Gribovs Gleichung für die Green-Funktion leichter Quarks

von

Carlo Ewerz

Diplomarbeit in Physik

angefertigt im
Institut für Theoretische Kernphysik

vorgelegt der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität
zu Bonn

im Januar 1995

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Dr. D. Schütte
Koreferent: Prof. Dr. V. N. Gribov

Inhalt

Einführung und Überblick

Das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung beschreibt mit großer Präzision die zwischen den fundamentalen Bausteinen der Materie wirkenden Kräfte. Die Voraussagen des Standardmodells sind in vielfältiger Weise experimentell überprüft und bestätigt worden. Damit ist es gelungen, die Vielfalt der Phänomene der Teilchenphysik auf wenige grundlegende Symmetrieprinzipien zurückzuführen und mit wenigen Parametern zu beschreiben.

Trotz der großen Erfolge des Standardmodells sind bis heute viele experimentelle und theoretische Fragen offen geblieben. Hierzu gehört auch die Herleitung vieler Niederenergiephänomene der starken Wechselwirkung aus der Quantenchromodynamik, der im Standardmodell enthaltenen fundamentalen Eichtheorie der starken Wechselwirkung. So ist es bisher nicht gelungen, aus der Quantenchromodynamik das Confinement abzuleiten, also die Tatsache, daß Quarks und Gluonen nicht als freie Teilchen beobachtet werden können.

Diesem Problem widmet sich ein Vorschlag von V.N. Gribov. Seine grundlegende Idee ist, daß Farbladungen durch Vakuumpolarisation überkritisch und damit letztlich instabil werden. In Anwesenheit überkritischer Ladungen ist das übliche Dirac–Bild zur Beschreibung des fermionischen Vakuums nicht mehr geeignet und muß modifiziert werden. Überkritische Ladungen sind schon lange in der Quantenelektrodynamik bekannt. Die Situation tritt dort aber nur für Elektronen im äußeren Feld eines schweren Kerns auf. In der Quantenchromodynamik dagegen ist schon die Wechselwirkung leichter Quarks überkritisch, was die quantitative Beschreibung gegenüber der Quantenelektrodynamik erschwert.

Meine Diplomarbeit befaßt sich mit der Analyse der von Gribov im Zusammenhang mit seiner Theorie vorgeschlagenen Gleichung. Die Gleichung beschreibt näherungsweise die Green–Funktion leichter Quarks. Mit deren analytischen Eigenschaften sollte das Confinement eng verbunden sein. So entsprechen Pole der Green–Funktion bei zeitartigen Viererimpulsen der Propagation eines Teilchens. In einer Theorie mit Confinement wird man erwarten, daß die Green–Funktion, die die Quarks beschreibt, gerade solche Pole nicht hat. Ein zentraler Bestandteil meiner Arbeit ist daher die Untersuchung der analytischen Struktur der Lösungen, die die von Gribov vorgeschlagene Gleichung besitzt.

Im einführenden *Kapitel 1* beschreibe ich einige Aspekte der Quantenchromodynamik, insbesondere das Confinement. Hier stelle ich die physikalischen Grundgedanken von Gribovs Theorie vor.

Die beiden folgenden Kapitel behandeln den Versuch der quantitativen Beschreibung der Theorie. In *Kapitel 2* untersuche ich die von Gribov vorgeschlagene Gleichung zur Beschreibung der Green–Funktion leichter Quarks. Eine Erweiterung dieser Gleichung durch Mesonkorrekturen wird in *Kapitel 3* dargestellt und untersucht. Wie ich zeige, resultiert aus dem Verlauf der Lösungen bei raumartigen Impulsen ein spezielles Verhalten der dynamischen Massenfunktion, das zu einer Serie von Phasenübergängen führt. Ich klassifiziere in beiden Fällen die möglichen Lösungen der Gleichung und beschreibe deren analytische Eigenschaften. Meine Untersuchungen sind in diesen Abschnitten zum großen Teil numerischer Natur.

Kapitel 4 schließlich befaßt sich mit einer Gleichung für die Vertexfunktion von Mesonen, die eng mit der Gleichung für die Green–Funktion verknüpft ist und in derselben Näherung hergeleitet wird. Ich diskutiere insbesondere eine Goldstone–Lösung dieser Gleichung, die für die im vorausgehenden Kapitel untersuchten Mesonkorrekturen zur Green–Funktion von Bedeutung ist.

Kapitel 1

QCD, Confinement und Gribovs Vorschlag

In diesem Kapitel schildere ich einige Aspekte der Quantenchromodynamik (QCD) und beschreibe insbesondere das Phänomen des Confinements. Grundlage dieser Diplomarbeit ist der Vorschlag von V. N. Gribov, der einen möglichen Weg aufzeigt, das Confinement aus der QCD herzuleiten. In Abschnitt 1.3 beschreibe ich die physikalische Idee dieser Theorie. Der zentrale Teil der vorliegenden Arbeit wird aber die analytische und numerische Behandlung der mit dem Ansatz verknüpften Differentialgleichung sein. So ist dieser der physikalischen Intuition gewidmete Abschnitt als Präludium zu den folgenden Kapiteln zu verstehen.

1.1 QCD

Gemäß unserem heutigen Wissen ist die Quantenchromodynamik die richtige Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung. Sie ist die Eichtheorie der $SU(3)_c$–Farbsymmetrie, ihr liegt also eine nichtabelsche Symmetriegruppe zugrunde. Solche nichtabelschen Eichtheorien wurden erstmals 1954 von Yang und Mills diskutiert [Yang]. Eingang in die Hadronenphysik fand die Symmetriegruppe $SU(3)$ 1961 mit dem Quarkmodell von Gell–Mann und Ne'eman (s. [Gell–Mann]), hier jedoch als globale Flavor–Symmetrie der drei leichtesten (u–, d– und s–) Quarks. Mit der experimentellen Bestätigung dieser näherungsweise geltenden $SU(3)_f$–Flavorsymmetrie setzte sich mehr und mehr die Erkenntnis durch, daß Hadronen tatsächlich aus fundamentalen Partonen aufgebaut sind und diese nicht nur ein mathematischer Kunstgriff sind, auch wenn sie experimentell nicht isoliert werden konnten. Große Beachtung erlangten nichtabelsche Eichtheorien, insbesondere das Weinberg–Salam–Modell der elektroschwachen Wechselwirkung, als 't Hooft 1971 deren Renormierbarkeit beweisen konnte ['t Hooft], die *conditio sine qua non* einer vorhersagekräftigen Quantenfeldtheorie. Die QCD ging kurz darauf aus dem Quarkmodell hervor, als Fritzsch und Gell–Mann 1972 die $SU(3)_c$–Farbsymmetrie einführten [Fritzsch]. Mit der Entdeckung der asymptotischen Freiheit durch Politzer, Gross und Wilczek[1] 1973 wurde die QCD zur aussichtsreichsten Theorie der starken Wechselwirkung [Politzer, Gross]. Unter den experimentellen Fakten,

[1]Dieses Resultat war 't Hooft – zumindest für reine Yang–Mills–Eichtheorie – bereits im Sommer 1972 bekannt, wurde aber von ihm nicht publiziert.

die $SU(3)_c$ als die richtige Symmetrie bestätigen, sind besonders das R–Verhältnis[2] in e^+e^-–Kollisionen und die Pion–Lebensdauer hervorzuheben (siehe [Cheng]). Inzwischen hat sich das Bild weiter vervollständigt; die Vorhersagen der QCD sind in zahlreichen Experimenten bestätigt. Dies gilt besonders für die Tests der perturbativen QCD in tiefinelastischen Elektron–Nukleon–Streuungen. Dennoch ist man von einer Lösung der Feldgleichungen noch weit entfernt, was auf den nichtabelschen Charakter der Theorie zurückzuführen ist.[3]

Die fundamentalen Felder der QCD sind die Gluonen (die Spin 1-Eichfelder) und die in je drei Farben auftretenden Quarks (die Spin $\frac{1}{2}$-Materiefelder), von denen bisher sechs Flavors bekannt sind. Die Quarkfelder q transformieren sich unter $SU(3)_c$ gemäß der fundamentalen Darstellung, die acht Gluonenfelder A_μ^a $(a = 1, \ldots, 8)$ gemäß der adjungierten Darstellung. Die Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4} F^{a\,\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \sum_q \bar{q}\,(i \not{\mathcal{D}} - m_q)\, q\,, \tag{1.1}$$

worin sich die Summation über alle Flavors erstreckt und wobei

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g_0 f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{1.2}$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - i g_0 \frac{\lambda^a}{2} A^a_\mu\,. \tag{1.3}$$

Die hermiteschen, spurfreien Gell–Mann–Matrizen[4] λ^a bilden eine Basis der Lie–Algebra $su(3)$ mit

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda^c}{2}\,, \qquad\qquad \mathrm{tr}\,(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta_{ab}\,, \tag{1.4}$$

f_{abc} sind die $su(3)$–Strukturkonstanten. g_0 ist eine dimensionslose Konstante. m_q sind die (Strom–) Quarkmassen. In der Natur gilt $m_q \neq 0$, es wird aber auch (zumindest für die leichten Quarks) oft der theoretisch interessante chirale Limes $m_q = 0$ betrachtet. Man erwartet auch in diesem Limes, daß die Dynamik der QCD eine spontane Brechung der chiralen Symmetrie hervorruft. Die Lagrangedichte $\mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}}$ ist invariant unter Eichtransformationen

$$q(x) \to U(x) q(x) \tag{1.5}$$

$$A^a_\mu(x) \to -\frac{i}{g_0}\left(\partial_\mu U(x)\right) U^{-1}(x) + U(x) A^a_\mu(x) U^{-1}(x) \tag{1.6}$$

mit

$$U(x) = \exp\left(-i g_0 \theta^a(x) \frac{\lambda^a}{2}\right)\,, \quad \theta^a(x) \text{ beliebig}\,. \tag{1.7}$$

---

[2] Unter dem R–Verhältnis versteht man das Verhältnis

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_q Q_q^2\,.$$

Es ist gerade der Zahl der Farben N_c proportional. Q_q bezeichnet die Ladungen der summierten Quarkflavors.

[3] Eine ausführliche Darstellung der QCD findet man z. B. in [Ynduráin], einen aktuellen Überblick in [20 Years].

[4] Die Gell–Mann–Matrizen sind explizit z. B. in [Cheng] angegeben.

Zur Quantisierung der QCD ist eine Eichfixierung nötig, die zusätzliche Terme in der Lagrangedichte erfordert. Die vollständige Lagrangedichte der QCD ist

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}} + \mathcal{L}_{\mathrm{g.f.}} + \mathcal{L}_{\mathrm{ghost}} \tag{1.8}$$

mit einem Term $\mathcal{L}_{\mathrm{g.f.}}$, der die Eichung fixiert, und einem Term $\mathcal{L}_{\mathrm{ghost}}$, der die zur Wahrung der Unitarität nötigen Fadeev–Popov–Geistfelder beschreibt. Solche Geister treten in allen kovarianten Eichungen auf. Sie treten in axialen Eichungen (d. h. $n \cdot A^a = 0$ für einen beliebigen 4–Vektor n) nicht auf, was jedoch durch andere Schwierigkeiten erkauft wird. Eine vollständige Auflistung der Feynman–Regeln der QCD in kovarianten Eichungen ist in [Cheng] zu finden. Hier sei nur der Gluonpropagator angeführt, um den Eichparameter ξ zu definieren:

$$iD^{ab}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i\delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon}\left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] . \tag{1.9}$$

Die Feynman–Eichung ist definiert durch die Wahl $\xi = 1$, die Landau–Eichung durch $\xi = 0$.

1.2 Confinement

Als Confinement bezeichnet man die Tatsache, daß als freie Teilchen nur $SU(3)_c$–Farbsinguletts auftreten. Teilchen mit Farbladung, wie z. B. Quarks oder Gluonen, können nicht als freie Teilchen beobachtet werden. Alle physikalischen Zustände sind also Bindungszustände von Quarks, nämlich Mesonen $(q\bar{q})$ oder Baryonen(qqq).[5] Absolutes Confinement würde bedeuten, daß die Farbfreiheitsgrade prinzipiell unbeobachtbar wären. Damit wären die fundamentalen Felder der QCD letztlich keine empirisch zugänglichen Größen. Möglicherweise gibt es aber einen Phasenübergang der QCD, der bei hohen Temperaturen freie Quarks zuläßt. Viele der mit dieser einzigartigen Situation der QCD zusammenhängenden Fragen sind sowohl theoretisch als auch experimentell noch offen.

Bis heute ist es nicht gelungen, das Confinement aus der QCD herzuleiten. Überhaupt ist bisher in keiner $3+1$–dimensionalen Feldtheorie Confinement bewiesen worden. In niedrigeren Dimensionen gibt es allerdings Theorien, die Confinement aufweisen, z. B. $1+1$–dimensionale Quantenelektrodynamik. Der Confinement–Mechanismus in der QCD ist aber möglicherweise ein völlig anderer als in diesen Fällen. Die Selbstkopplung der Gluonen und die daraus resultierende Impulsabhängigkeit der Kopplungskonstante legen aber nahe, daß die Dynamik der QCD Confinement hervorruft.

Wir wollen nun kurz auf jenes Verhalten der Kopplungskonstante eingehen. Um die renormierte Kopplungskonstante einer Quantenfeldtheorie zu definieren, muß man Werte für die äußeren Impulse vorgeben, bei denen der Wert der entsprechenden n–Punkt–Funktion festgelegt wird. Im einfachsten Fall (etwa in einer massiven $\lambda\phi^4$–Theorie) wählt man hierfür verschwindende äußere Impulse oder einen symmetrischen Punkt $(s = t = u)$ auf der Massenschale. Dies ist aber offenbar keine gute Wahl, wenn

[5] Es sind auch Farbsingulett–Zustände aus mehr Quarks denkbar, etwa $qq\bar{q}\bar{q}$, $qqqqqq$ usw. Auch Glueballe, d. h. rein gluonische Bindungszustände, sind möglich. Solche Teilchen konnten bisher experimentell nicht nachgewiesen werden, im Falle der Glueballe gibt es aber Kandidaten.

es in der Theorie masselose Teilchen und an diesen Punkten Singularitäten in den Propagatoren gibt. Daher definiert man die Kopplungskonstante in der QCD an einem Renormierungspunkt mit $q^2 = -\mu^2$ im euklidischen Bereich, wo keine Singularitäten liegen. Der Massenparameter μ ist beliebig. Die Kopplungskonstante g_s ist allgemein eine Funktion der in der Lagrangedichte auftretenden Kopplung g_0 und des Verhältnisses μ/Λ, wobei Λ den cutoff bezeichnet, durch den die Theorie regularisiert ist. Die physikalischen Amplituden müssen von der Wahl des Punktes μ unabhängig sein. Dies bedingt eine Abhängigkeit der Kopplung von μ, die durch die Betafunktion gegeben wird:

$$\mu \frac{\partial g_s}{\partial \mu} = \beta(g_s)\,. \tag{1.10}$$

Die Störungsentwicklung für β hat die Form

$$\beta(g_s) = -\left(11 - \frac{2}{3} n_f\right) \frac{g_s^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_s^5)\,, \tag{1.11}$$

worin n_f die Zahl der Quarkflavors bezeichnet. β ist für kleine Kopplung also negativ.[6] Integriert man (1.10) auf, so findet man die Impulsabhängigkeit der Kopplung

$$\alpha_s(q^2) = \frac{g_s^2(q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3} n_f)\,\ln(-q^2/\Lambda^2_{\mathrm{QCD}})} \qquad (-q^2 \gg \Lambda^2_{\mathrm{QCD}})\,. \tag{1.12}$$

Die Konstante Λ_{QCD} ist per definitionem nicht impulsabhängig, sie ist ein wichtiger Parameter der QCD. Das Verhalten der Kopplung wird durch (1.12) für große raumartige q^2, also im tief euklidischen Bereich, beschrieben. Dort wird die Kopplung klein, d. h. die QCD ist asymptotisch frei. Für kleine $Q^2 \equiv -q^2 > 0$ dagegen wird die Kopplung gemäß (1.12) groß. Dies bedeutet aber gleichzeitig, daß diese Formel, die in Störungstheorie hergeleitet wurde, hier nicht mehr gilt. Die Kopplungskonstante kann also nur im Bereich großer Q^2 aus der perturbativen β–Funktion (1.11) berechnet werden. Für kleine Q^2 deutet vieles auf eine große Kopplung hin. Das genaue Verhalten ist aber hier — wie auch im Bereich zeitartiger q^2 — nicht bekannt.

