Institut für Theoretische Physik
H. G. Dosch

Universität Heidelberg
Sommersemester 2001

7. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der Hausübungen: 20. Juni vor der Vorlesung
Besprechung der Präsenzübungen: 15. Juni

P 24 Endliche Kernausdehnung und atomare Energieniveaus (3 Punkte)

Der Atomkern werde als homogen geladene Kugel der Gesamtladung Ze_0 mit Radius R aufgefaßt. Das Elektron bewegt sich dann im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze_0^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & \text{für } r \leq R \\ -\frac{Ze_0^2}{r} & \text{für } R < r \end{cases} \tag{1}$$

Behandeln Sie die *Abweichung* des Potentials $V(r)$ vom Coulomb–Potential eines punktförmigen Kerns als Störung und berechnen Sie in Störungsrechnung 1. Ordnung die Energieverschiebung des 1s-Zustands in Abhängigkeit vom Bohrschen Radius a und vom Kernradius R. Dabei können Sie annehmen, daß $R \ll a$. Wie groß ist die Energieverschiebung des Grundzustands beim Wasserstoff ($Z = 1$, $R = 1.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$)?

Hinweis:

Die Wellenfunktion des 1s-Zustands im Coulomb–Potential ist (im Ortsraum)

$$\psi_{100}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a}} \tag{2}$$

mit dem Bohrschen Radius $a = \hbar^2/(me_0^2) = 0.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Beachten Sie, daß $e^{-r/a} \simeq 1$ für $r \leq R \ll a$.

H 25 Drehimpuls und Darstellung der Drehgruppe (5 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen in drei Dimensionen. Für eine Drehung $R \in SO(3)$ gilt $\det(R) = 1$ und $R^T R = \mathbf{1}$. Bezeichne $R_{\vec{\omega}}$ mit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\vec{\omega}/\,|\vec{\omega}|$.

(a) Geben Sie die Matrix für eine Drehung um die x_3-Achse mit dem Drehwinkel α an.

Eine unitäre Darstellung D der Drehgruppe auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ der quantenmechanischen Zuständen $|\psi\rangle$ kann im Ortsraum definiert werden durch

$$D(R_{\vec{\omega}})\psi(\vec{x}) = \psi\left(R_{\vec{\omega}}^{-1}\vec{x}\right) \tag{3}$$

für $R_{\vec{\omega}} \in SO(3)$.

(b) Zeigen Sie die sog. Darstellungseigenschaft

$$D(R_{\vec{\omega_1}} \cdot R_{\vec{\omega_2}}) = D(R_{\vec{\omega_1}})D(R_{\vec{\omega_2}})\,. \tag{4}$$

(c) Man kann allgemein zeigen

$$D(R_{\vec{\omega}}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{\mathbf{L}}\right)\,, \tag{5}$$

d. h. die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind gerade die Generatoren der Drehungen auf den quantenmechanischen Zuständen. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang für den Fall einer Drehung um die x_3-Achse.
Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Funktionensystem.

(d) Zeigen Sie, daß die Abbildung $D(R_{\vec{\omega}})$ unitär ist.

H 26 Lenzscher Vektor (optional) (+3 Punkte)

Im klassischen Kepler–Problem gibt es eine Erhaltungsgröße, die als Lenzscher Vektor bekannt ist. Man kann ein quantenmechanisches Analogon $\vec{\mathbf{F}}$ zum Lenzschen Vektor definieren mit den Komponenten

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{2m}\sum_{k,l}\epsilon_{jkl}(\mathbf{P}_k\mathbf{L}_l - \mathbf{L}_k\mathbf{P}_l) - \frac{Ze_0^2}{\left|\vec{\mathbf{Q}}\right|}\mathbf{Q}_j\,. \tag{6}$$

Zeigen Sie, daß die Komponenten von $\vec{\mathbf{F}}$ mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ des Coulomb–Problems

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^{\,2}}{2m} - \frac{Ze_0^2}{\left|\vec{\mathbf{Q}}\right|} \tag{7}$$

kommutieren, $[\mathbf{F}_i, \mathbf{H}] = 0$.

H 27 Landau-Niveaus (6 Punkte)

Wir wollen die Bewegung eines Elektrons in einem konstanten Magnetfeld untersuchen, wobei wir den Spin des Elektrons vernachlässigen. Das Magnetfeld sei entlang der z-Richtung orientiert, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Zeigen Sie, daß das Vektorpotential gewählt werden kann als $\vec{A} = (0, Bx, 0)$, d. h. daß $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

(a) (optional) (+1 Punkt)
Aus der Vorlesung wissen Sie, daß für ein konstantes Magnetfeld $\vec{B}$ auch die Wahl $\vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}$ möglich ist. Zeigen Sie, daß sich dieses und das oben genannte Potential nur um ein Gradientenfeld (bzw. eine Eichtransformation) unterscheiden.

(b) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{P}} + \frac{e_0}{c}\vec{A}\right)^2 \tag{8}$$

sowohl mit der y- als auch mit der z-Komponente des Impulsoperators kommutiert. Die Eigenzustände von $\mathbf{H}$ können daher mit dem Separationsansatz $\psi(x,y,z) = \nu(x)f(y)g(z)$ gefunden werden. Geben Sie die Funktionen f und g an. Wir wollen $g(z)$ so wählen, daß der Eigenwert zu $\mathbf{P}_z$ gerade 0 ist.

(c) Leiten Sie eine Eigenwertgleichung für $\nu(x)$ her und führen Sie diese auf die Eigenwertgleichung für die Energie eines harmonischen Oszillators zurück.

(d) Lesen Sie das Energiespektrum ab. Die aus der Gleichung für ν resultierenden Energieniveaus heißen Landau–Niveaus.

H 28 Umlaufzahl und Polarwinkelform (4 Punkte)

Wir wollen im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$\vec{A}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \tag{9}$$

betrachten.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} \tag{10}$$

und $\vec{A} = \vec{\nabla} f(x,y)$ mit $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

(b) Man kann zeigen, daß für jede geschlossene Kurve C

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{ds} = 2\pi n\,, \tag{11}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl des Weges C um den Ursprung bezeichnet. Überprüfen Sie dies an Beispielen (etwa für geeignete Kreiswege).

Bemerkung: Wegen dieses Resultats wird $\theta = \vec{A} \cdot \vec{ds}$ als Polarwinkelform bezeichnet. In der nächsten Übung werden wir sehen, daß diese in der Quantenmechanik eine wichtige Anwendung beim Aharonov–Bohm–Effekt findet.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/qm01.html