Fakultät für Physik
C. Ewerz

Universität Bielefeld
Wintersemester 2007/08

9. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 21.12.2007
Besprechung der Präsenzaufgaben: 7.1.2008

P 22 Darstellung der Drehgruppe für Teilchen mit Spin 1/2 (16 Punkte)

Für allgemeine Drehimpulsoperatoren $\vec{\mathbf{j}}$ mit Komponenten $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ sollen die Beziehungen

$$\mathbf{j}_3 |j\,m\rangle = m|j\,m\rangle \tag{1}$$

$$\vec{\mathbf{j}}^2 |j\,m\rangle = j(j+1)|j\,m\rangle \tag{2}$$

$$\mathbf{j}_\pm |j\,m\rangle = (\mathbf{j}_1 \pm i\,\mathbf{j}_2)|j\,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|j\,(m \pm 1)\rangle \tag{3}$$

gelten, die für den Fall des normalen Drehimpulsorperators, $\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{L}}$ mit $j = l$, bekannt sind. Wir wollen jetzt die $\mathbf{j}_i$ als lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^{2j+1}$ auffassen, und die $|j\,m\rangle$ mit $m \in \{-j, -j+1, \ldots, j\}$ seien eine geeignete Basis von $\mathbb{C}^{2j+1}$.

Dadurch ist auch der Fall $j = 1/2$ definiert, den wir im folgenden betrachten wollen. Wir haben es dann gerade mit dem Spinoperator $\vec{\mathbf{S}}$ mit Komponenten $\mathbf{S}_i$ zu tun. Die Basisvektoren sind dann

$$\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Zeigen Sie:

(a) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\sigma}/2$ mit den Paulimatrizen σ_i erfüllt obige Beziehungen.

(b) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis der hermiteschen komplexen 2×2-Matrizen.

(c) Es gilt

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm}\sigma_m \tag{5}$$

und damit

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\,. \tag{6}$$

Hinweis: Betrachten Sie $[\sigma_k, \sigma_l]$ und $\{\sigma_k, \sigma_l\} = \sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k$.

(d) Es gilt

$$\rho_{1/2}(R) \equiv \exp(-i\vec{\omega}\cdot\vec{\mathbf{S}}) = \cos\frac{\varphi}{2} - i\,\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}}{\varphi}\,\sin\frac{\varphi}{2}\,, \tag{7}$$

worin $\vec{\omega}$ der Drehvektor zu einer Drehung $R \in \mathrm{SO}(3)$ ist und $\varphi = |\vec{\omega}|$. Betrachten Sie insbesondere die Fälle $\varphi = 0,\ 2\pi$ und 4π. Folgern Sie, daß $\rho_{1/2}$ keine eindeutige Abbildung der Drehungen ist.

Wir betrachten nun die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} h : \mathrm{SU}(2) &\to \mathrm{SO}(3) \\ \alpha &\to h(\alpha)\,, \end{aligned} \tag{8}$$

$h(\alpha)\vec{e}_k = h_{jk}(\alpha)\vec{e}_j$ für orthonormale Basisvektoren $\vec{e}_i$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$\alpha\sigma_k\alpha^\dagger = h_{jk}(\alpha)\sigma_j\,. \tag{9}$$

(e) Überprüfen Sie:

(i) Für jedes $\alpha \in \mathrm{SU}(2)$ ist $h(\alpha)$ eine orthogonale Abbildung.
Hinweis: $\vec{a}\cdot\vec{a} = -\det(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})$ (warum?).

(ii) $\pm\mathrm{Id} \in \mathrm{SU}(2)$ werden auf $\mathrm{Id} \in \mathrm{SO}(3)$ abgebildet.

Bemerkung: Man kann weiterhin zeigen, daß *Bild*$(h) \simeq \mathrm{SO}(3)$, d. h. daß sich für jede Drehmatrix R ein $\alpha \in \mathrm{SU}(2)$ finden läßt, so dass $R = h(\alpha)$. h wird oft als (doppelte) Überlagerung bezeichnet, SU(2) entsprechend als Überlagerungsgruppe von SO(3).

Wir können nun eine Darstellung von SU(2) auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{1/2}$ der Spin-1/2-Teilchen

$$D_{1/2} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{H}_{1/2} \tag{10}$$

definieren durch

$$\big(D_{1/2}(\alpha)\,\chi\big)\,(\vec{x}) = \alpha\chi(h^{-1}(\alpha)\vec{x}) = \alpha\chi(R^{-1}\vec{x})\,. \tag{11}$$

(f) Überprüfen Sie, daß es sich hierbei um eine unitäre Darstellung handelt.

Schließlich induziert diese Darstellung der Überlagerungsgruppe SU(2) eine *Strahldarstellung* der Drehgruppe SO(3) auf $\mathcal{H}_{1/2}$. Dazu wählt man zu jeder Drehung $R \in \mathrm{SO}(3)$ zunächst einen — wie wir gesehen haben: nicht eindeutigen — Repräsentanten $\alpha \in \mathrm{SU}(2)$, für den $R = h(\alpha)$. Danach kann obige Darstellung der SU(2) verwendet werden.

S 23 Klein-Gordon-Gleichung bei elektrischem Potential (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß in Anwesenheit eines elektrostatischen Potentials V die erhaltene Dichte und der erhaltene Strom der Klein-Gordon-Gleichung gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \rho &= i\hbar \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) - 2eV\phi^*\phi \\ \vec{J} &= -i\hbar c^2 \left(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^* \right) . \end{aligned} \tag{12}$$

Hinweis: Überprüfen Sie, daß diese die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm2-0708.html