Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

8. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 14.12.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 17.12.2007

P 20 Zeitumkehroperator für Teilchen mit Spin 1/2 (8 Punkte)

Wir betrachten Spin-1/2-Teilchen. Der Hamiltonoperator sei (mit $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\sigma}/2$) gegeben durch $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}) + W(\vec{x})\,\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$. Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T}$ ist für Spinoren ψ definiert durch

$$\mathcal{T}\psi(\vec{x},t) = -i\sigma_2\psi^*(\vec{x},-t)\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) $\sigma_k^* = -\sigma_2\sigma_k\sigma_2$ in der Standarddarstellung der Pauli-Matrizen.

(b) Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T} : \psi \to \psi'$ ist antiunitär.

(c) Bestimmen Sie $\mathcal{T}^2$.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\,\vec{\mathbf{P}} &= -\vec{\mathbf{P}}\,\mathcal{T} && (2)\\
\mathcal{T}\,\vec{\mathbf{X}} &= \vec{\mathbf{X}}\,\mathcal{T} && (3)\\
\mathcal{T}\,\vec{\mathbf{L}} &= -\vec{\mathbf{L}}\,\mathcal{T} && (4)\\
\mathcal{T}\,\vec{\mathbf{S}} &= -\vec{\mathbf{S}}\,\mathcal{T} && (5)\\
[H,\mathcal{T}] &= 0\,. && (6)
\end{aligned}$$

Hinweis: Wenden Sie diese Produkte von Operatoren auf einen Spinor ψ an.

(e) Falls $\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung ist, so ist auch $\psi'(\vec{x},t) = \mathcal{T}\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung.

(f) Falls ψ_E Lösung der stationären Schrödingergleichung zum Eigenwert E ist, so ist $\psi'_E = \mathcal{T}\psi_E$ ebenfalls Lösung mit dem selben Eigenwert. (*Hinweis:* Benutzen Sie z. B. daß $[H,\mathcal{T}] = 0$.) Es gilt $\langle\psi_E|\psi'_E\rangle = 0$, d. h. die beiden Zustände sind orthogonal. Dies bezeichnet man als Kramersche Entartung.

S 21 Lorentz-Transformationen (12 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit den Koordinaten $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, zusammengefaßt im kontravarianten 4-Vektor x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), und einem Skalarprodukt $a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, worin $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Diesen Raum bezeichnet man als Minkowski-Raum.

Als homogene Lorentz-Gruppe bezeichnet man die linearen Transformationen $a^\mu \to a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$, die das Skalarprodukt invariant lassen, d. h.

$$(\Lambda a) \cdot (\Lambda b) = (\Lambda_\mu{}^\lambda a_\lambda)(\Lambda^\mu{}_\nu b^\nu) = a \cdot b \,. \tag{7}$$

(a) Wir untersuchen zunächst Lorentz-Transformationen, bei denen der zeitartige Basisvektor $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$ auf sich selbst abgebildet wird, $\Lambda \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$. Argumentieren Sie, daß sich jede solche Transformation schreiben läßt als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\mathcal{R}\mathcal{P}^k)^\mu{}_\nu \,, \tag{8}$$

wobei $k \in \{1, 2\}$,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{9}$$

mit $R \in \mathrm{SO}(3)$, und $\mathcal{P}$ die Matrix der Raumspiegelung ist.

(b) Geben Sie $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}^2$ in Matrixdarstellung an und zeigen Sie, daß für die Matrix $\mathcal{T}$ der Zeitspiegelung gilt $\mathcal{T} = -\mathcal{P}$.

Im folgenden wollen wir Lorentz-Boosts betrachten, die gegeben sind durch

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \,. \tag{10}$$

(c) Geben Sie t' und x' explizit an. Zeigen Sie, daß $\det \Lambda = 1$ und bestimmen Sie $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$.

(d) Zeigen Sie, daß man obige Transformation erhält als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\omega K_x)]^\mu{}_\nu \tag{11}$$

worin

$$\omega = \mathrm{Artanh}\left(\frac{v}{c}\right) \tag{12}$$

als Rapidität bezeichnet wird und

$$(K_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

die Erzeugende der Boosts in x-Richtung ist. Wie lassen sich $\cosh\omega$ und $\sinh\omega$ mit γ und v/c in Verbindung bringen? Wie sehen die Generatoren für Boosts in y- und z-Richtung aus?

(e) Zeigen Sie, daß für zwei aufeinanderfolgende Boosts in x-Richtung die Rapidität additiv ist. Leiten Sie daraus die relativistische Additionsformel für Geschwindigkeiten her.

(f) Zeigen Sie, daß die Transformation für einen Lorentz-Boost im nichtrelativistischen Grenzfall in eine Galilei-Transformation übergeht.

Man kann zeigen, daß sich jede homogene Lorentz-Transformation schreiben läßt als

$$\Lambda = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\, \Lambda_B(\vec{\omega})\, \mathcal{R}(\vec{\varphi})\, \mathcal{P}^k \,, \tag{14}$$

worin wieder $k \in \{1,2\}$, $\mathcal{R}(\vec{\varphi})$ eine Drehung mit Drehvektor $\vec{\varphi}$ ist (siehe (9)), und $\Lambda_B(\vec{\omega})$ ein Boost in Richtung $\vec{\omega}$ mit Rapidität $|\vec{\omega}|$ ist.

(g) Drücken Sie diese Formel in Worten aus. Wieviele Erzeugende hat demzufolge die homogene Lorentz-Gruppe?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html