Institut für Theoretische Physik
H. G. Dosch

Universität Heidelberg
Sommersemester 2001

2. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der Hausübungen: 9. Mai in der Vorlesung
Besprechung der Präsenzübungen: 4. Mai

Die Punkte der Präsenzübungen werden für die *Bereitschaft* zum Vorrechnen vergeben. Es empfiehlt sich, dann auch eine Lösung parat zu haben.

P 4 Operatoren im Hilbertraum (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß Eigenwerte und Erwartungswerte selbstadjungierter Operatoren reell sind.

(b) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator mit dem Zeitentwicklungsoperator kommutiert, d. h.

$$[\mathbf{H}, \exp(-i\mathbf{H}t/\hbar)] = 0\,. \tag{1}$$

(c) Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren. Unter welcher Bedingung ist der Operator $\mathbf{AB}$ selbstadjungiert? Zeigen Sie, daß $i\,[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ selbstadjungiert ist.

H 5 Kommutatoralgebra und Unschärferelation (4 Punkte)

Wir betrachten zwei selbstadjungierte Operatoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Unter dem mittleren Schwankungsquadrat $(\Delta\mathbf{A})^2$ des Operators $\mathbf{A}$ versteht man den Erwartungswert von $(\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle)^2$. Es gilt (warum?)

$$(\Delta\mathbf{A})^2 = \left\langle(\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle)^2\right\rangle = \left\langle\mathbf{A}^2\right\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle^2\ . \tag{2}$$

Wir wollen im folgenden die verallgemeinerte Unschärferelation herleiten:

$$(\Delta\mathbf{A})^2(\Delta\mathbf{B})^2 \geq \frac{1}{4}\left|\langle[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\rangle\right|^2\ . \tag{3}$$

Seien $|f\rangle$ und $|g\rangle$ zwei Zustände und $\lambda \in \mathbb{C}$. Betrachten Sie $\|\,|f\rangle + \lambda\,|g\rangle\,\|$ und beweisen Sie durch die Wahl $\lambda = -\langle g \mid f\rangle\,/\,\langle g \mid g\rangle$ die Schwarzsche Ungleichung

$$\langle f \mid f\rangle\,\langle g \mid g\rangle \geq |\langle f \mid g\rangle|^2\ . \tag{4}$$

Ersetzen Sie hierin $|f\rangle$ und $|g\rangle$ durch $(\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle)\,|\psi\rangle$ bzw. $(\mathbf{B} - \langle\mathbf{B}\rangle)\,|\psi\rangle$ mit einem beliebigen Zustand $|\psi\rangle$. Die rechte Seite läßt sich dann mit Hilfe der allgemeinen Identität

$$\mathbf{CD} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{C}, \mathbf{D}] + \frac{1}{2}(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) \tag{5}$$

(Beweis?) weiter abschätzen, um (3) zu erhalten.

H 6 Zwei-Zustand-System (5 Punkte)

Wir betrachten ein System mit einem diskreten Freiheitsgrad, d. h. die möglichen Zustände können durch Zustandsvektoren in $\mathbb{C}^2$ beschrieben werden. Eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ ist gegeben durch

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Das System sei beschrieben durch $\psi = a\,|u\rangle + b\,|d\rangle$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Die Dynamik des Systems sei durch den Hamilton–Operator

$$\mathbf{H} = -\frac{\mu B}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = -\mu B \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \right] \tag{7}$$

gegeben, worin $\boldsymbol{\sigma}_i$ die Pauli–Matrizen sind:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}_1]$.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenzustände von $\mathbf{H}$ und $\boldsymbol{\sigma}_1$.

(c) Geben Sie die Zeitentwicklung der Eigenzustände des Hamilton–Operators an.

(d) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Eigenzustand zum positiven Eigenwert von $\boldsymbol{\sigma}_1$. In welchem Zustand ist das System zum Zeitpunkt $t = T > 0$, und welchen Erwartungswert hat dann $\boldsymbol{\sigma}_1$?

H 7 Fourier-Transformation II (3 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Fourier–Transformation aus Aufgabe H3. Leiten Sie her:

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \mathcal{F}[(d/dx)\phi(x); k] = ik\mathcal{F}[\phi(x); k] \\ &(b) \qquad \mathcal{F}[x\phi(x); k] = i(d/dk)\mathcal{F}[\phi(x); k] \end{aligned}$$

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/qm01.html