Institut für Theoretische Physik
H. G. Dosch

Universität Heidelberg
Sommersemester 2001

6. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der Hausübungen: 6. Juni vor der Vorlesung
Besprechung der Präsenzübungen: 1. Juni

Die Klausur findet am 11. Juni um 11.00 Uhr s.t. im großen Hörsaal, Philosophenweg 12 statt. Dauer: 120 Minuten. Als Hilfsmittel dürfen Sie ein selbstbeschriebenes Blatt (DIN A4) mitbringen.

P 20 Drehimpulsalgebra (3 Punkte)

Die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind definiert durch $\mathbf{L}_k = \epsilon_{klm}\mathbf{Q}_l\mathbf{P}_m$, wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Es gilt $[\mathbf{L}_k, \mathbf{L}_l] = i\hbar\epsilon_{klm}\mathbf{L}_m$.

(a) Zeigen Sie $\left[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{L}}^2\right] = 0$.
Hinweis: Beachten Sie einen geeigneten früheren Hinweis.

(b) Berechnen Sie $\left(\mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2\right) Y_l^m$.

(c) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$. Sei weiter ein vollständiges System von Eigenzuständen von $\mathbf{A}$ gegeben durch $|\psi_n\rangle$, die zugehörigen Eigenwerte seien a_n. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Spektrum von $\mathbf{A}$ nicht entartet ist, d. h. $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$. Betrachten Sie die Matrixelemente von $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ und schließen Sie, daß $\mathbf{B}$ diagonal in der Basis $|\psi_n\rangle$ ist. Zeigen Sie, daß die $|\psi_n\rangle$ auch Eigenzustände von $\mathbf{B}$ sind. (Hinweis: Ergänzen Sie im Ausdruck $\mathbf{B}\,|\psi_l\rangle$ zwei vollständige Systeme.) Welche Anwendung hat dies im Falle der Drehimpulsoperatoren?

H 21 Herleitung der Pauli-Matrizen (5 Punkte)

Wir wollen die bekannte Form der Pauli–Matrizen für den Drehimpuls $j = 1/2$ aus den allgemeinen Eigenschaften des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{J}}$ herleiten. Wir betrachten die Zustände $\left|\phi_j^m\right\rangle$, die Eigenzustände zu $\vec{\mathbf{J}}^2$ und $\mathbf{J}_3$ sind,

$$\vec{\mathbf{J}}^2 \left|\phi_j^m\right\rangle = j(j+1)\hbar^2 \left|\phi_j^m\right\rangle \tag{1}$$
$$\mathbf{J}_3 \left|\phi_j^m\right\rangle = m\hbar \left|\phi_j^m\right\rangle . \tag{2}$$

Für die Operatoren $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$ gilt

$$\mathbf{J}_+ \left|\phi_j^m\right\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\hbar \left|\phi_j^{m+1}\right\rangle \tag{3}$$
$$\mathbf{J}_- \left|\phi_j^m\right\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\hbar \left|\phi_j^{m-1}\right\rangle . \tag{4}$$

Für den Drehimpuls $j = 1/2$ kann m die Werte $-1/2$ und $+1/2$ annehmen. Wir identifizieren

$$\left|\phi^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \left|\phi^{-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Für den Fall $j = 1/2$ schreibt man überlicherweise $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$. Leiten Sie aus den obigen Bedingungen (2) – (4) die explizite Darstellung der Pauli–Matrizen $\boldsymbol{\sigma}_i$ her.

H 22 Kohärenter Zustand im harmonischen Oszillator (5 Punkte)

Die normierten Energieeigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators seien $|\psi_n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für $c \in \mathbb{C}$ sei ein Zustand gegeben durch

$$|\phi\rangle = e^{-\frac{|c|^2}{2}} \exp\left(c\mathbf{A}^\dagger\right) |\psi_0\rangle , \tag{6}$$

wobei wir die Operatoren aus Aufg. H 14 verwenden.[1]

(a) Zeigen Sie, daß $|\phi\rangle$ normiert ist, d. h. $\langle \phi \mid \phi \rangle = 1$.

(b) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeiten $|\langle \psi_n \mid \phi \rangle|^2$ einer Poisson–Verteilung folgen:

$$|\langle \psi_n \mid \phi \rangle|^2 = \frac{N^n}{n!} e^{-N} . \tag{8}$$

Welchen Wert hat N? Welche Wahrscheinlichkeit gibt $|\langle \psi_n \mid \phi \rangle|^2$ an?

(c) Zeigen Sie, daß $|\phi\rangle$ ein Eigenzustand zum Absteigeoperator $\mathbf{A}$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

Zur Bedeutung: Der Zustand $|\phi\rangle$ ist ein sog. kohärenter Zustand. Solche Zustände spielen u. a. in der Quantenoptik eine wichtige Rolle, z. B. bei Lasern.

H 23 Sphärischer Potentialtopf (5 Punkte)

Wir wollen den dreidimensionalen sphärischen Potentialtopf unendlicher Tiefe untersuchen. Das Potential ist also mit $R > 0$

$$V(|\vec{x}|) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\vec{x}| < R \\ \infty & \text{für } R \leq |\vec{x}| . \end{cases} \tag{9}$$

Wir wollen im folgenden Energieeigenwerte $E > 0$ und zugehörige Eigenfunktionen bestimmen.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator für die Bewegung eines Teilchens der Masse m in diesem Potentialtopf an.

[1] Beachten Sie, daß

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^n |\psi_0\rangle = \sqrt{n!}\, |\psi_n\rangle . \tag{7}$$

(Diese Formel enthielt in Aufg. H 14 einen Druckfehler.)

(b) Setzen Sie die Lösung im Ortraum unter Verwendung von Kugelkoordinaten an als

$$\psi(r,\vartheta,\phi) = f_l(r) Y_l^m(\vartheta,\phi)\,. \tag{10}$$

Sei $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Zeigen Sie, daß der obige Ansatz eine Lösung der Energieeigenwertgleichung ist, falls $g_l(z) = f_l(r/k)$ der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d}{dz} - \frac{l(l+1)}{z^2} + 1\right] g_l(z) = 0 \tag{11}$$

genügt. Diese Differentialgleichung ist als (sphärische) Besselsche Differentialgleichung bekannt. Ihre Lösungen sind die (sphärischen) Bessel–Funktionen $j_l(z)$ und Neumann–Funktionen $n_l(z)$.

(c) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0(z) = \frac{\cos z}{z} \tag{12}$$

Lösungen der Differentialgleichung (11) für $l = 0$ sind.

(d) *(optional)* (+ 2 Punkte)
Zeigen Sie, daß j_0 im Ursprung regulär ist und daß n_0 im Ursprung nicht regulär ist. Warum muß die Lösung n_0 bei unserem Problem ausgeschlossen werden?

(e) Finden Sie die möglichen Energiewerte E für den Fall $l = 0$. Verwenden sie hierbei ausschließlich die Lösung j_0.
Hinweis: Beachten Sie, daß Wellenfunktionen an unendlich hohen Potentialschwellen verschwinden müssen.

(f) *(optional)* (+ 3 Punkte)
Zeigen Sie, daß

$$j_1(z) = \frac{1}{z} j_0(z) - n_0(z) \qquad \text{und} \qquad n_1(z) = \frac{1}{z} n_0(z) + j_0(z) \tag{13}$$

die Differentialgleichung (11) für $l = 1$ lösen. Zeigen Sie, daß j_1 im Gegensatz zu n_1 regulär im Ursprung ist. Finden Sie für $l = 1$ eine Bedingung für die möglichen Energieeigenwerte.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/qm01.html