. daß für $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\mathbf{T}_{\vec{b}} = \mathbf{T}_{\vec{a}+\vec{b}}\,. \tag{3}$$

(b) Betrachten Sie $\psi \in \mathcal{H}$ in Ortsraumdarstellung, wobei $\psi(\vec{x})$ unendlich oft differenzierbar sei. Zeigen Sie daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{a})\,. \tag{4}$$

P 17 Darstellung der Drehgruppe für Teilchen ohne Spin (5 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen in drei Dimensionen. Für eine Drehung $R \in SO(3)$ gilt $\det(R) = 1$ und $R^T R = \mathbf{1}$. Bezeichne $R_{\vec{\omega}}$ mit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\vec{\omega}/\,|\vec{\omega}|$.

(a) Bestimmen Sie für einen gegebenen Vektor $\vec{a}$ eine Matrix $I(\vec{a})$ so, daß für jeden Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$I(\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}\,. \tag{5}$$

Wählen Sie dann $\vec{a}$ in z-Richtung, $\vec{a} = \varphi\,\vec{e}_z$, und geben Sie $I(\vec{a})$ an. Zeigen Sie für diesen Fall, daß $\exp[I(\vec{a})]$ die Matrix $R_{\vec{a}}$ für eine Drehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel φ ist.

Eine unitäre Darstellung D der Drehgruppe auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ für Teilchen ohne Spin kann man im Ortsraum definieren, indem man für $R_{\vec{\omega}} \in SO(3)$ und Zustände $|\psi\rangle$ setzt

$$D(R_{\vec{\omega}})\psi(\vec{x}) = \psi\left(R_{\vec{\omega}}^{-1}\vec{x}\right) \,. \tag{6}$$

(b) Zeigen Sie die sog. Darstellungseigenschaft

$$D(R_{\vec{\omega}_1} \cdot R_{\vec{\omega}_2}) = D(R_{\vec{\omega}_1})D(R_{\vec{\omega}_2})\,. \tag{7}$$

(c) Zeigen Sie, daß die Abbildung $D(R_{\vec{\omega}})$ unitär ist.

(d) Man kann allgemein zeigen

$$D(R_{\vec{\omega}}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{\mathbf{L}}\right) \,, \tag{8}$$

d. h. die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind gerade die Generatoren der Drehungen auf den quantenmechanischen Zuständen. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang für den Fall einer Drehung um die x_3-Achse.
Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Funktionensystem.

S 18 Boost eines Teilchens (6 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen ohne Spin mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$.

(a) Zeigen Sie: Ist $\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung, so ist die als

$$\psi'(\vec{x},t) = \exp\left[\frac{im}{\hbar}\left(\vec{v}\cdot\vec{x} - \frac{1}{2}v^2t\right)\right]\psi(\vec{x}-\vec{v}t,t) \tag{9}$$

definierte 'geboostete' Wellenfunktion ebenfalls eine Lösung.

(b) Zeigen Sie, daß für die Anwendung desselben Boosts auf die Funktion

$$\psi_{\vec{p}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{t\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)\right] \tag{10}$$

gilt $\psi'_{\vec{p}} = \psi_{\vec{p}+\vec{v}m}$. Welche Bedeutung hat die Funktion $\psi_{\vec{p}}$?

S 19 Zeitumkehroperator für Teilchen ohne Spin (5 Punkte)

Wir betrachten Teilchen ohne Spin mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})$. Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T}$ sei definiert durch

$$\mathcal{T}\psi(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},-t)\,. \tag{11}$$

(a) Zeigen Sie, daß der Zeitumkehroperator $\mathcal{T} : \psi \to \psi'$ antiunitär ist, d. h.

  (i) Er ist antilinear.

  (ii) Es gilt für ein hermitesches Skalarprodukt $\langle \phi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$.

(b) Zeigen Sie: Falls $\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung ist, so ist auch $\psi'(\vec{x},t) = \mathcal{T}\psi$ eine Lösung.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html