Eine Reihe von phänomenologischen Modellen beschreibt recht gut das Niederenergieverhalten der starken Wechselwirkung. Hierunter sind verschiedene Potentialmodelle, sowohl in Schrödinger–Theorie als auch mit relativistischen Erweiterungen. In diesen Modellen wird das Quark–Antiquark–Potential meist mit $V(r) = \alpha r + \beta/r$ angesetzt. Aus String–Modellen, in denen das Farbfeld zwischen Quark und Antiquark durch eine schmale Flußröhre repräsentiert wird[7], resultiert ebenfalls ein für große Abstände linear ansteigendes Potential. Solche Potentiale erzeugen natürlich Confinement; die Trennung von Quark und Antiquark erfordert unendlich viel Energie.

Ambitionierter sind Versuche, die Niederenergiephänomene direkt aus der QCD herzuleiten. Der wohl aussichtsreichste nichtperturbative Ansatz ist die Gittereichtheorie. Durch Diskretisierung der Raum–Zeit macht man die QCD einer Monte Carlo–Simulation zugänglich. Man hofft, mit entsprechenden Computern ausgerüstet, in einigen Jahren das Hadronenspektrum mit einer Genauigkeit von 1 % berechnen zu können. Auch wenn sich diese Hoffnung erfüllen sollte, wäre damit dennoch kein profundes Verständnis der QCD erlangt. Ein weiterer Ansatz ist die $1/N_c$–Entwicklung, in der man

[6] Dies ist der Fall solange $n_f \leq 16$, was in der Natur erfüllt ist.
[7] 1+1–dimensionale QCD ist sogar einer Stringtheorie äquivalent.

die Eichgruppe der QCD durch $SU(N_c)$ ersetzt und um den (nichttrivialen) Limes $N_c \to \infty$ in $1/N_c$ entwickelt. Dieser Ansatz verspricht wertvolle Einsichten in den nichtperturbativen Bereich der QCD und ist vielleicht derjenige Zugang, der ein analytisches Verständnis der QCD ermöglichen wird. Schließlich gibt es Versuche, Confinement und spontane chirale Symmetriebrechung aus den Dyson–Schwinger–Gleichungen abzuleiten. Diese exakten Integralgleichungen für die Propagatoren und Vertizes sind jedoch ein kompliziertes gekoppeltes System. Deshalb sind bei diesen Untersuchungen viele Annahmen und Näherungen erforderlich, deren Gültigkeit oft nur schwer kontrollierbar ist. Ein Überblick wird in [Roberts] gegeben.

1.3 Gribovs Vorschlag und überkritische Ladungen

In Anwesenheit von sehr starken Feldern ändert sich die Vakuumstruktur einer Quantenfeldtheorie signifikant. Dies ist im Falle der Quantenelektrodynamik schon lange bekannt und auch quantitativ ausführlich behandelt worden (siehe z. B. [Greiner]).

Das Spektrum der freien Dirac–Gleichung umfaßt ein Kontinuum oberhalb der Elektronmasse m_e und ein Kontinuum unterhalb von $-m_e$. Im Vakuum der QED sind nach Dirac die Zustände negativer Energie aufgefüllt, man spricht vom Dirac–See. Im Vakuum in einem äußeren Feld, wie es etwa durch einen massiven Kern der Ladung Z verursacht wird, gibt es zusätzlich Bindungszustände, deren diskrete Energien E im unterkritischen Fall im Bereich $-m_e < E < m_e$ liegen. Diese Niveaus sind nicht aufgefüllt. Erhöht man nun die Kernladung Z, sinken die Energien E der Bindungszustände ab. Ist die Ladung des Kerns größer als ein kritischer Wert $Z_{\rm cr}$, so wird $E < -m_e$, das niedrigste Energieniveau – das 1s–Niveau – taucht in den Dirac–See ein. Die kritische Ladung liegt für einen punktförmigen Kern bei $Z_{\rm cr} = 137$, für einen ausgedehnten Kern um $Z_{\rm cr} \sim 180$, der genaue Wert hängt von der Art der Ladungsverteilung im Kern ab. Dieser Zustand eines überkritischen Kerns, der ein eingetauchtes Niveau eines Bindungszustands induziert, ist nicht mehr stabil, sondern ist als Resonanz zu betrachten, die sehr schnell zerfällt.[8] Aus einem besetzten Zustand des Dirac–Sees kann nämlich ein Elektron in den eingetauchten Zustand springen. Dieses Elektron ist dann am Kern lokalisiert. (Man spricht von "falling into the center".) Das verbleibende Loch, also ein Positron, wird vom Kern abgestoßen und entfernt sich ins Unendliche. Dieser Vorgang geschieht beim Eintauchen des 1s–Niveaus zweimal, denn dieses ist mit zwei Spinausrichtungen belegt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß ein überkritisch geladener Kern instabil ist. Er zerfällt unter Emission eines Positrons und Bildung eines Bindungszustandes aus dem Kern und einem Elektron,

$$\mathrm{N}_Z \longrightarrow \mathrm{A}_{Z-1} + e^+ \qquad \text{für} \quad Z > Z_{\rm cr}\,. \tag{1.13}$$

A_{Z-1} symbolisiert den atomaren Bindungszustand. Ist dieser immer noch überkritisch geladen, so setzt sich dieser Prozeß fort, bis der entstehende atomare Bindungszustand unterkritische Ladung hat.

Gribovs Theorie beruht auf der Idee, daß ein ähnlicher Vorgang das Confinement in der QCD verursacht [Gribov91, Gribov87, Gribov92, Close]. Dies geschieht aber

[8] In [Greiner] wird eine Lebensdauer von 10^{-19} sec angegeben.

in der QCD nicht nur, wie im obigen Beispiel der QED, für ein leichtes Teilchen im überkritischen Feld eines schweren, sondern auch für die Bindung leichter Quarks untereinander. Die Wechselwirkung leichter Quarks kann Gribovs Theorie zufolge so stark werden, daß die Gesamtenergie eines Quark–Antiquark–Paares negativ werden kann. Das impliziert die Existenz eines neuartigen Kondensats solcher Bindungszustände, in denen die Konstituenten positive (kinetische) Energie haben, der Bindungszustand aber negative Energie. Dies führt zu einer erheblichen Veränderung des üblichen Dirac–Bildes des Vakuums.

Voraussetzung für diesen Vorgang ist die Existenz leichter Quarks mit sehr kleiner (Strom–)Masse m. Durch Vakuumpolarisation entsteht um jede Farbladung ein räumlicher Bereich der Größe $1/\lambda$, in dem die Gesamtladung $\alpha_s(\lambda)$ überkritisch wird. Ist dann die Compton–Wellenlänge $1/m$ der leichten Quarks sehr viel größer als dieser Bereich, d. h. $m/\lambda \ll 1$, so tritt das überkritische Verhalten auf. Anders als in der QED ist nicht eine sehr große Zahl von Elementarladungen hierfür erforderlich, es genügt vielmehr schon eine einzige Farbladung. Die Existenz der neuartigen Bindungszustände führt schließlich dazu, daß jeder farbgeladene Zustand instabil ist.

Wir wollen nun die veränderte Struktur des Vakuums leichter Quarks genauer beschreiben. Den geeigneten Rahmen hierfür bietet das Dirac–Bild des fermionischen Vakuums [Dirac, Bjorken I], das aber bei Anwesenheit überkritischer Ladungen modifiziert werden muß. Im wohlbekannten Dirac–Bild der freien QED haben Fermionen der Masse m_1 positive Energien $q^0 \geq \varepsilon \equiv (m_1^2 + \vec{q}^{\,2})^{1/2}$ oder negative Energien $q^0 \leq -\varepsilon$. Dabei sind die Zustände negativer Energie besetzt (der gefüllte Dirac–See), die Zustände positiver Energie sind unbesetzt. Im Energieintervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ gibt es keine Fermionzustände. Die Anregungen dieses Vakuums erfordern eine Anregungsenergie von mehr als $2m_1$, sie entsprechen der Erzeugung eines Fermion–Antifermion–Paares.

Welche Zustände als Teilchen interpretiert werden, hängt von der Wahl der Fermi–Kante μ_F ab.[9] Die Fermi–Kante trennt die Bereiche besetzter (oberhalb von μ_F) und unbesetzter Zustände (unterhalb von μ_F). In der freien QED ist $\mu_F = 0$.[10] Dies impliziert, daß die mittlere Zahl von Fermionen positiver Energie und Antifermionen negativer Energie im Vakuum Null ist.

Im überkritischen Vakuum der QCD ist dies nicht mehr der Fall. Es gibt nun im Vakuum Quarks *positiver* kinetischer[11] Energie, die sich aber in stark gebundenen, farbneutralen $q\bar{q}$–Zuständen befinden, welche aufgrund der großen Bindungsenergie *negative* Gesamtenergie haben. Diese Quarkzustände unterhalb der Fermi–Kante[12] μ_F sind im Vakuumzustand besetzt. Dies zeigt Abbildung 1.1, in der nur die kinetische Energie der Zustände aufgetragen ist. (Die „potentielle“ Energie kann nicht für ein einzelnes Teilchen aufgetragen werden, da hier kein äußeres Feld vorliegt.) Die zu dieser Zone korrespondierende Zone negativer Energie ist nicht besetzt. In einem solchen Vakuum sind nun neuartige Anregungen möglich, nämlich die Paarerzeugung in diesen neuen Zonen unterhalb der Fermi–Kante. Eine solche Anregung besteht aus ei-

[9] Diese Fermi–Kante μ_F ist die Stelle, an der bei der Berechnung der Feynman–Green–Funktion in Ortsraumdarstellung der Integrationsweg von der unteren in die obere Halbebene der komplexen Energieebene wechseln muß, siehe z. B. [Bjorken I, Fetter, Greiner].

[10] In Anwesenheit starker, aber noch nicht überkritischer äußerer Felder muß man $\mu_F = -m_1$ wählen, siehe [Greiner].

[11] Dieser Begriff ist so aufzufassen wie q^0 in der oben beschriebenen Situation der freien QED.

[12] Man erwartet, daß μ_F von der Größenordnung von λ ist.

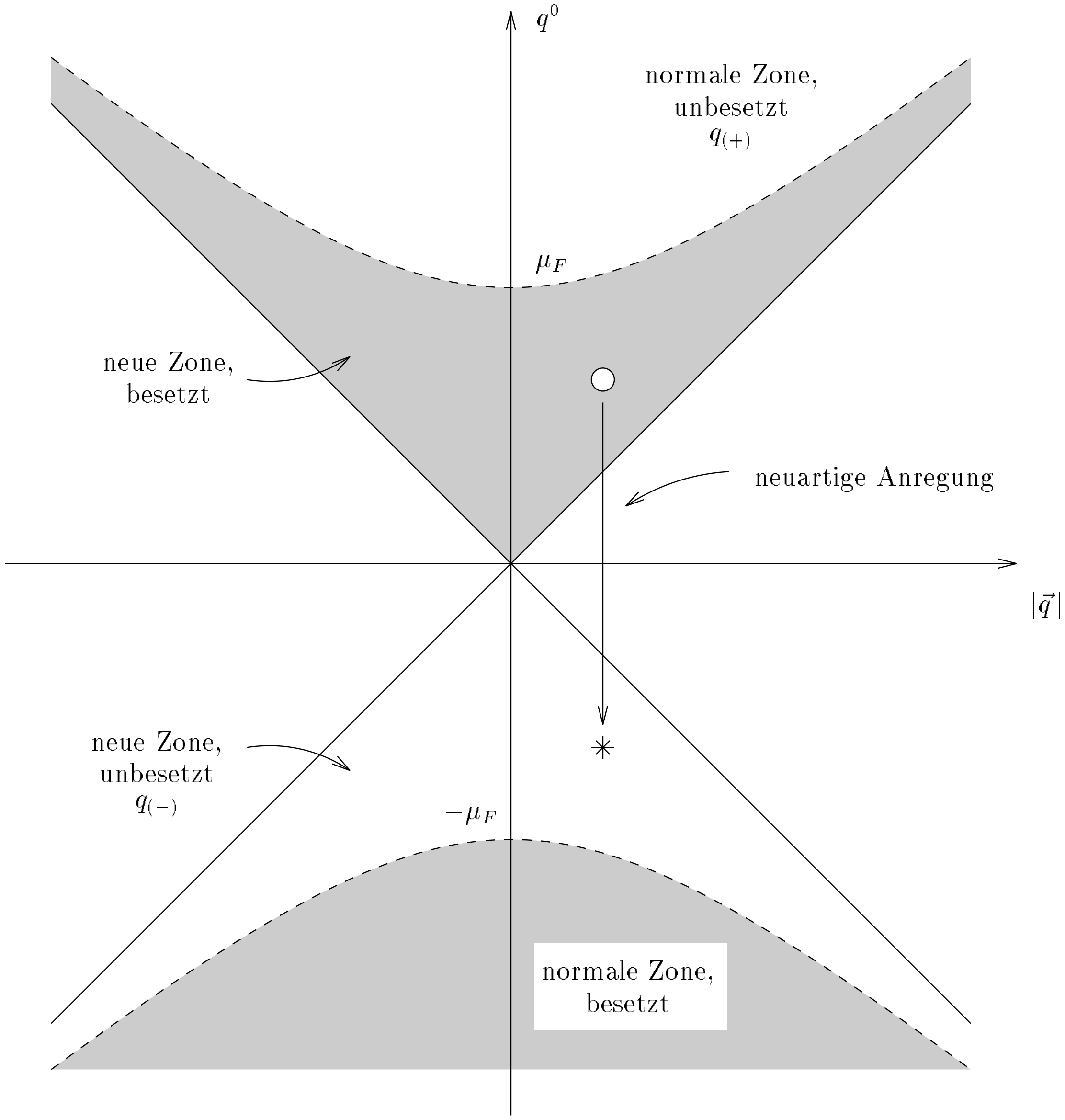


Abbildung 1.1. Vakuum leichter Quarks in Gribovs Theorie

nem Quark *negativer* kinetischer Energie (das Sternchen in der Abbildung) und einem Antiquark *negativer* kinetischer Energie. Letzteres entspricht nach Dirac einem Loch positiver kinetischer Energie (der kleine Kreis in der Abbildung). Die Wechselwirkung dieser beiden Teilchen negativer kinetischer Energie ist stark *repulsiv*, so daß sie ein Meson *positiver* Gesamtenergie bilden. Dieses wird durch das Pauli–Prinzip zusammengehalten: Das Quark kann nicht aus dem Bindungszustand heraus, weil alle Zustände positiver kinetischer Energie unterhalb der Fermi–Kante besetzt sind.

