Institut für Theoretische Physik
H. G. Dosch

Universität Heidelberg
Sommersemester 2001

8. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der Hausübungen: 27. Juni vor der Vorlesung
Besprechung der Präsenzübungen: 22. Juni

P 29 Zeeman-Effekt für Teilchen ohne Spin (3 Punkte)

Wir wollen das Wasserstoff–Atom in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ betrachten. Der Hamiltonoperator hat die Form

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze_0^2}{r} - \frac{e_0}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\mathbf{L}} + \frac{e_0^2}{8mc^2}\left|\vec{x}\times\vec{B}\right|^2 . \tag{1}$$

Der dritte Term trägt zum Paramagnetismus des Atoms bei, der letzte zum Diamagnetismus. Wir wollen das Magnetfeld in z-Richtung wählen, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Für schwache Magnetfelder kann der quadratische (diamagnetische) Term vernachlässigt werden.

(a) Schätzen Sie das Verhältnis des quadratischen und des linearen Terms in B ab. *Hinweis:* Nehmen Sie an, daß $|\vec{x}|$ etwa dem Bohrschen Radius a entspricht, und setzen Sie $\langle \mathbf{L}_3 \rangle \simeq \hbar$.

(b) Wir wollen nun den Fall schwacher Magnetfelder untersuchen, den sog. (normalen) Zeeman–Effekt. Wir vernachlässigen also den quadratischen Term in B. Zeigen Sie, daß die bekannten Eigenzustände ψ_{nlm} des Coulomb–Problems auch Eigenzustände zu $\mathbf{H}$ sind und geben Sie das Energiespektrum an.

Bemerkung: Der Zeeman–Effekt ist ein Beispiel für Störungstheorie mit Entartung. Durch die Störung wird die Entartung der Zustände mit verschiedener magnetischer Quantenzahl m vollständig aufgehoben. Die Entartung stellt beim Zeeman–Effekt kein zusätzliches Problem dar, da die Störung bezüglich der Eigenzustände ψ_{nlm} des ungestörten Coulomb–Potentials bereits diagonal ist.

H 30 Aharonov-Bohm-Effekt (5 Punkte)

Elektronen aus einer Quelle bei $\vec{x}_0$ treffen auf eine Doppelspaltanordnung, hinter der ein Schirm aufgestellt ist. Zwischen den beiden Spalten ist sei eine (unendlich lange) Spule parallel zu den Spalten angebracht, die ein Magnetfeld erzeugt, das auf das Innere der Spule beschränkt ist. Die Spule sei derart abgeschirmt, daß die Elektronen nicht in das Magnetfeld eindringen können.

Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Elektrons im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{P}} + \frac{e_0}{c}\vec{A}\right)^2 , \tag{2}$$

wobei $-e_0$ die Elektronladung und $\vec{A}$ ein Vektorpotential für $\vec{B}$ ist, d, h. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Zeigen Sie zunächst, daß das Vektorpotential ($A \in \mathbb{R}$)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left(-\frac{Ax_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{Ax_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right) \tag{3}$$

das Magnetfeld obiger Versuchsanordnung beschreibt. Zeigen Sie weiter, daß

$$\psi_B(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{ie_0}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A} \cdot \vec{ds}\right) \psi_0(\vec{x}) \tag{4}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung mit Magnetfeld ist, wenn $\psi_0(\vec{x})$ eine Lösung der Schrödingergleichung ohne Feld ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe H 28, daß sich das Interferenzmuster auf dem Schirm ändert, wenn das Magnetfeld in der Spule ein- bzw. ausgeschaltet wird.

H 31 Anharmonischer Oszillator (5 Punkte)

Der eindimensionale anharmonische Oszillator ist gegeben durch den Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + W(x) , \tag{5}$$

worin $W(x)$ ein Polynom in x ist.

(a) Berechnen Sie für den speziellen Fall ($C \in \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}_+$)

$$W(x) = Cx^3 + Dx^4 \tag{6}$$

die Energieverschiebung der Niveaus des harmonischen Oszillators in Störungstheorie 1. Ordnung. Bleibt das Spektrum unter Einfluß der Störung äquidistant?

Hinweis: Drücken Sie die Störung mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren $\mathbf{A}^\dagger$ und $\mathbf{A}$ aus. Beachten Sie, daß der Erwartungswert eines Produkts dieser Operatoren in einem reinen Zustand des ungestörten harmonischen Oszillators nur dann nicht verschwindet, wenn in dem Produkt gleich viele Auf- und Absteigeoperatoren auftreten.

(b) (optional) (+3 Punkte)

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{7}$$

mit der kleinen Störung ($\epsilon \ll 1$)

$$\mathbf{W} = W(x) = \frac{1}{2}\epsilon m\omega^2 x^2 \,. \tag{8}$$

Geben Sie zunächst die exakte Lösung an und entwickeln sie die Energieeigenwerte in eine Potenzreihe in ϵ. Berechnen Sie dann die Energieverschiebung in Störungstheorie bis zur 2. Ordnung und vergleichen Sie mit dem ersten Ergebnis.
Hinweis: Beachten Sie, daß in 2. Ordnung nur zwei andere Niveaus zur Energieverschiebung des n-ten Niveaus beitragen (welche?).

H 32 Alkali-Atome (5 Punkte)

In einem Alkali–Atom wird die Kernladung durch die Elektronen gefüllter Schalen abgeschirmt, so daß das effektive Potential für das Leuchtelektron die Form

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{e_0^2}{r}\left(1 + (Z-1)\chi(r)\right) \tag{9}$$

hat, wobei χ eine monoton fallende Funktion ist mit $\chi(r) \geq 0$, $\chi(0) = 1$ und $\chi(\infty) = 0$. Ein möglicher Ansatz für diese Abschirmfunktion ist z. B. $\chi(r) = \exp(-r/a)$. Im folgenden wollen wir den Spin des Elektrons vernachlässigen.

(a) Geben Sie die Ausdrücke für die Energie des Leuchtelektrons mit der Hauptquantenzahl $n > 1$ in Störungstheorie 1. Ordnung an, indem Sie die Abweichung vom Coulombpotential als Störung betrachten. (Hier ist keine Rechnung erforderlich.)

(b) Zeigen Sie, daß die Störung (d. h. die Energieverschiebung) diagonal in den Quantenzahlen l und m ist.

(c) Argumentieren Sie, daß der Zustand mit $l = 0$ am tiefsten und daß der Zustand mit $l = n - 1$ am höchsten liegt. Betrachten Sie hierzu die Störung in erster Ordnung. (Es ist keine Rechnung erforderlich, eine Skizze kann dagegen helfen.)

(d) Bestimmen Sie das Verhalten der exakten Lösung am Ursprung.

(e) (optional) (+6 Punkte)
Schätzen Sie für das Leuchtelektron des Natrium–Atoms die Aufspaltung zwischen der s-Welle und der p-Welle des Grundzustands ab. Benutzen Sie hierzu in der Störung $\chi(r) = \exp(-r/a)$. (Es bietet sich an, für die hier auftretenden Integrale z. B. Mathematica oder Maple zu benutzen.)

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/qm01.html