Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, E. Thommes — Sommersemester 2010

3. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 04.05.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 29./30.04.2010

P 8 Operatoren im Hilbertraum II (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß für Spuren von Produkten von Operatoren auf dem Hilbertraum gilt $\mathrm{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA})$ und $\mathrm{tr}\,(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{CAB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BCA})$.

(b) Ein Operator $\mathbf{A}$ auf dem Hilbertraum heißt normal, wenn $\mathbf{AA}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$. Sind hermitesche Operatoren normal? Sind unitäre Operatoren normal?

(c) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$. Sei weiter ein vollständiges System von Eigenzuständen von $\mathbf{A}$ gegeben durch $|\psi_n\rangle$, die zugehörigen Eigenwerte seien a_n. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß das Spektrum von $\mathbf{A}$ nicht entartet ist, d. h. $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$. Betrachten Sie die Matrixelemente von $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ und schließen Sie, daß $\mathbf{B}$ diagonal in der Basis $|\psi_n\rangle$ ist. Zeigen Sie, daß die $|\psi_n\rangle$ auch Eigenzustände von $\mathbf{B}$ sind.
Hinweis: Ergänzen Sie im Ausdruck $\mathbf{B}\,|\psi_l\rangle$ zwei vollständige Systeme.

S 9 Projektionsoperatoren (6 Punkte)

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und darin $\{|\psi_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren einer Observablen $\mathbf{A}$ mit nicht-entarteten Eigenwerten a_i. Jeder beliebige Zustand besitzt also eine eindeutige Darstellung der Form $|\psi\rangle = \sum_i c_i|\psi_i\rangle$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{1} = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \qquad \text{und} \qquad \mathbf{A} = \sum_i a_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\,, \tag{1}$$

indem Sie die Wirkung dieser Operatoren auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ untersuchen.

Ein Operator $\mathbf{P}$ heißt Projektionsoperator, wenn $\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Operatoren

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A}) = \prod_{j\neq i} \frac{\mathbf{A} - a_j}{a_i - a_j} \tag{2}$$

Projektionsoperatoren sind.

(c) Zeigen Sie, daß die Operatoren $\mathbf{P}_i(\mathbf{A})$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A})\mathbf{P}_j(\mathbf{A}) = \delta_{ij}\mathbf{P}_j(\mathbf{A}) \qquad \text{und} \qquad \sum_i \mathbf{P}_i(\mathbf{A}) = 1\,. \tag{3}$$

(d) Zeigen Sie, daß auch $\mathbf{P}_i(\mathbf{A}) = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ eine mögliche Darstellung der obigen Projektionsoperatoren ist.

S 10 Kommutatoralgebra (optional, +7 Punkte)

Wir betrachten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$.

(a) Zeigen Sie $[\mathbf{AB},\mathbf{C}] = \mathbf{A}\,[\mathbf{B},\mathbf{C}] + [\mathbf{A},\mathbf{C}]\,\mathbf{B}$ und $[\mathbf{A},\mathbf{BC}] = \mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}] + [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{C}$.

Im folgenden wollen wir annehmen, daß die Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, d. h. $[[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,,\mathbf{A}] = 0$ und $[[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,,\mathbf{B}] = 0$.

(b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}^n] = n\mathbf{B}^{n-1}\,[\mathbf{A},\mathbf{B}] \qquad \text{und} \qquad [\mathbf{A}^n,\mathbf{B}] = n\mathbf{A}^{n-1}\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]\;. \tag{4}$$

(c) Wir definieren die Funktion $F(\lambda)$ der Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ durch

$$F(\lambda) = e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})}\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie, daß $\frac{d}{d\lambda}F(\lambda) = \lambda\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,F(\lambda)$ ist. Folgern Sie durch Integration dieser Differentialgleichung daß

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]} \qquad \text{und} \qquad e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}e^{[\mathbf{A},\mathbf{B}]}\,. \tag{6}$$

Bemerkung:
Die letzteren Formeln sind Spezialfälle der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, wonach für zwei allgemeine Operatoren $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ gilt

$$e^{\mathbf{C}}e^{\mathbf{D}} = e^{\mathbf{C}+\mathbf{D}+Z(\mathbf{C},\mathbf{D})} \tag{7}$$

mit

$$Z(\mathbf{C},\mathbf{D}) = \frac{1}{2}\,[\mathbf{C},\mathbf{D}] + \frac{1}{12}\,[\mathbf{C},[\mathbf{C},\mathbf{D}]] - \frac{1}{12}\,[\mathbf{D},[\mathbf{C},\mathbf{D}]] + \cdots\,, \tag{8}$$

worin die weiteren Terme höhere Kommutatoren enthalten. Insbesondere ist also im allgemeinen $e^{\mathbf{C}}e^{\mathbf{D}} \neq e^{\mathbf{C}+\mathbf{D}}$.
Der oben betrachtete Fall, daß zwei Operatoren jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, tritt in der Quantenmechanik oft auf, etwa wenn der Kommutator eine komplexe Zahl ist – wie z. B. beim Kommutator von Orts- und Impulsoperator.

S 11 Zwei-Zustand-System (10 Punkte)

Wir betrachten ein System mit einem diskreten Freiheitsgrad, d. h. die möglichen Zustände können durch Zustandsvektoren in $\mathbb{C}^2$ beschrieben werden. Eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ ist gegeben durch

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Das System sei beschrieben durch $|\psi\rangle = a\,|u\rangle + b\,|d\rangle$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Die Dynamik des Systems sei durch den Hamilton-Operator

$$\mathbf{H} = -\frac{\mu B}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = -\mu B \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \right] \tag{10}$$

gegeben, worin $\boldsymbol{\sigma}_i$ die Pauli-Matrizen sind:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}_1]$.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenzustände von $\mathbf{H}$ und $\boldsymbol{\sigma}_1$.

(c) Geben Sie die Zeitentwicklung der Eigenzustände des Hamilton-Operators an.

(d) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Eigenzustand zum positiven Eigenwert von $\boldsymbol{\sigma}_1$. In welchem Zustand ist das System zum Zeitpunkt $t = T > 0$, und welchen Erwartungswert hat dann $\boldsymbol{\sigma}_1$?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm10.html