Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, E. Thommes

Universität Heidelberg
Sommersemester 2010

# 10. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 22.06.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 17./18.06.2010

**P 33 Drehimpulsalgebra II** (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß der Drehimpulsoperator mit dem Quadrat des Impulsoperators und mit dem Quadrat des Ortsoperators kommutiert, $[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{P}}^2] = 0$ und $[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{Q}}^2] = 0$.

(b) Berechnen Sie $\left(\mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2\right) Y_{lm}$.

**S 34 Drehimpuls und Darstellung der Drehgruppe** (5 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen in drei Dimensionen. Für eine Drehung $R \in SO(3)$ gilt $\det(R) = 1$ und $R^T R = \mathbf{1}$. Bezeichne $R_{\vec{\omega}}$ mit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\vec{\omega}/\,|\vec{\omega}|$.

(a) Geben Sie die Matrix für eine Drehung um die $x_3$-Achse mit dem Drehwinkel $\alpha$ an.

Eine unitäre Darstellung $D$ der Drehgruppe auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ der quantenmechanischen Zuständen $|\psi\rangle$ kann im Ortsraum definiert werden durch

$$D(R_{\vec{\omega}})\psi(\vec{x}) = \psi\left(R_{\vec{\omega}}^{-1}\vec{x}\right) \tag{1}$$

für $R_{\vec{\omega}} \in SO(3)$.

(b) Zeigen Sie die sog. Darstellungseigenschaft

$$D(R_{\vec{\omega}_1} \cdot R_{\vec{\omega}_2}) = D(R_{\vec{\omega}_1})D(R_{\vec{\omega}_2})\,. \tag{2}$$

(c) Man kann allgemein zeigen

$$D(R_{\vec{\omega}}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega}\cdot\vec{\mathbf{L}}\right)\,, \tag{3}$$

d. h. die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind gerade die Generatoren der Drehungen auf den quantenmechanischen Zuständen. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang für den Fall einer Drehung um die $x_3$-Achse.
*Hinweis:* Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Funktionensystem.

(d) Zeigen Sie, daß die Abbildung $D(R_{\vec{\omega}})$ unitär ist.

**S 35 Herleitung der Pauli-Matrizen** (optional, +5 Punkte)

Wir wollen die bekannte Form der Pauli-Matrizen für den Drehimpuls $j = 1/2$ aus den allgemeinen Eigenschaften des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{J}}$ herleiten. Wir betrachten die Zustände $\left|\phi_j^m\right\rangle$, die Eigenzustände zu $\vec{\mathbf{J}}^2$ und $\mathbf{J}_3$ sind,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}^2 \left|\phi_j^m\right\rangle &= j(j+1)\hbar^2 \left|\phi_j^m\right\rangle && (4) \\ \mathbf{J}_3 \left|\phi_j^m\right\rangle &= m\hbar \left|\phi_j^m\right\rangle . && (5) \end{aligned}$$

Für die Operatoren $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_+ \left|\phi_j^m\right\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\hbar \left|\phi_j^{m+1}\right\rangle && (6) \\ \mathbf{J}_- \left|\phi_j^m\right\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\hbar \left|\phi_j^{m-1}\right\rangle . && (7) \end{aligned}$$

Für den Drehimpuls $j = 1/2$ kann $m$ die Werte $-1/2$ und $+1/2$ annehmen. Wir identifizieren

$$\left|\phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \left|\phi_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Für den Fall $j = 1/2$ schreibt man überlicherweise $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\boldsymbol{\sigma}}$. Leiten Sie aus den obigen Bedingungen (5)-(7) die explizite Darstellung der Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}_i$ her.

**S 36 Sphärischer Potentialtopf** (7+3 Punkte)

Wir wollen den dreidimensionalen sphärischen Potentialtopf unendlicher Tiefe untersuchen. Das Potential ist also mit $R > 0$

$$V(|\vec{x}|) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\vec{x}| < R \\ \infty & \text{für } R \leq |\vec{x}| . \end{cases} \tag{9}$$

Wir wollen im folgenden Energieeigenwerte $E > 0$ und zugehörige Eigenfunktionen bestimmen.