Die Quarkzustände in der unbesetzten Zone negativer Energie wollen wir mit $q_{(-)}$ bezeichnen, im Gegensatz zu den normalen Quarkzuständen $q_{(+)}$. Die Instabilität jedes Quarks wird letztlich durch die Existenz dieser Zustände $q_{(-)}$ verursacht. Jedes isolierte Quark zerfällt in ein Meson $M_{(+)}$ positiver Energie und ein Quark negativer kinetischer Energie,

$$q_{(\pm)} \to M_{(+)} + q_{(-)} \,. \tag{1.14}$$

Im Vakuum sind aber auch die bekannten Anregungen durch Erzeugung eines Quark–Antiquark–Paares in den normalen Zonen möglich. Die Massen m_1 der Teilchen in der normalen Zone oberhalb μ_F werden nun komplexe Werte annehmen, entsprechend der Instabilität dieser Zustände. Diese Massen sind dann als effektive Massen der Quarks zu verstehen.

Die Instabilität schwerer Quarks ist der des schweren überkritischen Kerns in der QED ähnlich. Ein schweres Quark zerfällt in ein schweres Meson und ein leichtes Quarks,

$$Q \to (Q\bar{q}) + q \,. \tag{1.15}$$

Das leichte Quark ist wiederum instabil und zerfällt gemäß (1.14).

Aufgrund der besonderen Struktur der neuartigen Mesonen läßt sich eine Reihe von interessanten Schlüssen über ihre Phänomenologie ziehen [Close]. Da die beschriebene Vakuumstruktur nur auf das Vakuum leichter Quarks zutrifft, existieren die neuartigen Mesonen nur für u– und d–Quarks. Man wird erwarten, daß die energetisch tiefsten neuartigen Zustände sich in skalaren und pseudoskalaren, strangeness–freien Mesonen manifestieren. Insbesondere die skalaren Mesonen $a_0(980)$ und $f_0(980)$, die sich nicht konsistent im normalen Konstituenten–Quarkmodell erklären lassen, könnten so interpretiert werden. Man erwartet aber im allgemeinen, daß die physikalischen Hadronzustände Mischungen aus herkömmlichen und neuen Mesonen sind. Weil die Wechselwirkung zwischen den Konstituenten der neuartigen Mesonen repulsiv ist, sollten solche mit größerer räumlicher Ausdehnung eine niedrigere Energie und solche mit geringerer räumlicher Ausdehnung eine höhere Energie haben. Diese und ähnliche phänomenologische Konsequenzen von Gribovs Theorie machen eine experimentelle Überprüfung durchaus möglich.

Kapitel 2

Gribovs Gleichung für die Green-Funktion leichter Quarks

Dieses Kapitel hat die von Gribov in [Gribov91] vorgeschlagene Gleichung für die Green–Funktion leichter Quarks zum Thema. Wir leiten die Gleichung her und diskutieren die aus ihr resultierenden Eigenschaften der Lösungen, insbesondere deren Asymptotik. Wir geben die verschiedenen Klassen möglicher Lösungen an und untersuchen numerisch ihre analytische Struktur, wobei wir die Ergebnisse aus [Gribov91] vertiefen und auch dort nicht angegebene Lösungen einbeziehen.

2.1 Die Green-Funktion

Die Feynman–Green–Funktion ist definiert als der Erwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren im Heisenberg–Bild,

$$G_F(x,x') = \langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\overline{\psi}(x')|0\rangle\,. \tag{2.1}$$

Dabei bezeichnet $|0\rangle$ den Grundzustand in Anwesenheit der Wechselwirkung. Die Eigenschaften der Feynman–Green–Funktion führen in der normalen QED dazu, daß Zustände negativer Energie in negativer Zeitrichtung propagieren (Positronen) und Zustände positiver Energie in positiver Zeitrichtung (Elektronen). Im Gegensatz zur normalen QED geht in Gribovs Theorie der Grundzustand $|0\rangle$ durch adiabatisches Einschalten der Wechselwirkung nicht aus dem Grundzustand, sondern vielmehr aus einem angeregten Zustand der freien Theorie hervor, d. h. bei einem bestimmten Wert der Kopplung kreuzen sich die Energien dieser Zustände. Damit ist das Diracsche Bild des Vakuums aber nicht mehr gegeben, so daß die Feynman–Green–Funktion hier andere analytische Eigenschaften haben wird als in der normalen QED. Diese Eigenschaften werden in [Gribov91] im Detail beschrieben. Sie sind denen der Green–Funktion der finite temperature–Physik ähnlich.

Die retardierte Green–Funktion ist gegeben durch

$$G_R(x,x') = \theta(x^0 - x'^0)\langle 0|\{\psi(x),\overline{\psi}(x')\}|0\rangle\,. \tag{2.2}$$

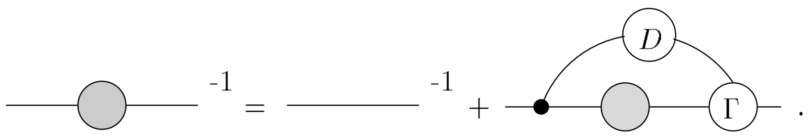
Die retardierte Green–Funktion bestimmt die Kausalitätseigenschaften einer Quantenfeldtheorie. Man kann mittels der Källen–Lehmann–Darstellung zeigen, daß die retardierte Green–Funktion in Impulsdarstellung in der oberen Halbebene in q^0 keine Pole besitzt (siehe z. B. [Fetter]). Die retardierte Green–Funktion wird auch dann die üblichen analytischen Eigenschaften haben, wenn der Grundzustand $|0\rangle$ bei adiabatischem Einschalten der Wechselwirkung aus einem angeregten Zustand der freien Theorie hervorgeht. Die Differentialgleichung, die wir im folgenden behandeln wollen, gilt für die retardierte Green–Funktion [Gribov]. Wir werden ihre Lösungen numerisch untersuchen und werden insbesondere versuchen, Lösungen zu finden, die im ersten Quadranten der q–Ebene (bzw. q^0–Ebene, siehe Definition unten) keine Singularitäten aufweisen.

2.2 Die Gleichung

2.2.1 Die Herleitung in einer QED-artigen Theorie

Wir betrachten zunächst den gegenüber der QCD vereinfachten Fall einer abelschen Theorie, indem wir die Gluonen der QCD durch effektive Photonen ersetzen. In diesem Modell treten also keine Geistfelder und keine 3– bzw. 4–Photonenvertizes[1] auf. Wir machen Annahmen über das Verhalten des Photonpropagators, die das QCD–Verhalten modellieren sollen. Man beachte aber, daß das hier untersuchte Modell sich von der QED deutlich durch das Verhalten der Kopplung unterscheidet. Ein Verhalten, wie wir es hier verwenden, ist in einer wirklichen abelschen Theorie nicht möglich, da diese nicht asymptotisch frei sein kann. Der abelsche Charakter des Modells wird insbesondere durch das Verwenden von Ward–Identitäten ausgenutzt. In Abschnitt 2.2.2 werden wir untersuchen, inwiefern dies in der realen QCD eine gute Näherung darstellt und ob dort ein analoges Vorgehen möglich ist.

Wir gehen bei unserer Herleitung von der exakt gültigen Dyson–Schwinger–Gleichung für die Green–Funktion aus, symbolisch repräsentiert durch



(2.3)

Darin enthalten sind der volle Fermionpropagator G (die Linie mit dem ausgefüllten Kreis), der volle Photon–Propagator D und der volle Photon–Quark–Vertex Γ. Die einfache Linie stellt den nackten Quarkpropagator dar. Der volle Photonpropagator in diesem Modell sei in Feynman–Eichung (vgl. (1.9)) gegeben durch

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}\,\alpha(k^2)\,. \tag{2.4}$$

Die von uns angenommene effektive Kopplung $\alpha(k^2) = \alpha(k^2, \lambda)$ ist in Abb. 2.1 skizziert. Ihre Impulsabhängigkeit wird durch eine Skala λ bestimmt[2]. Für große $Q^2 = -q^2 \gg \lambda^2$ zeigt α das Renormierungsgruppenverhalten der QCD (siehe (1.12)). Wir nehmen an, daß α eine langsam variierende Funktion ist und bei kleinen Q^2 gegen eine Konstante

[1] In diesem Abschnitt werden wir zur klaren Unterscheidung von Photonen statt von Gluonen sprechen. Es handelt sich aber wegen des Kopplungsverlaufs (s. u.) nicht um Photonen einer realen $U(1)$–Theorie.

[2] In der realen QCD wird eine Skala in einer ähnlichen Weise durch den Wert von Λ_{QCD} festgelegt.

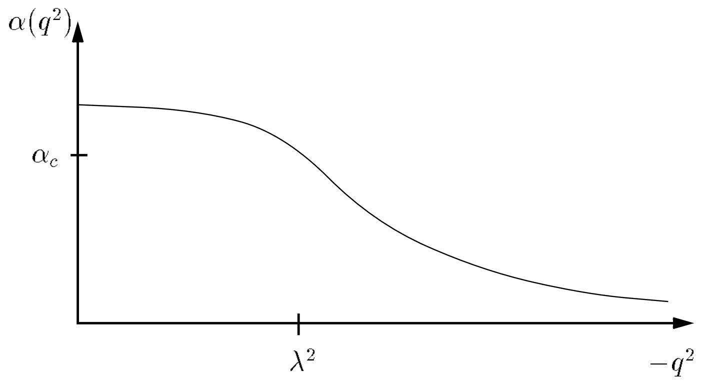
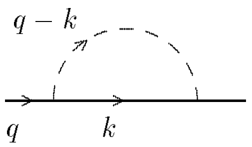


Abbildung 2.1. Angenommenes Verhalten der effektiven Kopplung $\alpha(q^2)$

strebt. In Abb. 2.1 ist diese Konstante bei einem Wert angedeutet, der oberhalb eines bestimmten kritischen α_c liegt. Wie sich erweisen wird, gilt in der QED $\alpha_c \simeq 0,6$. Die Skala λ sei so definiert, daß $\alpha(\lambda^2) = \alpha_c$. Für das in Abschnitt 1.3 geschilderte überkritische Verhalten ist das Abflachen der Kopplung für kleine Impulse natürlich nicht notwendig. Eine für kleine Impulse weiter ansteigende Kopplung würde das Auffinden einer Gleichung für die Green–Funktion zwar noch erschweren, das prinzipielle Phänomen des überkritischen Verhaltens bliebe aber unberührt. Ein Abflachen der starken Kopplungskonstante bei kleinen Impulsen ist mit den experimentellen Befunden durchaus vereinbar (siehe Abschnitt 2.4.2).

Um die Differentialgleichung für die Green–Funktion zu finden, wenden wir auf beide Seiten der Dyson–Schwinger–Gleichung den d'Alembert–Operator $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu$ an. Die zweite Ableitung des nackten Quarkpropagators verschwindet. Wir betrachten zunächst das einfachste nichttriviale Diagramm, das man aus der Diagrammentwicklung der Dyson–Schwinger–Gleichung erhält,



. (2.5)

Die gestrichelte Linie repräsentiert ein Photon bzw. Gluon. Dieses Diagramm ist in Feynman–Eichung durch das Integral $\Sigma(q)$ gegeben,

$$\Sigma(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-ig_s\gamma^\mu\right) G(k) \left(-ig_s\gamma_\mu\right) \frac{i}{(q-k)^2} \,. \tag{2.6}$$

Wenden wir auf dieses Integral den d'Alembert–Operator an, so finden wir wegen

$$\partial^2 \frac{1}{(q-q')^2 + i\epsilon} = -4\pi^2 i \delta^4(q-q') \tag{2.7}$$

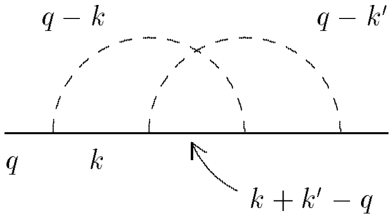
mit dem Minuszeichen aus der Dyson–Schwinger–Gleichung (2.3) gerade den Ausdruck

$$-\,\partial^2 \Sigma(q) = \frac{\alpha(0)}{\pi} \gamma^\mu G(q) \gamma_\mu \tag{2.8}$$

für die rechte Seite unserer Gleichung. Darin haben wir $\alpha(0) = g_s^2(0)/(4\pi)$ gesetzt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Beiträge Diagramme höherer Ordnungen liefern. Im allgemeinen wird nun bei komplizierteren Diagrammen durch Anwenden des d'Alembert–Operators eine Reihe von Termen entstehen, in denen die einzelnen Faktoren des Integranden ein bzw. zweimal nach dem äußeren Impuls q abgeleitet werden. Die singulärsten[3] dieser Terme werden die sein, bei denen ein Photonpropagator zweimal abgeleitet wird. Wir werden die anderen, im Infraroten weniger singulären Terme vernachlässigen.

Als Beispiel für die kombinatorischen Zusammenhänge betrachten wir das Diagramm



. (2.9)

Die Benennung der Impulsvariablen in den Linien ist so gewählt, daß man die singulärsten Anteile leicht extrahieren kann. Man erkennt, daß bei Differentiation dieses Diagramms in unserer Näherung zwei Terme entstehen, bei denen in je einer Photonlinie zweimal differenziert wird. Der Impuls dieser Photonlinie wird damit Null gesetzt. Die andere Integration bleibt jeweils unberührt. Dies führt dazu, daß wir in unserer Gleichung zwei volle Photon–Quark–Vertizes erhalten werden. In der gewöhnlichen Dyson–Schwinger–Gleichung (2.3) vor der Differentiation ist dies nicht der Fall. Dort tritt ein nackter Vertex und ein voller Vertex auf, denn sonst würde z. B. das Diagramm (2.9) doppelt gezählt. Dieses Diagramm führt bei uns dagegen auf die einfachsten Vertexkorrekturen.

Aus komplizierteren Diagrammen höherer Ordnungen erhält man sämtliche Vertexkorrekturen, und man findet die Gleichung

$$\partial^2 G^{-1} = \frac{\alpha(0)}{\pi}\,\Gamma^\mu(q,0)\,G(q)\,\Gamma_\mu(q,0)\,, \tag{2.10}$$

deren niedrigster Term in der Kopplung gerade (2.8) ist. Die Summe der Terme, die wir hier berücksichtigen, entspricht insgesamt also der Compton–Streuung eines Photons mit verschwindendem Impuls.

An dieser Stelle verwenden wir die Ward–Identität

$$\Gamma_\mu(q,0) = \partial_\mu G^{-1}(q)\,, \tag{2.11}$$

ersetzen also die Einfügung einer Photonlinie mit verschwindendem Impuls durch die Ableitung der Green–Funktion nach dem äußeren Impuls. Dies führt auf eine Gleichung, die nur noch die Green–Funktion und ihre Ableitung involviert,

$$\partial^2 G^{-1} = \frac{\alpha(0)}{\pi}\,(\partial^\mu G^{-1}(q))\,G(q)\,(\partial_\mu G^{-1}(q))\,. \tag{2.12}$$

[3]Wie eine genauere Analyse zeigt, benötigt man hierzu die Tatsache, daß die Quarkmasse m klein gegenüber der Skala λ ist, siehe [Gribov91].

