Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, E. Thommes

Universität Heidelberg
Sommersemester 2010

6. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 25.05.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 20./21.05.2010

P 20 Harmonischer Oszillator II (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie den ersten angeregten Zustand $\psi_1(x)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators aus der Wellenfunktion $\psi_0(x)$ des Grundzustands.

(b) Betrachten Sie den isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillator. Die Eigenzustände sind $|\psi_{n_1,n_2,n_3}\rangle = |\psi_{n_1}\rangle \otimes |\psi_{n_2}\rangle \otimes |\psi_{n_3}\rangle$. Der dreidimensionale Ortsoperator sei $\vec{\mathbf{Q}} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3)$.

Wann ist

$$\left\langle \psi_{n_1,n_2,n_3} \,\middle|\, \mathbf{Q}_i \psi_{n_1',n_2',n_3'} \right\rangle \neq 0 \tag{1}$$

und welchen Wert hat dieser Ausdruck dann?

(c) Der Hamiltonoperator des *anisotropen* dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{m\omega_i^2}{2} x_i^2 \,, \tag{2}$$

wobei ω_i drei Konstanten sind. Geben Sie die möglichen Zustände des Systems und deren Energieniveaus an. (Der eindimensionale harmonische Oszillator darf hier als bekannt vorausgesetzt werden.)

S 21 Kohärenter Zustand im harmonischen Oszillator (5 Punkte)

Die normierten Energieeigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators seien $|\psi_n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für $c \in \mathbb{C}$ sei ein Zustand gegeben durch

$$|\phi\rangle = e^{-\frac{|c|^2}{2}} \exp\left(c\mathbf{A}^\dagger\right) |\psi_0\rangle \;, \tag{3}$$

wobei wir die Operatoren aus Aufg. 19 verwenden.

(a) Zeigen Sie, daß $|\phi\rangle$ normiert ist, d. h. $\langle \phi \mid \phi \rangle = 1$.

(b) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeiten $|\langle \psi_n \mid \phi \rangle|^2$ einer Poisson-Verteilung folgen:

$$|\langle \psi_n \mid \phi \rangle|^2 = \frac{N^n}{n!} e^{-N} \,. \tag{4}$$

Welchen Wert hat N? Welche Wahrscheinlichkeit gibt $|\langle \psi_n \mid \phi \rangle|^2$ an?

(c) Zeigen Sie, daß $|\phi\rangle$ ein Eigenzustand zum Absteigeoperator $\mathbf{A}$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

Zur Bedeutung: Der Zustand $|\phi\rangle$ ist ein sog. kohärenter Zustand. Solche Zustände spielen u. a. in der Quantenoptik eine wichtige Rolle, z. B. bei Lasern.

S 22 Spezifische Wärme des Festkörpers nach Einstein (5 Punkte)

In der statistischen Mechanik findet man, daß der Dichteoperator $\boldsymbol{\rho}$ für einen harmonischen Oszillator im Wärmebad der Temperatur T berechnet werden kann als

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathbf{H}) \,, \tag{5}$$

worin $\beta = (kT)^{-1}$, k die Boltzmann-Konstante und $Z = \mathrm{tr}\,[\exp(-\beta \mathbf{H})]$ die kanonische Zustandssumme sind. $\mathbf{H}$ ist der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators (siehe Aufg. 19). Zeigen Sie, daß der Mittelwert der Energie sich ergibt als

$$\bar{E} = \langle \mathbf{H} \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \,. \tag{6}$$

Berechnen Sie Z (Hinweis: geometrische Reihe) und daraus die mittlere Energie $\bar{E}$ als Funktion von β. Bestimmen Sie weiter die spezifische Wärme des harmonischen Oszillators, $C_V(T) = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T}$. Diskutieren Sie die Grenzwerte kleiner und großer Temperaturen und skizzieren Sie C_V als Funktion der Variablen $\tau = \frac{kT}{\hbar\omega}$.

Zur Interpretation:
Die Gitterschwingungen eines Festkörpers (die Phononen) können als unabhängige Oszillatoren aufgefaßt werden. Ihre Zahl ist durch die Zahl N der Gitterpunkte (d. h. der Atome) und durch die Raumdimension gegeben. In drei Dimensionen hat ein Kristallgitter demzufolge $3N$ unabhängige Schwingungsmoden. Einsteins Annahme dabei war, daß diese Schwingungen alle durch harmonische Oszillatoren *gleicher Kreisfrequenz* ω realisiert sind. Die spezifische Wärme des Festkörpers kann dann analog zu unserer obigen Rechnung bestimmt werden, das Ergebnis ist dasselbe bis auf einen zusätzlichen Faktor $3N$. Einsteins Resultat gibt die spezifische Wärme eines typischen Festkörpers qualitativ gut wieder und ist verträglich mit dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik. Debye verbesserte die Einsteinsche Theorie der spezifischen Wärme noch, indem er statt einer *festen* Kreisfrequenz der Oszillatoren ein *kontinuierliches Frequenzspektrum* der Schwingungsmoden unterhalb eines cut-off ω_D annahm.

S 23 Gaußsches Wellenpaket II (5 Punkte)

Ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$\psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \, e^{ikx} \, \phi(k) \,, \tag{7}$$

wobei mit $a, k_0 \in \mathbb{R}$

$$\phi(k) = \left(\frac{2a^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-a^2 (k-k_0)^2} \,. \tag{8}$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2} + ik_0 x \right) \,. \tag{9}$$

Die Zeitentwicklung des Wellenpakets ist gegeben durch

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar} \right) \psi(x, t = 0) \,, \tag{10}$$

worin $\mathbf{H}$ der Hamiltonoperator für die freie Bewegung eines Teilchens der Masse m ist.

(b) Zeigen Sie, daß sich hieraus

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + i\frac{t}{\tau}}} \exp\left(\frac{-\frac{x^2}{4a^2} + ik_0 x - ia^2 k_0^2 \frac{t}{\tau}}{1 + i\frac{t}{\tau}} \right) \tag{11}$$

mit $\tau = 2ma^2/\hbar$ ergibt.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$.
Hinweis: Das Ergebnis von Teil (a) kann hier verwendet werden. Es bietet sich an, die Abkürzung $\tilde{a}^2 = a^2(1 + t^2/\tau^2)$ zu verwenden.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm10.html