Institut für Theoretische Physik
H. G. Dosch

Universität Heidelberg
Sommersemester 2001

3. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der Hausübungen: 16. Mai in der Vorlesung
Besprechung der Präsenzübungen: 11. Mai

Die Punkte der Präsenzübungen gelten ab dieser Übung als *Zusatzpunkte*, können also auch genutzt werden, um eventuelle Defizite in den Punkten der Hausübungen auszugleichen.

P 8 Spinalgebra und Dichteoperator (3 Punkte)

Die Komponenten des Spinoperators eines Zwei–Zustand–Systems sind definiert als $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}_i$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_i$ die Pauli–Matrizen sind (siehe Aufg. H 6). Der Dichteoperator für ein solches System ist

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{3} P_i\boldsymbol{\sigma}_i\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{array}{ll} (a) & \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}_i = 0 \\ (b) & \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k) = 2\delta_{jk} \\ (c) & \langle\mathbf{S}_i\rangle = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\rho}\mathbf{S}_i) = \hbar P_i \end{array}$$

H 9 Spinalgebra im Produktraum (5 Punkte)

Wir betrachten ein System aus 2 Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Der Zustandsraum dieses Systems ist der Produktraum der Hilberträume der einzelnen Teilchen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$. Der Operator des Gesamtspins ist $\vec{\mathbf{\Sigma}}$, seine Komponenten sind

$$\mathbf{\Sigma}_i = \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}_i\,. \tag{2}$$

Wir bezeichnen die beiden Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens mit $|+\rangle$ und $|-\rangle$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_3\,|+\rangle = |+\rangle$ und $\boldsymbol{\sigma}_3\,|-\rangle = -\,|-\rangle$. Zeigen Sie, daß

$$\vec{\mathbf{\Sigma}}^2 = \vec{\mathbf{S}}^2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{\mathbf{S}}^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_i\,. \tag{3}$$

Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren $\mathbf{\Sigma}_3$ und $\vec{\mathbf{\Sigma}}^2$ auf folgende Zustände:

$$\begin{array}{ll} (a) & |+\rangle \otimes |+\rangle \\ (b) & |-\rangle \otimes |-\rangle \\ (c) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle \;+\; |-\rangle \otimes |+\rangle\right) \\ (d) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle \;-\; |-\rangle \otimes |+\rangle\right)\,. \end{array}$$

H 10 Translationsoperator (5 Punkte)

(a) **Im abstrakten Hilbertraum**
Der Translationsoperator ist für $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ definiert als

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{\mathbf{P}}\right) , \tag{4}$$

wobei $\mathbf{P}$ der Impulsoperator ist. Zeigen Sie, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ unitär ist und daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_1\mathbf{P}_1\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_2\mathbf{P}_2\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_3\mathbf{P}_3\right) . \tag{5}$$

Zeigen Sie außerdem, daß $\mathbf{T}_{\vec{a}}$ die Darstellungseigenschaft besitzt, d. h. daß für $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\mathbf{T}_{\vec{b}} = \mathbf{T}_{\vec{a}+\vec{b}} . \tag{6}$$

(b) **Im Ortsraum**
Im Ortsraum sind die Komponenten des Impulsoperators $\mathbf{P}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$. Sei $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ unendlich oft differenzierbar. Zeigen Sie daß

$$\mathbf{T}_{\vec{a}}\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}-\vec{a}) . \tag{7}$$

H 11 Gaußsches Wellenpaket (5 Punkte)

Wir wollen ein freies Teilchen in einer Dimension betrachten. Zu einem festen Zeitpunkt (z. B. $t = 0$) sei der Zustand $\psi(x)$ gegeben durch

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\, \phi(k) , \tag{8}$$

wobei mit $a \in \mathbb{R}$

$$\phi(k) = Ae^{-a^2k^2} . \tag{9}$$

Bestimmen Sie A so, daß $\langle \phi \mid \phi \rangle = 1$. Seien $\mathbf{Q}$ der Orts– und $\mathbf{P}$ der Impulsoperator. Berechnen Sie für obigen Zustand die Erwartungswerte $\langle \mathbf{Q} \rangle$, $\left\langle \mathbf{Q}^2 \right\rangle$, $\langle \mathbf{P} \rangle$, $\left\langle \mathbf{P}^2 \right\rangle$, und das Schwankungsprodukt $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$, wobei allgemein $(\Delta\mathbf{A}) = \sqrt{(\Delta\mathbf{A})^2}$ (siehe Aufg. H5).

Hinweis: Es gilt für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} , \tag{10}$$

und weitere nützliche Integrale können hieraus durch Ableiten nach λ gewonnen werden.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/qm01.html