Bis hierher haben wir weiche Photonen und damit das Niederenergieverhalten der Green–Funktion berücksichtigt. Die gesuchte Gleichung soll aber für alle Impulsbereiche die Green–Funktion in guter Näherung beschreiben, also insbesondere für große Impulse das Renormierungsgruppenverhalten reproduzieren. Um dies zu gewährleisten, ersetzen wir die Kopplung bei verschwindendem Impuls, $\alpha(0)$, durch die impulsabhängige Kopplung $\alpha(q^2)$. Dadurch gehen in die Gleichung auch solche Diagramme ein, die durch höhere Schleifenkorrekturen in den Photonlinien gekennzeichnet sind. Die resultierende Gleichung ist damit

$$\partial^2 G^{-1} = \frac{\alpha}{\pi} (\partial^\mu G^{-1})\, G\, (\partial_\mu G^{-1})\,. \tag{2.13}$$

Definieren wir schließlich noch

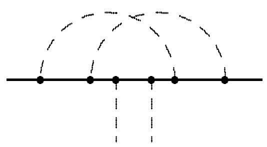
$$g \equiv \frac{\alpha}{\pi}\,, \tag{2.14}$$

so ergibt sich

$$\partial^2 G^{-1} = g (\partial^\mu G^{-1})\, G\, (\partial_\mu G^{-1})\,. \tag{2.15}$$

Dies ist die zentrale Gleichung, die wir im folgenden untersuchen wollen.

Bei dieser Gleichung ist nun eine Reihe von Diagrammen noch nicht berücksichtigt. Einen Teil der fehlenden Diagramme werden wir in Kapitel 3 als Mesonkorrekturen einbeziehen. Andere Diagramme, etwa solche der Form[4]



, (2.16)

werden ebenfalls nicht durch die Vertexkorrekturen in der Ward–Identität eingeschlossen. Für diese und ähnliche Diagramme höherer Ordnung läßt sich, wenigstens prinzipiell, eine Diagrammentwicklung in systematischer Weise angeben. Die Gleichung wird dann aber zu einer Integro–Differentialgleichung für die Green–Funktion, die deutlich schwerer zu behandeln ist.

In der Herleitung haben wir explizit Gebrauch gemacht von der speziellen Form des Photonpropagators in der Feynman–Eichung. Die Feynman–Eichung ist im Sinne dieser Herleitung dadurch ausgezeichnet, daß sie uns erlaubt, die im Infraroten besonders singulären Anteile der Diagramme zu isolieren. In anderen Eichungen wäre dies nicht möglich. Die Gleichung für die Green–Funktion ist daher auch nicht eichinvariant. Dennoch ist es natürlich legitim, diejenige Eichung auszuwählen, die die bestmögliche praktische Näherung ermöglicht. Die generellen physikalischen Resultate müssen von der Wahl der Eichung unabhängig bleiben. Könnte man also Confinement in einer in Feynman–Eichung gemachten Näherung zeigen, wäre ein sehr großer Schritt getan.

2.2.2 Slavnov-Taylor-Identitäten und die Gleichung in der QCD

Das generelle Vorgehen bei der Herleitung der Gleichung in der QCD bleibt dasselbe wie im obigen Fall einer QED–artigen Theorie. Die Dyson–Schwinger–Gleichung (2.3) ist auch in der QCD exakt erfüllt.

[4]Die aufgeschnittene Linie ist eine solche, in der bereits zweimal abgeleitet wurde.

Eine ganz offensichtliche Änderung der Gleichung in der QCD gegenüber einer QED–artigen Theorie besteht im Auftreten eines Farbfaktors. Im einfachsten Diagramm (2.5) tritt ein zusätzlicher Faktor auf,

$$\Sigma_{ab}(q) = (T^c T^c)_{ab}\, \Sigma_{\text{QED}}(q)\,, \tag{2.17}$$

worin $T^c = \lambda^c/2$. Man kann leicht erkennen, daß

$$(T^c T^c)_{ab} = \frac{4}{3}\,\delta_{ab}\,. \tag{2.18}$$

Diesen Faktor benennt man üblicherweise mit C_F.[5] Er tritt in allen Diagrammen an den gleichen Stellen auf wie die starke Kopplung α_s, und so bleibt die Form unserer Gleichung unverändert, jetzt ist jedoch g in (2.15) definiert als

$$g = C_F \frac{\alpha_s}{\pi}\,. \tag{2.20}$$

Der kritische Wert der starken Kopplung wird damit $\alpha_c \simeq 0,43$.

Eine nicht so offensichtliche Schwierigkeit stellt die Verwendung der Ward–Identität dar. Zwar kann man zeigen, daß die Gluon–Selbstkopplungen durch das beschriebene Verfahren richtig berücksichtigt werden. Die Ward–Identität ist dennoch in der oben verwendeten Form in nichtabelschen Eichtheorien nicht erfüllt. In diesen gibt es aber den Ward–Identitäten der QED analoge Gleichungen, nämlich die Slavnov–Taylor–Identitäten [Slavnov, Taylor]. Um den Unterschied zur Ward–Identität zu erkennen, betrachten wir die Slavnov–Taylor–Identität (STI) explizit für den Quark–Gluon–Vertex. Ausführliche Darstellungen findet man in [Marciano, Pagels]. Wir benötigen nur einen kurzen Abriß dieser Untersuchungen.

In kovarianten Eichungen involvieren die Slavnov–Taylor–Identitäten notwendigerweise Geistfelder. Die durch die Geister verursachten Komplikationen könnten natürlich in axialen Eichungen vermieden werden. Die Wahl einer axialen Eichung $n \cdot A_\mu = 0$ empfiehlt sich aber nicht, da einerseits die Lorentz–Invarianz gebrochen wird und andererseits in den Nennern der Impulsraumpropagatoren unphysikalische Singularitäten durch Terme der Form $p \cdot n = 0$ auftreten. Zudem sind wir auf die kovariante Feynman–Eichung angewiesen, denn nur in dieser können wir ausnutzen, daß das zweimalige Ableiten des Gluonpropagators eine Delta–Distribution liefert.

Wir benötigen zunächst einige Bezeichnungen, hierunter die Geist–Selbstenergie $b(k^2)$, die so definiert ist, daß der volle Geistpropagator die Gestalt

$$\frac{i\delta_{ab}}{k^2[1 + b(k^2)]} \tag{2.21}$$

annimmt. Wir wollen annehmen, daß der Grenzwert $b(0)$ der Geist–Selbstenergie bei $k^2 = 0$ existiert. Weiter ist in diesem Zusammenhang ein effektiver Geist–Quark–Streukern $B(q, k)$ von Bedeutung, q und k seien die einlaufenden Quark– und Geistimpulse. In der QCD gibt es natürlich keinen fundamentalen Geist–Quark–Vertex,

[5] Allgemein ist in einer $SU(N)$–Eichtheorie

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}\,. \tag{2.19}$$

in höheren Ordnungen gibt es aber Wechselwirkungen über Gluonen, die zu diesem Streukern beitragen. Die STI besagt dann, daß

$$\Gamma_\mu(q,0)[1+b(0)] = \partial_\mu G^{-1}(q) + \left[\left.\frac{\partial B(q,k)}{\partial k_\mu}\right|_{k=0}, G^{-1}(q) \right] . \tag{2.22}$$

Man erkennt, daß aus dieser Gleichung die QED–artige Ward–Identität resultiert, wenn man annimmt, daß die Geistterme bei verschwindendem Geistimpuls vernachlässigbar sind. Über das tatsächliche Verhalten dieser Terme bei $k = 0$ ist wenig bekannt, einige Informationen stehen im Falle der Landau–Eichung zur Verfügung. Diese deuten — einige weitere Annahmen vorausgesetzt — darauf hin, daß die Ward–Identität möglicherweise eine vertretbare Näherung der STI darstellt. Die entsprechenden Untersuchungen wurden aber in Landau–Eichung durchgeführt, die Übertragbarkeit auf die Feynman–Eichung ist nicht selbstverständlich. Ohne näher auf die Details einzugehen, können wir jedoch feststellen, daß der Term $[1+b(0)]$ für unsere Herleitung nicht kritisch ist, solange $b(0)$ regulär ist. In diesem Fall nämlich kann dieser multiplikativ auftretende Term in einer Redefinition der Kopplung absorbiert werden. Der Kommutator der Green–Funktion mit der Ableitung des Geist–Quark–Streukerns hingegen würde, in der Gleichung berücksichtigt, deren Struktur deutlich verkomplizieren. Da beide Terme aber Geister involvieren, treten sie notwendigerweise erst in höheren Ordnungen der Störungstheorie in der Gleichung auf. Andererseits wurden bei der Herleitung der Gleichung schon Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ vernachlässigt, nämlich die, in denen $\alpha' \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$ auftrat. Daher kann man durchaus hoffen, daß trotz Vernachlässigung der Geistterme Gleichung (2.15) das Verhalten der Green–Funktion in guter Näherung beschreibt. Es ist für mich aber kein Weg ersichtlich, der die Herleitung dieser Gleichung ohne die Vernachlässigung der Geistterme erlaubt.

2.2.3 Drei Eigenschaften der Gleichung

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Gleichung ist eine gewisse Symmetrie zwischen der Green–Funktion G und ihrer Inversen G^{-1}. Die Gleichung impliziert nämlich, daß die Green–Funktion der Gleichung[6]

$$\partial^2 G = (2-g)(\partial^\mu G)G^{-1}(\partial_\mu G) \tag{2.23}$$

genügt. Die Green–Funktion geht in diesem Sinne bei einer Kopplung von $g = 1$, also bei $\alpha_s = 3\pi/4$, in ihre Inverse über. Eine physikalische Bedeutung dieser Symmetrie ist nicht erkennbar. Es gibt keinen offensichtlichen Grund dafür, daß der Wert $\alpha_s = 3\pi/4$ eine hervorgehobene Bedeutung haben sollte. Möglicherweise deutet diese Symmetrie darauf hin, daß die Gleichung für so große Werte der Kopplung keine angemessene Beschreibung der inversen Green–Funktion mehr darstellt. Wir werden noch einem weiteren Argument begegnen, das den Bereich der Kopplung im Sinne einer sinnvollen Anwendung der Gleichung einschränkt (siehe Abschnitt 2.3.2).

Die Gleichung für die Green–Funktion besitzt eine weitere Eigenschaft in einer Art “Skaleninvarianz”. Mit einer Lösung G^{-1} ist auch cG^{-1} ($c \in \mathbb{C}$) eine Lösung. Auswirkung dieser Skaleninvarianz ist, daß die Gleichung nur die logarithmische Ableitung der Wellenfunktionsrenormierung involviert.

[6]Wir führen den Beweis dieses Sachverhalts hier nicht explizit vor, zumal die Gleichung später nicht mehr verwendet wird. Umformungen, die den hier benötigten ähneln, findet man in Abschnitt 4.4.

Eine tatsächliche Skaleninvarianz besäße die Gleichung, wenn man eine konstante Kopplungskonstante annähme. Wie wir sehen werden, tritt dann in der Gleichung nur die Ableitung nach dem Logarithmus des Impulses auf. Durch den Verlauf der Kopplung jedoch wird eine Skala in die Theorie eingeführt und damit diese Skaleninvarianz gebrochen.

2.3 Parametrisierung und asymptotisches Verhalten

2.3.1 Eine Parametrisierung der Green-Funktion

Aufgrund von Lorentz– und Paritätsinvarianz kann man die inverse Green–Funktion in der allgemeinen Form

$$G^{-1}(q) = a(q^2)\, \not{q} - b(q^2) \tag{2.24}$$

darstellen (siehe z. B. [Bjorken II]). Damit ist die Green–Funktion selber

$$G(q) = \frac{1}{a^2(q^2)q^2 - b^2(q^2)} \left[a(q^2)\, \not{q} + b(q^2)\right]. \tag{2.25}$$

Wir werden im folgenden sehr oft die Variable

$$q \equiv \sqrt{q^\mu q_\mu} \tag{2.26}$$

benutzen. Der Schnitt der komplexen Wurzelfunktion bereitet keine Probleme, da ja bereits durch eine Halbebene der komplexen q–Ebene die gesamte q^2–Ebene überdeckt wird. Außerdem benutzen wir die Schreibweise

$$\not{n} \equiv \frac{\not{q}}{q}. \tag{2.27}$$

Es erweist sich für unsere Untersuchungen als nützlich, die inverse Green–Funktion G^{-1} durch zwei skalare komplexwertige Funktionen $\rho(q^2)$ und $\phi(q^2)$ zu parametrisieren:

$$\begin{aligned} G^{-1} &= -\rho \exp\left(-\frac{1}{2}\phi\, \not{n}\right) && (2.28)\\ &= -\rho \left(\cosh\frac{\phi}{2} - \sinh\frac{\phi}{2}\cdot \not{n}\right) && (2.29)\\ &= \rho \sinh\frac{\phi}{2}\cdot\frac{\not{q}}{q} - \rho\cosh\frac{\phi}{2}. && (2.30)\end{aligned}$$

Dies ist möglich aufgrund der Darstellung der Green–Funktion gemäß Gl. (2.24). Unsere Parametrisierung entspricht gerade

$$\begin{aligned} a(q^2) &= \frac{1}{q}\rho \sinh\frac{\phi}{2} && (2.31)\\ b(q^2) &= \rho\cosh\frac{\phi}{2}. && (2.32)\end{aligned}$$

Der dynamische Massenterm

$$M(q^2) = \frac{b(q^2)}{a(q^2)} = q \coth\frac{\phi}{2} \tag{2.33}$$

ist nur durch das Verhalten der Funktion ϕ bestimmt, d. h. die Funktion ϕ beinhaltet die Massenrenormierung, wohingegen die Funktion ρ die Wellenfunktionsrenormierung repräsentiert.

Aus der Gleichung für G^{-1} ergibt sich ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen für ρ und ϕ. Es ist vorteilhaft, dieses in der Variablen

$$\xi \equiv \ln q = \ln \sqrt{q^\mu q_\mu} \tag{2.34}$$

zu schreiben. Die Logarithmusfunktion hat natürlich in der komplexen Ebene einen Schnitt. Dies braucht uns aber nicht zu beunruhigen, denn in unseren Gleichungen wird die Variable ξ nur als Größe auftreten, nach der abgeleitet wird. Hierfür ist die Mehrdeutigkeit der Logarithmusfunktion ohne Belang. Die Verwendung dieser Variable dient also alleine der kurzen Schreibweise der Gleichungen. Die Ableitung nach ξ bezeichnen wir mit einem Punkt, d. h. für eine Funktion $f(q)$

$$\dot{f}(q) \equiv \partial_\xi f(q) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(q)\,. \tag{2.35}$$

Wir definieren die Funktion k als logarithmische Ableitung der Funktion ρ, d. h.

$$k \equiv \frac{\dot{\rho}}{\rho}\,. \tag{2.36}$$

Außerdem notieren wir noch abkürzend

$$\beta \equiv 1 - g\,. \tag{2.37}$$

Die Gleichung (2.15) für die inverse Green–Funktion kann dann durch folgendes Gleichungssystem dargestellt werden:

$$\ddot{\phi} + 2\,(1 + \beta k)\;\dot{\phi} - 3 \sinh \phi = 0 \tag{2.38}$$

$$\dot{k} + 2k + \beta \left(k^2 + \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + 3 \sinh^2 \frac{\phi}{2} \right) = 0 \tag{2.39}$$

Wie oben schon erwähnt (siehe Abschnitt 2.2.3), tritt hierin nicht die Funktion ρ selber auf, sondern vielmehr ihre logarithmische Ableitung k. Für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens (siehe Abschnitt 2.4.1) werden wir auch die Gleichung für die Funktion ρ selber benötigen, diese ist

$$(\partial_\xi + 2)\partial_\xi \rho + \beta \left(\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + 3 \sinh^2 \frac{\phi}{2} \right) \rho - g \frac{1}{\rho} (\partial_\xi \rho)^2 = 0\,. \tag{2.40}$$

Diese bzw. die Gleichung (2.39) für k kann alternativ auch als eine Gleichung für

$$p \equiv 1 + \beta k = 1 + \beta \frac{\dot{\rho}}{\rho} \tag{2.41}$$

geschrieben werden und hat dann die Form

$$\dot{p} = 1 - p^2 - \beta^2 \left(\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + 3 \sinh^2 \frac{\phi}{2} \right)\,. \tag{2.42}$$

