Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, E. Thommes

Universität Heidelberg
Sommersemester 2010

5. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 18.05.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 14.05.2010

P 16 Statistischer Operator (5 Punkte)

Wir betrachten ein Zwei-Zustand-System mit Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$ ist

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\;\; |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;. \tag{1}$$

Der Zustand $|\psi_\alpha\rangle$ sei gegeben durch

$$|\psi_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\alpha} |+\rangle + e^{i\beta} |-\rangle \right) \tag{2}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß der statistische Operator zum reinen Zustand $|\psi_\alpha\rangle$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{\rho}(\psi_\alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{i(\beta-\alpha)} & 1 \end{pmatrix} \;. \tag{3}$$

Hinweis: Es gilt (warum?)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c, d) = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \;. \tag{4}$$

(b) Zeigen Sie, daß $\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\rho}(\psi_\alpha)] = 1$ und $\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{\rho}^2(\psi_\alpha)] = 1$.

(c) Zeigen Sie, daß für den gemischten Zustand

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{gem}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\rho}(\psi_\alpha)\, d\alpha \tag{5}$$

zwar wieder $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{gem}} = 1$, aber $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{gem}}^2 < 1$.

S 17 Gaußsches Wellenpaket (5 Punkte)

Wir wollen ein freies Teilchen in einer Dimension betrachten. Zu einem festen Zeitpunkt (z. B. $t = 0$) sei der Zustand $\psi(x)$ gegeben durch

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\, \phi(k)\,, \tag{6}$$

wobei mit $a \in \mathbb{R}$

$$\phi(k) = A e^{-a^2 k^2}\,. \tag{7}$$

Bestimmen Sie A so, daß $\langle \phi \mid \phi \rangle = 1$. Seien $\mathbf{Q}$ der Orts- und $\mathbf{P}$ der Impulsoperator. Berechnen Sie für obigen Zustand die Erwartungswerte $\langle \mathbf{Q} \rangle$, $\left\langle \mathbf{Q}^2 \right\rangle$, $\langle \mathbf{P} \rangle$, $\left\langle \mathbf{P}^2 \right\rangle$, und das Schwankungsprodukt $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$, wobei allgemein $(\Delta\mathbf{A}) = \sqrt{(\Delta\mathbf{A})^2}$. Vergleichen Sie mit der in Aufg. 5 hergeleiteten Unschärferelation.

Hinweis: Es gilt für $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,, \tag{8}$$

und weitere nützliche Integrale können hieraus durch Ableiten nach λ gewonnen werden.

S 18 Ehrenfest-Theorem (4 Punkte)

Sei $\psi_t(x) = \psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung im Ortsraum. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\,, \tag{9}$$

und ψ sei normiert, $\langle \psi_t \mid \psi_t \rangle = 1$. Wir bezeichnen die Erwartungswerte von Orts– und Impulsoperator im Zustand $\psi(\vec{x}, t)$ mit

$$\vec{X}(t) = \langle \psi_t \mid \mathbf{Q}\psi_t \rangle = \langle \mathbf{Q} \rangle (t) \tag{10}$$

$$\vec{P}(t) = \langle \psi_t \mid \mathbf{P}\psi_t \rangle = \langle \mathbf{P} \rangle (t)\,. \tag{11}$$

Zeigen Sie, daß diese Erwartungswerte die folgenden Bewegungsgleichungen (die Ehrenfestschen Gleichungen) erfüllen:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \frac{1}{m}\vec{P}(t)\,, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = -\left\langle \psi_t \,\middle|\, \left(\vec{\nabla} V(\vec{x})\right) \psi_t \right\rangle\,. \tag{13}$$

Hinweis:
Betrachten Sie zunächst allgemein $\frac{d}{dt}\langle \mathbf{A} \rangle$ für einen selbstadjungierten und im allgemeinen zeitabhängigen Operator $\mathbf{A}$. Zeigen Sie dann zum Beweis von Gl. (12) zunächst $\left[\mathbf{C}, \mathbf{D}^2\right] = \mathbf{D}\,[\mathbf{C}, \mathbf{D}] + [\mathbf{C}, \mathbf{D}]\,\mathbf{D}$ für zwei Operatoren $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$.

S 19 Harmonischer Oszillator (6 Punkte)

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Der Absteigeoperator $\mathbf{A}$ ist definiert (vgl. Vorlesung) als

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\mathbf{Q}} + i\hat{\mathbf{P}} \right) , \tag{14}$$

worin mit der Masse m, einer Konstanten ω und $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{b} , \qquad \hat{\mathbf{P}} = \frac{b}{\hbar}\mathbf{P} . \tag{15}$$

Es wird definiert $\mathbf{N} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$. Der Hamiltonoperator ist dann

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} \right) . \tag{16}$$

Die normierten Eigenzustände von $\mathbf{N}$ zu den Eigenwerten $\nu \in \mathbb{N}$ seien $|\psi_\nu\rangle$.

(a) Berechnen Sie $[\mathbf{N}, \mathbf{A}]$ und $\left[\mathbf{N}, \mathbf{A}^\dagger\right]$.

(b) Zeigen sie, daß $\mathbf{A}^\dagger |\psi_\nu\rangle = \sqrt{\nu + 1}\, |\psi_{\nu+1}\rangle$ und

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^n |\psi_0\rangle = \sqrt{n!}\, |\psi_n\rangle . \tag{17}$$

(c) Zeigen Sie

$$\langle \psi_n \,|\, \mathbf{Q}\psi_n \rangle = 0 , \qquad \langle \psi_n \,|\, \mathbf{P}\psi_n \rangle = 0 \tag{18}$$

und berechnen Sie das Schwankungsprodukt $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$ im reinen Zustand $|\psi_n\rangle$.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm10.html