Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz

Universität Heidelberg
Wintersemester 2010/11

3. Übung zur Quantenmechanik II

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 3.12.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 6.-9.12.2010

S 7 Parität für Teilchen mit Spin 1/2 (10 Punkte)

Wir wollen den Paritätsoperator für Teilchen mit Spin 1/2 betrachten. Zustände im Hilbertraum $\mathcal{H}_{1/2}$ für diese Teilchen sind Spinoren, d. h. sie haben die Form

$$\chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \chi_1(\vec{x}) \\ \chi_2(\vec{x}) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

worin χ_1 und χ_2 quadratintegrable Funktionen sind. Der Paritätsoperator $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ist auf $\mathcal{H}_{1/2}$ definiert durch

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}\chi\right)(\vec{x}) = \chi(-\vec{x})\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, daß der Paritätsoperator unitär ist und daß

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{P}}^2 &= \mathbf{1} & (3)\\ \boldsymbol{\mathcal{P}}^\dagger &= \boldsymbol{\mathcal{P}}\,. & (4) \end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + W(r)\,\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$, und $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$.

(b) Zeigen Sie, daß $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \mathbf{H}] = \left[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \vec{\mathbf{J}}\right] = 0$, und schließen Sie, daß es simultane Eigenfunktionen von $\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}^2, \vec{\mathbf{S}}^2, \vec{\mathbf{J}}^2, \mathbf{J}_3$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ gibt. Ist $\psi(\vec{x}) = f(r)\chi^{jl}_m(\vartheta,\varphi)$ eine solche Eigenfunktion, so gilt

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = (-1)^l\psi(\vec{x})\,. \tag{5}$$

(c) Durch die Angabe der Eigenwerte von $\vec{\mathbf{J}}^2, \mathbf{J}_3$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ sind die Zustände $\chi^{jl}_m(\vartheta,\varphi)$ eindeutig klassifiziert. Zeigen Sie dies an Beispielen, z. B. anhand der Bedeutung der spektroskopischen Notation $J^P = \frac{3}{2}^+$ oder $J^P = \frac{7}{2}^-$.

(d) Zeigen Sie, daß für Teilchen ohne Spin (vgl. Aufg. 5) gilt: Wenn $V(\vec{x})$ drehinvariant ist, so ist $V(\vec{x})$ paritätsinvariant.

Für Teilchen mit Spin trifft dies i. a. nicht zu. Zeigen Sie dazu, daß die Operatoren $g(r)\,\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ oder $g(r)\,\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$ zwar drehinvariant, aber nicht paritätsinvariant sind.

S 8 Zeitumkehroperator für Teilchen mit Spin 1/2 (10 Punkte)

Wir betrachten Spin-1/2-Teilchen. Der Hamiltonoperator sei (mit $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\sigma}/2$) gegeben durch $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}) + W(\vec{x})\,\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}$. Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T}$ ist für Spinoren ψ definiert durch

$$\mathcal{T}\psi(\vec{x},t) = -i\sigma_2\psi^*(\vec{x},-t)\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie:

(a) $\sigma_k^* = -\sigma_2\sigma_k\sigma_2$ in der Standarddarstellung der Pauli-Matrizen.

(b) Der Zeitumkehroperator $\mathcal{T} : \psi \to \psi'$ ist antiunitär.

(c) Bestimmen Sie $\mathcal{T}^2$.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{P}} &= -\vec{\mathbf{P}}\,\mathcal{T} && (7)\\ \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{X}} &= \vec{\mathbf{X}}\,\mathcal{T} && (8)\\ \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{L}} &= -\vec{\mathbf{L}}\,\mathcal{T} && (9)\\ \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{S}} &= -\vec{\mathbf{S}}\,\mathcal{T} && (10)\\ [H,\mathcal{T}] &= 0\,. && (11) \end{aligned}$$

Hinweis: Wenden Sie diese Produkte von Operatoren auf einen Spinor ψ an.

(e) Falls $\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung ist, so ist auch $\psi'(\vec{x},t) = \mathcal{T}\psi(\vec{x},t)$ eine Lösung.

(f) Falls ψ_E Lösung der stationären Schrödingergleichung zum Eigenwert E ist, so ist $\psi'_E = \mathcal{T}\psi_E$ ebenfalls Lösung mit dem selben Eigenwert. (*Hinweis:* Benutzen Sie z. B. daß $[H,\mathcal{T}] = 0$.) Es gilt $\langle\psi_E|\psi'_E\rangle = 0$, d. h. die beiden Zustände sind orthogonal. Dies bezeichnet man als Kramersche Entartung.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm2-10.html