Die Gleichung (2.38) ist in p ausgedrückt

$$\ddot{\phi} + 2p\,\dot{\phi} - 3 \sinh \phi = 0\,. \tag{2.43}$$

Beweis:

Wir benutzen im folgenden einige Formeln, die in Anhang B zusammengestellt sind und auch dort bewiesen werden. Ihr Gebrauch wird hier nicht besonders gekennzeichnet.
Es ist zunächst

$$\begin{aligned}
\partial_\mu G^{-1} &= -(\partial_\mu \rho)\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right) - \rho\,\partial_\mu\left[\cosh\frac{\phi}{2} - \sinh\frac{\phi}{2}\,\not n\right] \\
&= -(\partial_\mu \rho)\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right) - \frac{1}{2}\rho\,\sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu\phi) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\rho\,\cosh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu\phi)\,\not n + \rho\,\sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not n) \\
&= \left[-(\partial_\mu\rho) + \frac{\rho}{2}(\partial_\mu\phi)\,\not n\right]\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right) + \\
&\quad + \rho\,\sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not n)\,. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von Gl. (2.15) wird dann aufgrund von

$$G = -\frac{1}{\rho}\,\exp\left(\frac{1}{2}\phi\,\not n\right) \qquad (2.45)$$

gerade

$$\begin{aligned}
& g(\partial^\mu G^{-1})G(\partial_\mu G^{-1}) = \\
&= -\frac{g}{\rho}\left\{\left[(\partial^\mu\rho)(\partial_\mu\rho) - \frac{1}{2}\rho(\partial^\mu\rho)(\partial_\mu\phi)\,\not n\right]\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right) + \right. \\
&\qquad + \left[-\frac{1}{2}\rho(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\phi)\,\not n + \frac{1}{4}\rho^2(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)\right]\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right) + \\
&\qquad \left. + \rho^2\sinh^2\frac{\phi}{2}\,(\partial^\mu \not n)(\partial_\mu \not n)\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right)\right\} \\
&= \frac{1}{q^2}\left[-g\frac{\dot\rho^2}{\rho} + g\dot\rho\,\dot\phi\,\not n - \frac{1}{4}g\rho\,\dot\phi^2 - 3g\rho\sinh^2\frac{\phi}{2}\right]\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right)\,. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Ähnlich berechnet man die linke Seite von Gl. (2.15) aus einer Form von (2.44),

$$\begin{aligned}
\partial_\mu G^{-1} &= \left[-(\partial_\mu\rho) + \frac{\rho}{2}(\partial_\mu\phi)\,\not n\right]\left(\cosh\frac{\phi}{2} - \sinh\frac{\phi}{2}\,\not n\right) + \\
&\quad + \rho\sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not n)\,, \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}
\partial^2 G^{-1} &= \frac{1}{q^2}\left[-\ddot\rho - 2\dot\rho - \frac{1}{4}\rho\,\dot\phi^2 - 3\rho\sinh^2\frac{\phi}{2} + \dot\rho\,\dot\phi\,\not n + \frac{1}{2}\rho\,\ddot\phi\,\not n + \right. \\
&\qquad \left. + \rho\,\dot\phi\,\not n - 3\rho\sinh\frac{\phi}{2}\cosh\frac{\phi}{2}\,\not n\right]\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not n\right)\,. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen für ϕ und ρ findet man durch Koeffizientenvergleich der Terme mit bzw. ohne $\not n$ in (2.46) und (2.48). Die Gleichungen (2.42,2.39) folgen dann direkt unter Verwendung der Definitionen von k und p. □

Der Vollständigkeit halber geben wir hier auch noch das Gleichungssystem an, das aus (2.15) für die Funktionen a und b folgt:

$$\begin{aligned}(a^2q^2-b^2)a'' &= gaa'^2q^2+(2g-5)a^2a'q+5a'b^2\frac{1}{q}-2ga'bb' \\ &\quad -2ga^3-2gabb'\frac{1}{q}+gab'^2 \qquad (2.49)\\ (a^2q^2-b^2)b'' &= ga'^2bq^2+2gaa'bq-2gaa'b'q^2+4ga^2b+ \\ &\quad -(3+2g)a^2b'q+gbb'^2+3b^2b'\frac{1}{q}\,. \qquad (2.50)\end{aligned}$$

Die Skaleninvarianz der Gleichung für die Green–Funktion muß natürlich auch in dieser Parametrisierung zur Folge haben, daß ein Freiheitsgrad in diesem Gleichungssystem eliminiert werden kann, wie dies oben im Falle der Funktion ρ geschehen ist. Die dortigen Gleichungen involvieren die Funktion $\dot\rho/\rho$, legen aber nicht die Skala von ρ selber fest.

Wir werden im folgenden die Parametrisierung (2.28) und damit die Gleichungen in ϕ und ρ bzw. p bevorzugen, weil diese leichter zu handhaben sind.

2.3.2 Asymptotisches Verhalten der Lösungen

Eine wichtige Eigenschaft der Gribov–Gleichung für die inverse Green–Funktion ist, daß sie für große Q^2 mit der asymptotischen Freiheit der QCD in Einklang ist. Dies werden wir in Abschnitt 2.4.1 zeigen. In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie sich die Lösungen der Gleichung entwickeln, wenn man auf Strahlen in der q–Ebene zu großen $|q|$ voranschreitet. Außerdem analysieren wir, wie sich die Lösungen auf diesen Strahlen für kleine $|q|$–Werte verhalten müssen.

Die Gleichungen für ϕ und p sind auf allen Strahlen der q–Ebene dieselben. Das erkennt man leicht daran, daß auf Strahlen nur die Ableitung nach dem Logaritmus ξ auftritt, in Polarkoordinaten $(|q|, \varphi_q)$ in der q–Ebene

$$d\xi = d(\ln|q| + i\varphi_q) = d(\ln|q|)\,. \qquad (2.51)$$

Die resultierenden Funktionen hängen aber keineswegs nur von $|q|$ ab, denn die Ableitung der Funktion ϕ im Nullpunkt induziert auf Strahlen in verschieden Richtungen verschiedene Anfangsbedingungen.

Wir wollen hier zunächst von einer konstanten Kopplung ausgehen, d. h. $\beta = \text{const.}$, und dann erst den Einfluß einer impulsabhängigen Kopplung untersuchen, indem wir annehmen, daß die Asymptotik der Lösungen stetig von der Kopplung als Parameter abhängt.

Das Verhalten für $|q|\to\infty$

Wir zeigen, daß das Gleichungssystem für $|q|\to\infty$ Fixpunkte besitzt bei

$$\begin{aligned}\phi &= (2n+1)i\pi \qquad (n\in\mathbb{N}) \qquad (2.52)\\ p &= \sqrt{1+3\beta^2}\,. \qquad (2.53)\end{aligned}$$

Aus der Periodizität der Gleichungen in ϕ wird unmittelbar klar, daß bei entsprechendem p mit $\phi = i\pi$ auch $\phi = (2n+1)i\pi$ Fixpunkte sind. Wie wir in Abschnitt

2.4.1 zeigen, sichert dies die asymptotische Freiheit der Lösungen. Wir untersuchen das Verhalten der Funktionen ϕ und p in der Umgebung dieser Punkte. Hierzu setzen wir

$$\phi = i\pi + \psi \quad \text{und} \quad p = p_0 + \hat{p} \tag{2.54}$$

und entwickeln bis zur ersten Ordnung in den Störungen ψ bzw. $\hat{p}$, d. h. $\psi\hat{p} \simeq 0$. Mit Gl. (2.42) folgt aus $\dot{p} = 0$

$$p_0^2 = 1 + 3\beta^2 > 0\,. \tag{2.55}$$

Für $\hat{p}$ ergibt sich wegen $\sinh\left(\frac{i\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) \simeq i$

$$\begin{aligned} \partial_\xi \hat{p} &= 1 - p_0^2 - 2p_0\hat{p} + 3\beta^2 \\ &= -2p_0\hat{p}\,, \end{aligned} \tag{2.56}$$

womit

$$\hat{p} = De^{-2p_0\xi} \qquad (D \in \mathbb{C})\,. \tag{2.57}$$

Offenbar müssen wir für den Fall eines stabilen Fixpunktes in (2.55) die positive Wurzel wählen, also

$$p_0 = \sqrt{1 + 3\beta^2} \in \mathbb{R}_+\,. \tag{2.58}$$

Die Funktion ρ hat damit (siehe (2.41)) eine Singularität,

$$\rho \sim \exp\left[\frac{p_0 - 1}{\beta}\,\xi\right]\,. \tag{2.59}$$

Aus Gl. (2.43) folgt

$$\ddot{\psi} + 2p_0\dot{\psi} + 3\psi = 0\,. \tag{2.60}$$

Mit dem Ansatz $\psi = Ce^{\gamma_\pm \xi}$ also

$$\gamma_\pm = -p_0 \pm \sqrt{p_0^2 - 3} = -p_0 \pm \sqrt{3\beta^2 - 2}\,, \tag{2.61}$$

so daß

$$\psi = C_1 e^{\gamma_+\xi} + C_2 e^{\gamma_-\xi} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{C})\,. \tag{2.62}$$

Die Wahl der Konstanten C_1 und C_2 muß auf der imaginären q–Achse so erfolgen, daß ψ rein imaginär ist (siehe Abschnitt 2.4).

Es sind nun die beiden Fälle $\beta^2 > 2/3$ und $\beta^2 < 2/3$ zu unterscheiden.
<u>1. Fall</u>: $\beta^2 > 2/3$
In diesem Fall ist $3\beta^2 - 2 > 0$, d. h. $\gamma_\pm$ ist reell, und es gilt $\gamma_\pm < 0$. Die Funktion ϕ strebt also asymptotisch monoton gegen den Wert $i\pi$. Dieser Fall ist durch Werte der Kopplung g gekennzeichnet, für die gilt

$$g < g_c \equiv 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}18 \tag{2.63}$$

oder

$$g > 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 1{,}82\,. \tag{2.64}$$

Hier finden wir also den schon erwähnten kritischen Wert der starken Kopplungskonstante,

$$\alpha_c = \frac{3\pi}{4} g_c \simeq 0,43\,. \tag{2.65}$$

2. Fall: $\beta^2 < 2/3$
In diesem Fall sind $\gamma_\pm$ komplex und ψ geht gedämpft oszillierend gegen Null. Auf der imaginären q–Achse ist ψ rein imaginär. Auf der reellen q–Achse ist dies nicht notwendig der Fall, und man kann durch Einsetzen der Ausdrucks (2.61) für $\gamma_\pm$ mit Real– und Imaginärteil in (2.62) erkennen, daß ψ auf einer elliptischen Spirale in der komplexen Ebene auf den Wert Null zu verläuft. Dieser Fall

$$\alpha_c < \alpha < 4,3 \tag{2.66}$$

kennzeichnet den überkritischen Bereich der Gleichung. Der Bereich ist nach oben durch den Wert in (2.64) beschränkt. Die Tatsache, daß die Gleichung bei sehr großer Kopplung wieder unterkritisches Verhalten zeigt, ist sicher unphysikalisch. Wir können daher nicht erwarten, daß die Gleichung auch bei solch großen Kopplungen die Green–Funktion korrekt beschreibt.

Das Verhalten für $|q| \to 0$

In diesem Grenzwert gibt es zwei mögliche Fälle. Einmal kann die Funktion ϕ gegen einen der oben angeführten Fixpunkte (2.52) streben. Dies zeigt man wie im Fall $|q| \to \infty$. Für $|q| \to 0$, d. h. $\xi \to -\infty$, muß aber nun in (2.55) die negative Wurzel gewählt werden,

$$p_0 = -\sqrt{1+3\beta^2} \in \mathbb{R}_-\,, \tag{2.67}$$

damit $\hat{p} \to 0$. Auch hier treten bei überkritischer Kopplung wieder gedämpfte Oszillationen von ϕ auf.

Der andere mögliche Fall ist, daß ϕ gegen Null geht. Die linearisierte Gleichung für kleine ϕ ist

$$\ddot{\phi} + 2p_0\dot{\phi} - 3\phi = 0\,. \tag{2.68}$$

Die Gleichung für p ergibt $p_0 = \pm 1$. Im Ansatz $\phi = Ce^{\gamma\xi}$ muß $\gamma > 0$ sein, damit ϕ regulär bleibt, also folgt aus (2.68) $\gamma = 2 - p_0 \in \{1, 3\}$. Um eine Lösung zu erhalten, bei der ϕ gedämpft gegen den Fixpunkt $i\pi$ strebt, ist $p_0 = 1$ und damit $\gamma = 1$ notwendig. Dies erkennt man am leichtesten an der im Abschnitt 2.4 zu findenden Gleichung (2.72).

Um die Impulsabhängigkeit der Kopplung g zu berücksichtigen, nehmen wir an, daß das asymptotische Verhalten der Lösungen stetig von g abhängt. (Dies ist, wie sich numerisch zeigt, auch tatsächlich der Fall.) Demzufolge ist in den obigen Grenzwerten für p einfach β durch $\beta(\infty)$ bzw. durch $\beta(0)$ zu ersetzen. Die im Fall $|q| \to \infty$ auftretenden Oszillationen hören oberhalb der Skala auf, bei der $g = g_c$ ist, ϕ verläuft danach wieder monoton auf $i\pi$ zu.

2.4 Lösungen im Euklidischen

Unter dem euklidischen Bereich wollen wir rein imaginäre Werte der Variable q verstehen, und zwar mit positivem Imaginärteil $\tilde{q} \equiv -iq > 0$, es gilt also $q^2 < 0$.

Um die notwendigen analytischen Eigenschaften der retardierten Green–Funktion zu gewährleisten, ist es erforderlich, für imaginäre Werte von q die Funktion ϕ rein imaginär zu wählen (siehe auch [Gribov91]). Dies erkennt man am leichtesten, wenn man beachtet, daß hier die Massenfunktion rein reell sein soll, und wegen (vgl. (2.33))

$$M(q^2) = i\tilde{q} \coth \frac{\phi}{2} \tag{2.69}$$

muß so ϕ rein imaginär sein. Die Funktion p muß hierzu in diesem Bereich rein reelle Werte annehmen. Hat man dann nämlich an einem Punkt auf der imaginären q–Achse die Funktionen entsprechend gewählt, so sichern die Gleichungen, daß sie auch auf der ganzen Achse diese Bedingungen erfüllen. Wir schreiben

$$\phi \equiv i\chi\,, \tag{2.70}$$

wobei χ eine reellwertige Funktion darstellt, so daß wir in diesem Abschnitt nur reellwertige Funktionen behandeln.

Zuerst wollen wir die Gleichung (2.43) für χ (bzw. ϕ) in eine Form bringen, die das Verhalten dieser Funktionen einem intuitiven Verständnis etwas näher bringt. Die Funktion

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{\chi}^2}{2} - 3\,(1 - \cos\chi) \tag{2.71}$$

kann nämlich als Energiefunktion einer Bewegung des Freiheitsgrades χ aufgefaßt werden. Die zu (2.43) äquivalente Bewegungsgleichung für χ ist dann

$$\partial_\xi \epsilon = -2p\dot{\chi}^2\,, \tag{2.72}$$

so daß der Verlauf von χ aufgefaßt werden kann als eine gedämpfte Bewegung in einem Potential der Form

$$V = -3\,(1 - \cos\chi)\,, \tag{2.73}$$

das bei $\chi = (2n+1)\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) Minima und bei $\chi = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) Maxima besitzt. Damit werden die oben diskutierten Fixpunkte im Euklidischen unmittelbar als die Minima des Potentials V anschaulich.