(a) Geben Sie den Hamiltonoperator für die Bewegung eines Teilchens der Masse $m$ in diesem Potentialtopf an.

(b) Setzen Sie die Lösung im Ortsraum unter Verwendung von Kugelkoordinaten an als

$$\psi(r, \vartheta, \phi) = f_l(r) Y_{lm}(\vartheta, \phi) . \tag{10}$$

Sei $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Zeigen Sie, daß der obige Ansatz eine Lösung der Energieeigenwertgleichung ist, falls $g_l(z) = f_l(r/k)$ der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d}{dz} - \frac{l(l+1)}{z^2} + 1\right] g_l(z) = 0 \tag{11}$$

genügt. Diese Differentialgleichung ist als (sphärische) Besselsche Differentialgleichung bekannt. Ihre Lösungen sind die (sphärischen) Bessel-Funktionen $j_l(z)$ und Neumann-Funktionen $n_l(z)$.

(c) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0(z) = \frac{\cos z}{z} \tag{12}$$

Lösungen der Differentialgleichung (11) für $l = 0$ sind.

(d) Zeigen Sie, daß $j_0$ im Ursprung regulär ist und daß $n_0$ im Ursprung nicht regulär ist. Warum muß die Lösung $n_0$ bei unserem Problem ausgeschlossen werden?

(e) Finden Sie die möglichen Energiewerte $E$ für den Fall $l = 0$. Verwenden sie hierbei ausschließlich die Lösung $j_0$.

(f) (optional) (+3 Punkte)
Zeigen Sie, daß

$$j_1(z) = \frac{1}{z} j_0(z) - n_0(z) \qquad \text{und} \qquad n_1(z) = \frac{1}{z} n_0(z) + j_0(z) \tag{13}$$

die Differentialgleichung (11) für $l = 1$ lösen. Zeigen Sie, daß $j_1$ im Gegensatz zu $n_1$ regulär im Ursprung ist. Finden Sie für $l = 1$ eine Bedingung für die möglichen Energieeigenwerte.

**S 37 Lenzscher Vektor** (optional, +6 Punkte)

Im klassischen Kepler-Problem gibt es eine Erhaltungsgröße, die als Lenzscher Vektor bekannt ist. Man kann ein quantenmechanisches Analogon $\vec{\mathbf{F}}$ zum Lenzschen Vektor definieren mit den Komponenten

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{2m} \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} (\mathbf{P}_k \mathbf{L}_l - \mathbf{L}_k \mathbf{P}_l) - \frac{Z e_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|} \mathbf{Q}_j \,. \tag{14}$$

Zeigen Sie, daß die Komponenten von $\vec{\mathbf{F}}$ mit dem Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ des Coulomb-Problems

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^{\,2}}{2m} - \frac{Z e_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|} \tag{15}$$

kommutieren, $[\mathbf{F}_i, \mathbf{H}] = 0$.

**S 38 Umlaufzahl und Polarwinkelform** (5 Punkte)

Wir wollen im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \tag{16}$$

betrachten.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} \tag{17}$$

und $\vec{A} = \vec{\nabla} f(x,y)$ mit $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

(b) Man kann zeigen, daß für jede geschlossene Kurve $C$

$$\int_C \vec{A} \cdot \vec{ds} = 2\pi n\,, \tag{18}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl des Weges $C$ um den Ursprung bezeichnet. Überprüfen Sie dies an Beispielen (etwa für geeignete Kreiswege).

*Bemerkung:* Wegen dieses Resultats wird $\theta = \vec{A} \cdot \vec{ds}$ als Polarwinkelform bezeichnet. In der nächsten Übung werden wir sehen, daß diese in der Quantenmechanik eine wichtige Anwendung beim Aharonov-Bohm-Effekt findet.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm10.html