2.4.1 Die asymptotische Freiheit der Lösungen

Für große $Q^2 = -q^2 \gg \lambda^2$ ist das Verhalten der Green–Funktion durch das Renormierungsgruppenverhalten der Theorie und damit durch die asymptotische Freiheit bestimmt. Wir zeigen, daß die Gleichung für die Green–Funktion in diesem Grenzwert für Lösungen, in denen ϕ gegen $i\pi$ strebt, das richtige Renormierungsverhalten reproduziert.

Zuerst berechnen wir das Verhalten der Wellenfunktionsrenormierung. Die zugehörige Renormierungskonstante Z ist in unserer Parametrisierung definiert durch

$$\rho = e^\xi Z^{-1}(\xi) = qZ^{-1}\,, \tag{2.74}$$

denn in der üblichen Benennung ist $G^{-1} = Z^{-1} G_{\mathrm{ren}}^{-1}$, und man liest den Zusammenhang zwischen ρ und Z aus (2.31) für $\phi \simeq i\pi$ ab. $Z(\xi)$ sei nun als eine langsam variierende Funktion angenommen. Aus der Gleichung (2.40) für ρ ergibt sich im Grenzwert $\chi \to \pi$ mit $\chi = \pi - \psi$ die Gleichung[7]

$$(\partial_\xi + 3)(\partial_\xi - 1)\rho + 3g\rho - g\frac{1}{\rho}(\partial_\xi \rho)^2 = 0\,. \tag{2.75}$$

Setzt man hierin (2.74) ein und vernachlässigt die Terme $\partial_\xi^2 Z^{-1}$ und $(\partial_\xi Z^{-1})^2$, so erhält man die übliche Gleichung für die Wellenfunktionsrenormierung in Feynman–Eichung

$$\partial_\xi Z^{-1} + \frac{1}{2} g Z^{-1} = 0\,, \tag{2.76}$$

wie man sie etwa in [Buras] findet. (Man beachte wieder, daß bei uns $g = C_F \alpha_s / \pi$ ist.) Wie wir in Abschnitt 2.4.5 beweisen werden, ist in unserer Parametrisierung die Massenfunktion im perturbativen Bereich großer $\tilde{q}$, in dem die Funktion ϕ Werte nahe $i\pi$ annimmt, gegeben durch

$$\psi = 2e^{-\xi} M(\xi) = \frac{2M}{\tilde{q}}\,. \tag{2.77}$$

$M(\xi)$ ist im perturbativen Bereich wieder eine langsam variierende Funktion. Aus Gleichung (2.43) ergibt sich dort die in ψ linearisierte Gleichung

$$\ddot{\psi} + 2\left(1 + \beta\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)\dot{\psi} + 3\psi = 0\,. \tag{2.78}$$

Um aus diesen beiden Gleichungen die korrekte Massenrenormierung zu gewinnen, muß man etwas behutsamer vorgehen als im Fall der Wellenfunktionsrenormierung. Man muß nämlich beachten, daß wegen (2.74) und (2.76)

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = 1 + \frac{\partial_\xi Z^{-1}}{Z^{-1}} = 1 - \frac{1}{2} g\,. \tag{2.79}$$

Setzt man dies und (2.77) in die Linearisierung ein, so findet man unter Vernachlässigung des Terms $\partial_\xi^2 M$

$$\partial_\xi M = -\frac{3}{2} g M\,, \tag{2.80}$$

also die übliche Gleichung für die Massenrenormierung. Diese hat, wie man leicht unter Verwendung von (1.12) erkennt, die Lösung

$$M(q^2) = m_0 \left[\frac{\alpha_s(q^2)}{\alpha_s(q_0^2)}\right]^{\gamma_m}\,, \tag{2.81}$$

worin m_0 die Masse bei q_0 ist und der Exponent in Ein–Schleifen–Näherung gegeben ist durch $\gamma_m = 12/(33 - 2n_f)$.

[7] In [Gribov91] enthält diese Gleichung (dort (4.42)) einen Druckfehler.

2.4.2 Zwei Ansätze für eine infrarot-endliche Kopplung α_s

Über das Verhalten der starken Kopplungskonstante bei kleinen Impulsen ist wenig bekannt. Dennoch gibt es einige Anhaltspunkte, an denen wir uns mangels besserer Kenntnisse orientieren wollen, wenn wir numerisch Lösungen der Gleichung suchen. Unser Ansatz für $\alpha_s(\tilde{q})$ muß natürlich für große Impulse mit dem Renormierungsgruppenverhalten (siehe (1.12)) übereinstimmen. Bei kleinen Impulsen entwickelt diese Formel aber einen Pol bei $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 250$ MeV Diese Singularität ist sicher unphysikalisch, der Begriff einer unendlich großen Kopplung ist schlicht unsinnig. Die formale Existenz einer Singularität deutet lediglich darauf hin, daß der störungstheoretische Ansatz verbunden mit einem nicht wechselwirkenden perturbativen Dirac–Vacuum nicht auf eine konsistente Feldtheorie in diesem Bereich führt. Solange aber keine Lösung der vollen QCD zur Verfügung steht, müssen wir uns mit praktikablen Ansätzen begnügen. In [Dokshitzer] wird diskutiert, wie aus verschiedenen experimentellen Befunden Bedingungen für $\alpha_s(\tilde{q})$ extrahiert werden können. Hiernach sollte gelten

$$\int_0^{1\,\text{GeV}} \frac{\alpha_s(k)}{\pi}\, dk \simeq 0,2\,, \tag{2.82}$$

eine weitere dieser Bedingungen besagt, daß

$$\frac{\alpha_s(0)}{\pi} \simeq 0,25\,, \tag{2.83}$$

so daß $g(0) \simeq 0,33$ überkritisch ist. Auch wenn diese Bedingungen nicht letztlich fundiert und anerkannt sein mögen, wollen wir sie doch aufgreifen, wenn wir in Beispielen eine Kopplung auswählen.

Um nun den Verlauf der Kopplung im Detail zu parametrisieren, machen wir zwei Ansätze. In beiden Fällen werden wir $\Lambda_{\text{QCD}} = 250$ MeV annehmen. Für die Zahl der Flavors setzen wir $n_f = 3$, was bis zur charm–Quark–Schwelle ($m_c \simeq 1 - 1,6$ GeV) richtig ist. Unterhalb der Masse des strange–Quark kennen wir die Kopplung ohnehin nicht exakt, im Bereich oberhalb der charm–Masse ist die Kopplung deutlich unterkritisch, so daß dieser Bereich für unsere Gleichung nicht von großer Bedeutung ist. $n_f = 3$ ist hier eine ausreichende Näherung. Unsere Ansätze für die Kopplung stimmen bei 2 GeV recht gut mit den gemessenen Daten überein [PDG], unterhalb von 1,5 – 2 GeV gibt es kaum verläßliche Messungen. Die Wahl von $n_f = 3$ steht nicht ganz in Einklang damit, daß wir sonst die Existenz verschiedener Flavors außer acht lassen. Der Unterschied zu $n_f = 1$ wäre aber nicht besonders groß, und bei kleinen q sind unsere Ansätze ohnehin nur ein Modell.

Unser erster Ansatz besteht darin, in der Formel (1.12) den logarithmischen Term im Nenner zu ersetzen gemäß

$$\ln \frac{-q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \longrightarrow \ln \left[\frac{-q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} + a \right]\,, \tag{2.84}$$

diese Infrarotregularisierung entspricht der Einführung einer „effektiven Gluonmasse“. Hierbei kann a über einen größeren Bereich variiert werden, ohne daß das Hochenergieverhalten der Kopplung nachhaltig beeinflußt wird. Die Kopplung ist dann gegeben durch

$$\alpha_s(q^2) = \frac{g_s^2(q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}n_f)\ \ln(-q^2/\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2 + a)}\,. \tag{2.85}$$

Wählt man $a = 6$, so werden die beiden obigen Bedingungen (2.82,2.83) erfüllt. Dieser Verlauf der Kopplung ist als Kurve A in Abb. 2.2 dargestellt. Zum Vergleich ist dort als Kurve C die Kopplung gemäß der Ein–Schleifen–Renormierung ($a = 0$) aufgetragen, die einen Pol bei $\tilde{q} = \Lambda_{\mathrm{QCD}}$ hat. Durch Variation des Parameters a können schließlich verschiedene Kopplungsstärken untersucht werden.

Beim zweiten Ansatz wird die Kopplung bei einem bestimmten Impuls oberhalb Λ_{QCD} abgeschnitten. Oberhalb dieses Impulses wird der Verlauf gemäß der Ein–Schleifen–Renormierung (1.12) angesetzt, unterhalb wird die Kopplung als konstant angenommen. Um numerische Schwierigkeiten an der so entstehenden „Knickstelle“ zu vermeiden, glätten wir den Knick auf einem kleinen Impulsbereich durch Einfügen eines Polynoms 3. Grades zu einer C^1–Kurve. Die so konstruierte Kopplung ist in Abb. 2.2 als Kurve B dargestellt.

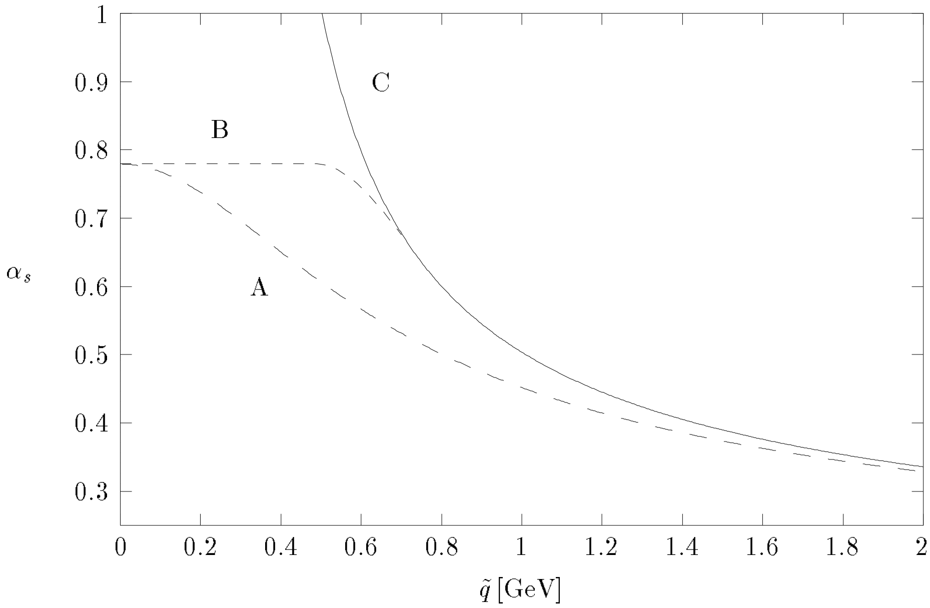


Abbildung 2.2. Ansätze für das Verhalten der starken Kopplung (A und B) und die Kopplung gemäß der Ein–Schleifen–Renormierung (C)

Die beiden Ansätze sind jeweils durch den Wert der Kopplung bei $\tilde{q} = 0$ eindeutig beschrieben. Gleiche Werte an diesem Punkt bedeuten aber aufgrund der verschiedenen Verläufe nicht, daß die Auswirkungen auf die Lösungen der Gleichung vergleichbar sind. Die Effekte des überkritischen Verhaltens treten beim zweiten Ansatz (B) deutlicher zu Tage, denn bei diesem ist die Kopplung über einem größeren Impulsintervall überkritisch. Darüberhinaus hängt es von den Anfangsbedingungen ab, ob sich die verschiedenen Kopplungsverläufe bei einzelnen Lösungen stark unterschiedlich bemerkbar machen.

2.4.3 Die numerischen Lösungsmethoden

Zur numerischen Lösung der Gleichung habe ich zwei verschiedene Methoden benutzt. Die erste ist die schrittweise Aufintegration der Differentialgleichung mittels eines Runge–Kutta–Verfahrens. Die andere verwendete Routine ist `COLSYS` [Ascher]. Diese Routine basiert auf einem sog. Kollokationsverfahren, bei dem die Lösung iterativ durch B–Splines genähert wird. Dieses Verfahren ist auf die Lösungen von Mehrpunkt–Randwertproblemen zugeschnitten. Für solche Probleme eignet sich das Runge–Kutta–Verfahren, gerade bei nichtlinearen Differentialgleichungen, nur sehr bedingt und mit recht großem Aufwand.

Die im folgenden dargestellten Lösungen im euklidischen Bereich wurden mit dem Runge–Kutta–Verfahren erzeugt. Es wurde in den meisten Fällen überprüft, daß auch `COLSYS` diese Lösungen findet. Diese Überprüfung war nicht in allen Fällen mit der Genauigkeit möglich, die durch eine sehr kleine Schrittweite beim Runge–Kutta–Verfahren vorgegeben war. Die Resultate beider Routinen stimmen in diesem Rahmen sehr gut überein.

Sucht man nach exzeptionellen Lösungen, die gewisse Eigenschaften also nur bei einem bestimmten Satz von Anfangsbedingungen haben, ist die Anwendung eines Runge–Kutta–Verfahrens oft nicht empfehlenswert, insbesondere dann, wenn bei einer nichtlinearen Gleichung die Endwerte in komplizierter Weise von den Anfangsbedingungen abhängen. In solchen Fällen erwächst eine Schwierigkeit aus der einfachen Tatsache, daß mit dem Nichtkonvergieren der iterativen Näherung in `COLSYS` kein Hinweis auf dessen Ursache, etwa eine ungeschickte Parametrisierung oder Koordinatenwahl, verbunden ist.

2.4.4 Die Lösungen im Euklidischen

Hier stellen wir die verschiedenen Klassen von Lösungen zusammen, die die Gleichung im Euklidischen besitzt, wenn man verlangt, daß ϕ rein imaginär und p rein reell ist, wie oben beschrieben.

Die erste Klasse umfaßt die Lösungen, die bei $\tilde{q} = 0$ mit dem Wert $\chi = 0$ starten. Damit ist notwendig $p(0) = 1$. Dies sind die in [Gribov91] diskutierten Lösungen. Der freie Parameter bei der Bestimmung dieser Lösungen ist $\chi'(0)$ (bzw. äquivalent dazu die renormierte Masse m_R, siehe Abschnitt 2.4.5). Für kleine $\chi'(0)$ verlaufen die Lösungen monoton. χ nähert sich asymptotisch dem Wert π und die Lösung strebt gegen den oben diskutierten Fixpunkt. Eine solche Lösung ist in Abbildung 2.3 aufgetragen, bei der numerischen Berechnung kann man bei $\tilde{q} = 0$ starten und die Gleichung aufintegrieren.

Für größere Werte von $\chi'(0)$ steigt die Funktion χ steiler an und kann den Wert π passieren, um sich dann von oben asymptotisch π zu nähern. Dieses ist in Abbildung 2.4 wiedergegeben. Die Funktion χ kann bei entsprechend großem $\chi'(0)$ beliebig viele π–Durchgänge haben. Die Oszillationen sind aber in jedem Falle sehr stark gedämpft. (Numerisch lassen sich deshalb mehrfache Oszillationen fast nur bei konstanter überkritischer Kopplung beobachten.)

Einer zweite Klasse von Lösungen ist die, bei der χ auf dem Intervall $[0, \infty[$ von $-\pi$ nach π verläuft, also von einem in den nächstgelegenen Fixpunkt. p verläuft von $-\sqrt{1 + 3\beta^2(0)}$ nach $+\sqrt{1 + 3\beta^2(\infty)} = 2$. Dabei kann der Nulldurchgang von p so adju-

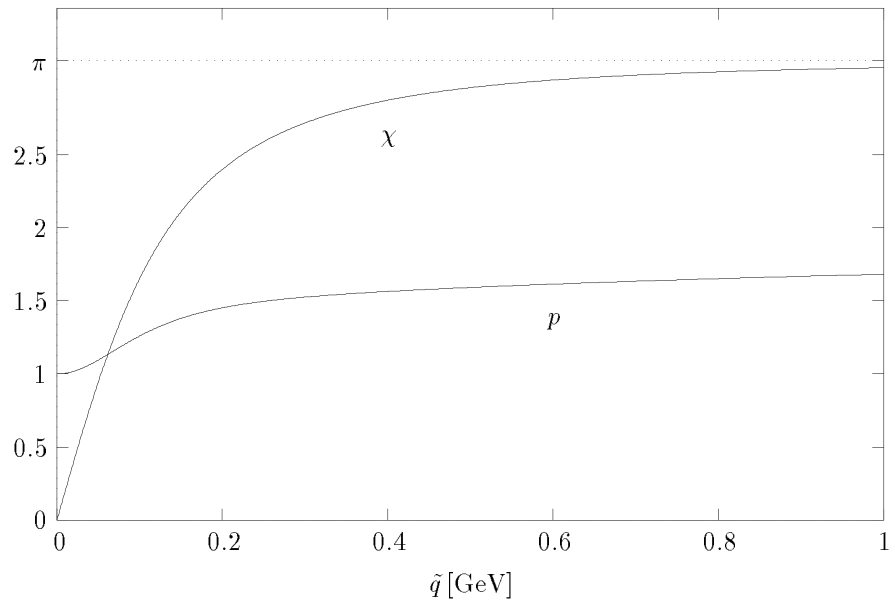


Abbildung 2.3. Lösungen χ und p für $\chi'(0)=20$ (entsprechend $m_R=100$ MeV, s. u.) bei Kopplungsverlauf A und $\alpha_s(0)=0,8$

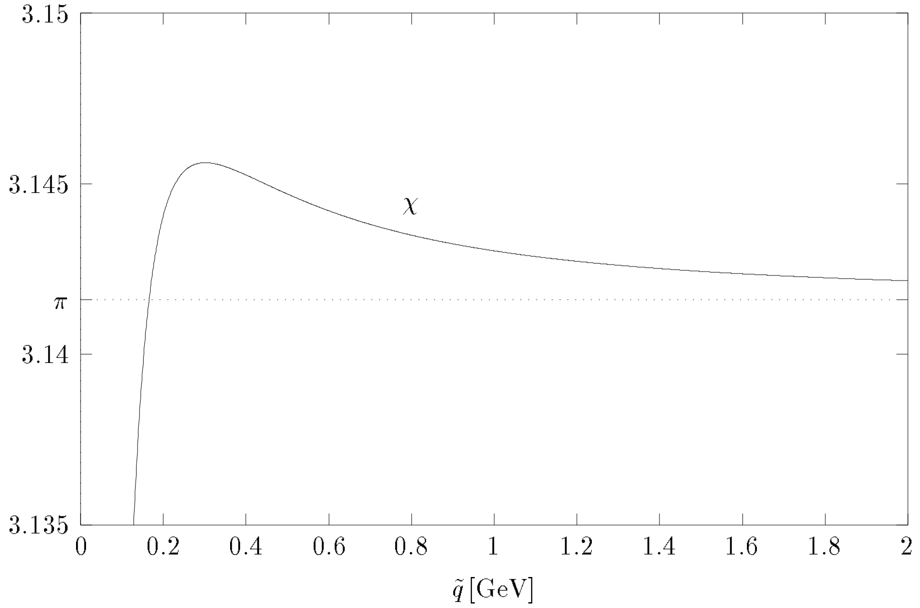


Abbildung 2.4. Lösung χ für $\chi'(0) = 250$ (entsprechend $m_R = 8$ MeV, s. u.) bei Kopplungsverlauf A und $\alpha_s(0)=0,8$

stiert werden, daß an dieser Stelle auch $\chi = 0$ gilt. Dieser Verlauf, wie er in Abbildung 2.5 dargestellt ist[8], kann in einem gewissen Sinne als symmetrisch bezeichnet werden.

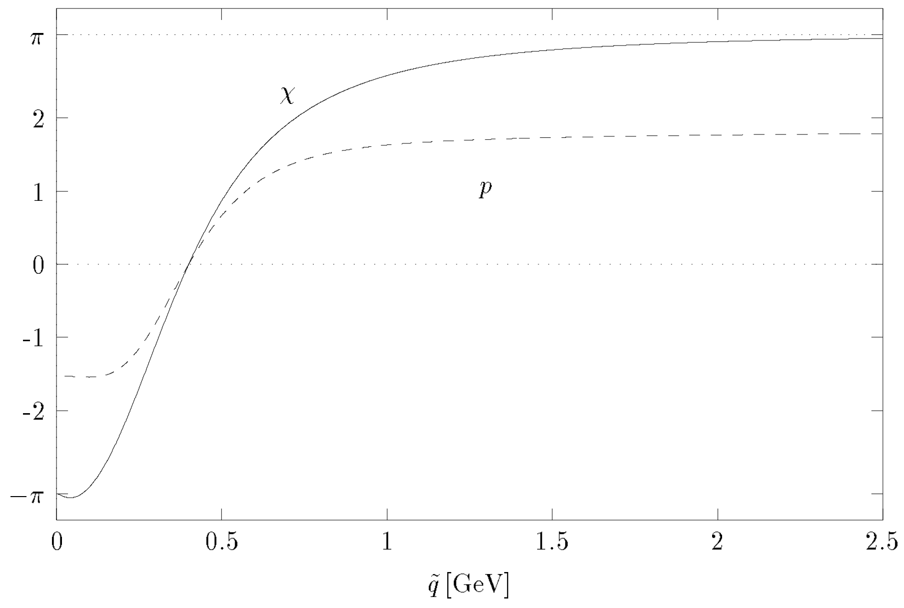


Abbildung 2.5. Lösungen χ und p für $\chi(0,4) = 0$, $\chi'(0,4) = 10$ und $p(0,4) = 0$ bei Kopplungsverlauf A und $\alpha_s(0) = 0,8$

(Diese Bezeichnung trifft genauer zu, wenn man die Kopplung als konstant annimmt und die Gleichung in der Variablen ξ auffaßt.) Es sind auch Lösungen ähnlicher Art möglich, die den Nulldurchgang von p bei einem anderen Wert von χ haben, in diesem Sinne asymmetrische Lösungen. (Diese Art von Lösung ist hier nicht abgebildet.)

Bei einer dritten Klasse von Lösungen bleibt χ auf dem gesamten Intervall $[0, \infty[$ nahe dem Wert π. Eine solche ist in Abbildung 2.6 illustriert. Hier kann der Nulldurchgang von p mit dem π–Durchgang von χ koinzidieren. Ähnlich wie bei den Lösungen der zweiten Klasse ist es aber auch möglich, daß diese Punkte nicht zusammenfallen.

Die numerische Berechnung der beiden letzten Klassen von Lösungen erfordert, daß man bei einem endlichen $\tilde{q}$ startet, und die Gleichung zu großen und zu kleinen $\tilde{q}$ hin getrennt aufintegriert. In beiden Fällen nämlich starten und enden die Lösungen in stabilen Fixpunkten. Wollte man mit einem Runge–Kutta-Verfahren aus einem solchen Fixpunkt herauslaufen, so würden die zu berechnenden Funktionen exponentiell anwachsen und das Verfahren wäre nicht stabil.

Über die genannten drei Klassen hinaus gibt es im Euklidischen keine anderen stabilen Lösungen, die asymptotische Freiheit aufweisen, also für $-q^2 \to \infty$ in einen der stabilen Fixpunkte laufen.

[8]Hier und bei den folgenden Abbildungen geben wir das Argument von χ und p in Einheiten von GeV an.

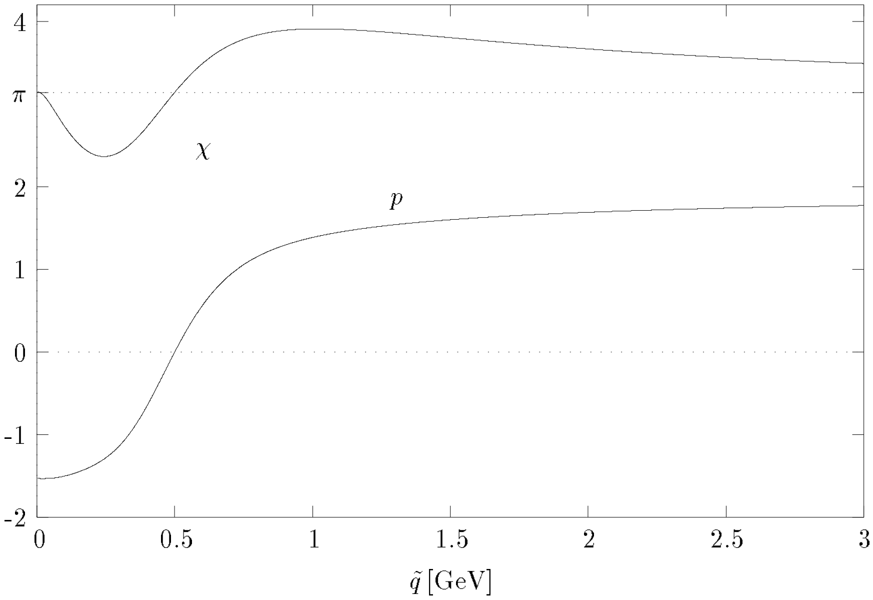


Abbildung 2.6. Lösungen χ und p für $\chi(0,5) = \pi$, $\chi'(0,5) = 4$ und $p(0,5) = 0$ bei Kopplungsverlauf A und $\alpha_s(0) = 0,8$

2.4.5 Massenfunktion und Phasenübergänge

Nun wollen wir untersuchen, wie sich die Massenfunktion $M(q^2)$ der Quarks bei den oben gefundenen Lösungen entwickelt. Insbesondere wollen wir uns dafür interessieren, wie die Masse bei kleinen Impulsen zusammenhängt mit der Masse bei großen Impulsen, deren Entwicklung der Störungstheorie zugänglich ist. Wir werden sehen, daß dieser Zusammenhang nicht bijektiv ist. Dies hat zur Folge, daß bei bestimmten Werten der „störungstheoretischen Masse“ Phasenübergänge auftreten. Wir werden uns in diesem Abschnitt mit den Lösungen befassen, bei denen χ von 0 nach π verläuft.

Die „renormierte Masse“[9] m_R sei definiert als der Grenzwert der Massenfunktion bei verschwindendem Impuls,

$$m_R \equiv \lim_{\tilde{q}\to 0} M(q^2)\,. \tag{2.86}$$

Mit unserer Parametrisierung kann man m_R leicht berechnen, denn ausgehend von (2.33) ist im Euklidischen

$$m_R = \lim_{\tilde{q}\to 0} \tilde{q} \cot \frac{\chi}{2}\,, \tag{2.87}$$

worin wir die Taylor–Entwicklung der Funktion χ um den Punkt $\tilde{q} = 0$, also $\chi = \tilde{q}\chi'(0) + \frac{1}{2}\tilde{q}^2\chi''(0) + \ldots$, einsetzen und die Reihendarstellung des Cotangens[10] verwenden

[9] Diese Bezeichnung übernehme ich aus [Gribov91]. Natürlich beschreibt aber die Massenfunktion generell die Renormierung der Masse.

[10] Mit den Bernoulli–Zahlen B_n gilt

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} \qquad (0 < x < \pi)\,. \tag{2.88}$$

können, so daß

$$m_R = \frac{2}{\chi'(0)} . \tag{2.89}$$

Der freie Parameter beim Auffinden der oben gezeigten Lösungen war gerade $\chi'(0)$, die Anfangswerte für ϕ (resp. χ) und p lagen fest. Die Lösungen unterschieden sich mithin gerade in ihrer renormierten Masse m_R.

Die perturbative Masse des Quarks ist durch das asymptotische Verhalten der Funktion $M(q^2)$ definiert. Gemäß den Renormierungsgruppengleichungen ist für große Q^2 die Massenfunktion gegeben durch

$$M(q^2) = m_0 \left[\frac{\alpha_s(q)}{\alpha_s(q_0)}\right]^{\gamma_m} , \tag{2.81}$$

mit $\gamma_m = 12/(33 - 2n_f)$ (siehe z. B. auch [Cheng]). Neben der Massenfunktion $M(q^2)$ wollen wir noch eine weitere Funktion $\widetilde{M}(q^2)$ definieren durch

$$\widetilde{M}(q^2) \equiv \tilde{q}\, \frac{\pi - \chi}{2} , \tag{2.90}$$

und zeigen, daß diese Funktion im Grenzwert $\tilde{q} \to \infty$ mit der Massenfunktion $M(q^2)$ übereinstimmt. In diesem Grenzwert ist nämlich $(\pi - \chi)$ klein, und wir können den Cotangens approximieren durch

$$\cot\frac{\chi}{2} = \tan\frac{\pi - \chi}{2} \simeq \frac{\pi - \chi}{2} , \tag{2.91}$$

so daß beide Funktionen in der Tat koinzidieren. In praktischen Rechnungen ist es nun von Vorteil, die „perturbative Masse“ m_P an einer endlichen Skala zu definieren. Dieses Vorgehen stellt eine Näherung dar, die aber die unten diskutierten Zusammenhänge qualititativ nicht beeinträchtigt. Wir definieren also, [Gribov91] folgend, m_P als den Wert der Massenfunktion an der Skala λ, an der die Kopplung gerade ihren kritischen Wert annimmt, also dort, wo wir (in einer ersten groben Abschätzung) das Einsetzen des perturbativen Verhaltens zu erwarten haben,

$$m_P \equiv M(\lambda^2) = \lambda \cot\frac{\chi(\lambda)}{2} . \tag{2.92}$$

Die qualitativen Ergebnisse sind, wie wir überprüft haben, nicht signifikant von der Skala abhängig, man könnte auch einen anderen Wert wählen, der oberhalb λ liegt.[11] Für Lösungen der Gleichung jedoch, bei denen χ an dieser Skala λ noch nicht nahe an π ist, ist die Definition (2.92) nicht mit der physikalisch exakten kompatibel, die das asymptotische Verhalten verwendet. In [Gribov91] wird (formal) abweichend von unserer Definition die perturbative Masse definiert durch den Ausdruck

$$\tilde{m}_P \equiv \widetilde{M}(\lambda^2) \equiv \tilde{q}\, \frac{\pi - \chi}{2}\bigg|_{\tilde{q}=\lambda} . \tag{2.93}$$

Wie wir aber gezeigt haben, ist diese Definition mit der obigen verträglich. Die Koinzidenz der beiden Werte $M(\lambda^2)$ und $\widetilde{M}(\lambda^2)$ kann als ein grobes Maß dafür betrachtet

[11] Die quantitativen Resultate hängen von der Wahl der Skala ab. Der genaue Zusammenhang ist im Rahmen meiner Arbeit nicht untersucht worden.

werden, ob bei der Skala λ die Renormierungsgruppengleichung für die Masse schon in guter Näherung erfüllt wird.

Wir wollen uns nun auf die Lösungen konzentrieren, die bei $\tilde{q} = 0$ die Anfangsbedingung $\chi = 0$ (und damit $p = 1$) erfüllen. Für Lösungen mit negativem $\chi'(0)$ werden wir annehmen, daß sie bei $\chi = 2\pi$ starten und sich asymptotisch ebenfalls π nähern. Diese Annahme ist aufgrund der Periodizität der Gleichung in χ keine Einschränkung. Wir stellen zuerst fest, daß die Massenfunktion M rasch abfällt. Abbildung 2.7 zeigt dies exemplarisch für zwei verschiedene m_R (hier 100 und 50 MeV).

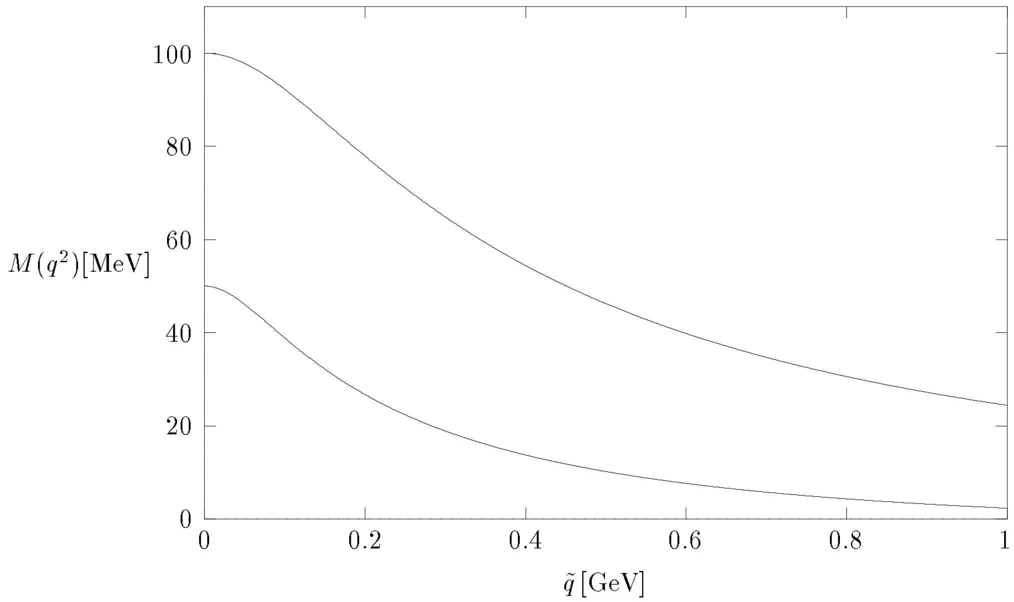


Abbildung 2.7. Rasches Abfallen der Massenfunktion $M(q^2)$ für zwei verschiedene renormierte Massen $m_R = 50$ bzw. 100 MeV (Kopplungsverlauf A und $\alpha_s(0) = 0,8$)

Ist die Kopplung auf der ganzen imaginären q–Achse unterkritisch, so ist der Zusammenhang zwischen renormierter Masse und perturbativer Masse durch eine monotone Kurve repräsentiert. Diese ist in Abb. 2.8 dargestellt. Da die Kopplung in diesem Fall immer unterkritisch ist, ist die Definition der Skala λ nicht mittels des kritischen Wertes der Kopplung möglich. Wir wählen statt dessen willkürlich einen hinreichend großen Wert, $\lambda = 1$ GeV.

Hat die Kopplung nun einen überkritischen Wert[12], so treten i. a. gedämpfte Oszillationen der Funktion χ auf, solange α_s überkritisch ist, d. h. solange $\tilde{q} < \lambda$. Für große m_R, d. h. für kleine Steigungen der Funktion χ bei $\tilde{q} = 0$, ist aber χ eine monotone Funktion. Dasselbe ist der Fall für Lösungen mit großem negativen m_R. Im Bereich überkritischer Kopplung unterhalb λ kann die Funktion χ bei hinreichend großer (positiver oder negativer) Steigung $\chi'(0)$ den Wert π passieren. Daher ist es möglich, daß Lösungen mit verschiedenen $\chi'(0)$ bei der Skala λ denselben Wert $\chi(\lambda)$ haben. So gehören zu einer monotonen Lösung, die bei λ nahe an π ist, weitere, die den Wert π

[12]Gemeint ist natürlich wieder der maximale Wert der impulsabhängigen Kopplung, die in unseren Rechnungen wie oben beschrieben angenommen wird.

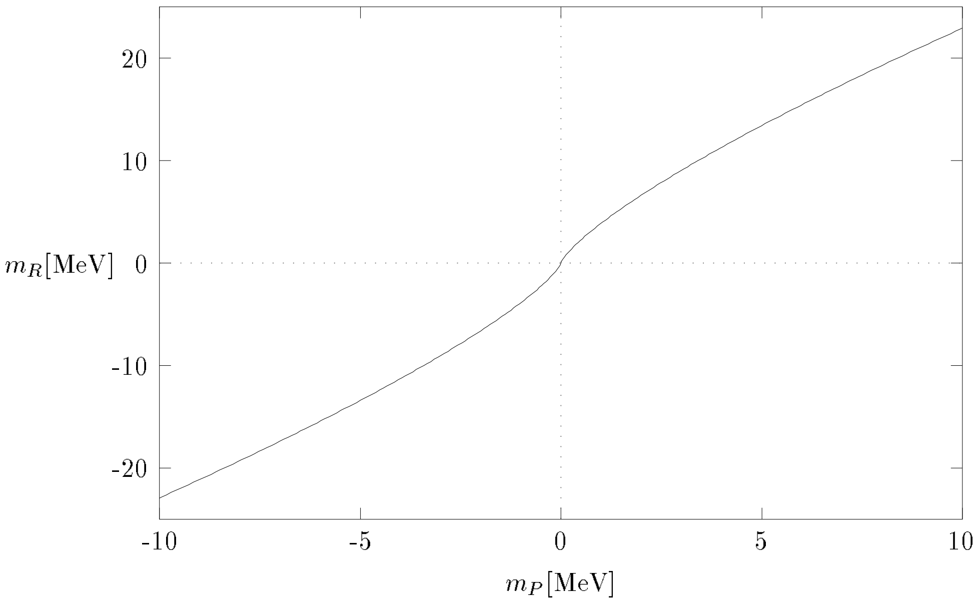


Abbildung 2.8. Zusammenhang zwischen renormierter Masse m_R und perturbativer Masse m_P bei unterkritischer Kopplung (Kopplungsverlauf B und $\alpha_s(0) = 0,3$)

einmal, zweimal, dreimal usw. passiert haben. Zu jedem vorgegebenen Wert $\chi(\lambda)$ nahe π einer monotonen Lösung gibt es aber nur endlich viele solcher Kurven mit größerem $\chi'(0)$, denn solche Kurven werden in der Nähe von π stark gedämpft und sind nach einer Reihe von Oszillationen näher an π als die vorgegebene monotone Lösung, berühren diese also nicht. So kommt es also, daß χ–Kurven mit verschiedenen Werten der renormierten Masse bei der Skala $\tilde{q} = \lambda$ dieselbe perturbative Masse aufweisen.

In Abb. 2.9 ist der Zusammenhang zwischen perturbativer Masse m_P und renormierter Masse m_R im überkritischen Fall aufgetragen. Dazu wurde die Gleichung bis zum Punkt λ mit variierenden Anfangsbedingungen bei $\tilde{q} = 0$ aufintegriert. Wir haben hierbei für den Verlauf der Kopplung die oben beschriebene Form B (siehe Abb. 2.1) gewählt, weil bei dieser der Effekt deutlicher zu Tage tritt. Das Ergebnis ist aber mit Kopplungsverlauf A qualitativ dasselbe. Die Kopplungsstärke ist mit $g(0) = 0,4$ (entsprechend $\alpha_s(0) = 0,94$) gewählt. Die Abhängigkeit des aufgetragenen Zusammenhangs von Kopplungsstärke und –verlauf untersuchen wir unten. Die Werte von $M(\lambda^2)$ und $\widetilde{M}(\lambda^2)$ unterscheiden sich erst bei $m_R > 400$ MeV merklich voneinander, im interessanten Bereich der Kurve ist die Definition der perturbativen Masse also unproblematisch. Die so generierte Kurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Dies resultiert aus der Tatsache, daß die Gleichungen (2.42,2.43) invariant unter der Ersetzung

$$\phi \to 2\pi i - \phi \tag{2.94}$$

sind. Die Massenfunktion $M(q^2)$ ändert unter dieser Ersetzung ihr Vorzeichen. Mit m_c ist die kritische Masse bezeichnet, bei der zum ersten Mal zwei weitere Lösungen auftreten, die bei λ dieselbe Masse aufweisen, aber bei $\tilde{q} = 0$ verschiedene renormierte Massen haben. Bei den beiden an diesem Punkt neu auftretenden Lösungen ist die

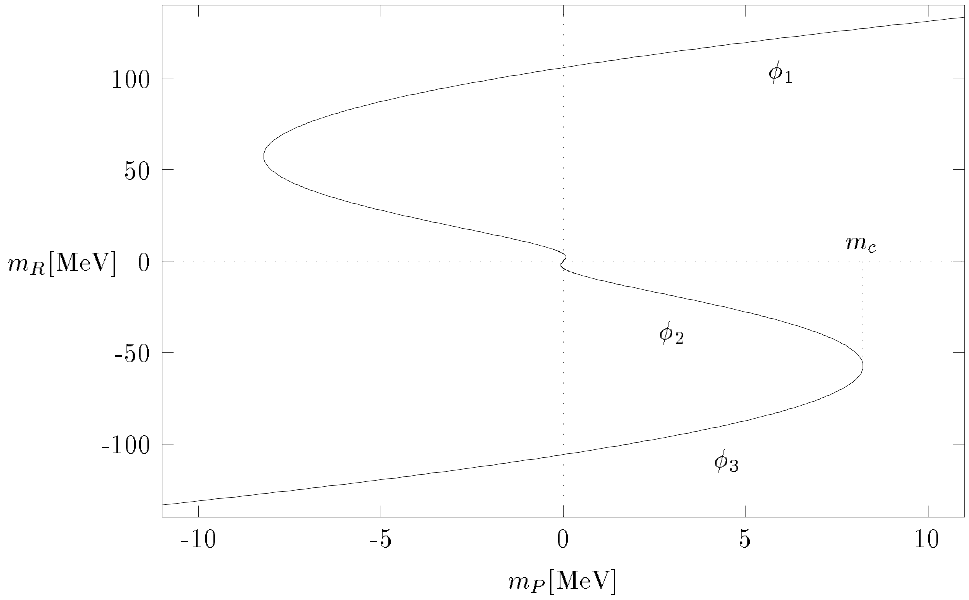


Abbildung 2.9. Zusammenhang zwischen renormierter Masse m_R und perturbativer Masse m_P bei Kopplungsverlauf B mit $\alpha_s(0)=0,94$

renormierte Masse m_R offenbar negativ, wie wir dies auch aufgrund der obigen Diskussionen der ϕ–Kurven zu erwarten haben, weil diese Kurven bei $\chi(0) = 2\pi$ starten müssen. Der Vollständigkeit halber ist in Abb. 2.9 auch der Bereich negativer perturbativer Masse m_P dargestellt, dieser hat aber keine physikalische Bedeutung. Wir bezeichnen, [Gribov91] folgend, die oben diskutierten Klassen von Lösungen mit verschieden vielen π–Durchgängen der Funktion χ mit ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 usw., wie in Abb. 2.9 angedeutet. Die Typen ϕ_1 und ϕ_3 zeigen den üblichen, d. h. auch im unterkritischen Fall beobachteten Zusammenhang zwischen renormierter und perturbativer Masse; bei ihnen steigt die perturbative Masse mit wachsender renormierter Masse an. Beim Typ ϕ_2 hängen m_R und m_P gerade in umgekehrter Weise zusammen.

Die Kurve zeigt eine interessante Selbstähnlichkeit. In Abbildung 2.10 ist eine Vergrößerung des in Abbildung 2.9 nicht mehr aufzulösenden Bereichs kleiner m_R und m_P dargestellt. Beide Abbildungen zeigen verschiedene Ausschnitte derselben Kurve! Eingetragen ist hier nun der Punkt m_c', an dem der zweite Phasenübergang stattfindet. An dieser Stelle treten wieder zwei weitere Lösungen mit verschiedenen m_R auf, die bei λ dieselbe Masse aufweisen. Im Grenzwert $m_P \to 0$ gibt es eine unendliche Serie von solchen Phasenübergängen.

Die kritischen Massen m_c und m_c', bei denen die Phasenübergänge stattfinden, hängen natürlich von Größe und Verlauf der Kopplung g ab. Wir untersuchen nun, wie die Lage des ersten und des zweiten kritischen Punktes bei unseren beiden Modellen für den Kopplungsverlauf mit der Kopplungsstärke variiert. Die Stärke der Kopplung charakterisieren wir durch ihren Wert bei $\tilde{q} = 0$, durch die Konstruktion (siehe Abschnitt 2.4.2) ist dann der Verlauf festgelegt.[13] Abbildung 2.11 zeigt die erste kritische Masse

[13]Unsere Definition der perturbativen Masse involviert die Skala λ, bei der die Kopplung gerade

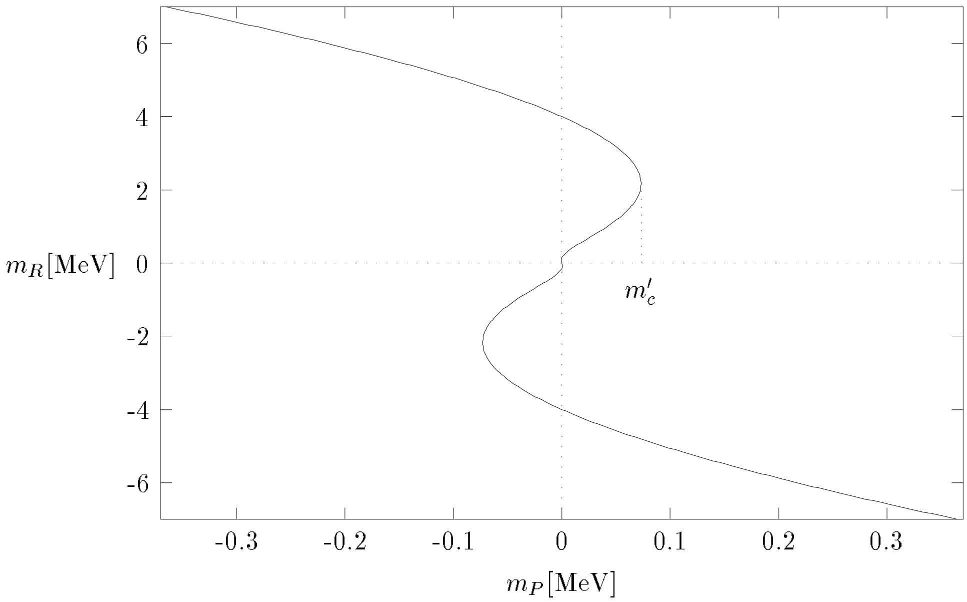


Abbildung 2.10. Zusammenhang zwischen renormierter Masse m_R und perturbativer Masse m_P bei Kopplungsverlauf B und $\alpha_s(0) = 0,94$, Ausschnittsvergrößerung von Abb. 2.9

m_c als Funktion der Kopplungsstärke. Unterhalb der kritischen Kopplung treten überhaupt keine Phasenübergänge auf, die kritische Masse nimmt also erst oberhalb von g_c von Null verschiedene Werte an. Sie steigt dann monoton mit der Kopplung, wie dies auch zu erwarten ist. Das Abflachen und spätere Abfallen der kritischen Masse (bei Verlauf B oberhalb von $g \simeq 1,1$ und bei Verlauf A oberhalb von $g \simeq 1,5$) ist verknüpft mit einer Beobachtung, die wir schon in Abschnitt 2.3.2 gemacht haben. Dort hatten wir nämlich gesehen, daß das überkritische Verhalten, namentlich das Oszillieren der Funktion ϕ um den Wert $i\pi$, bei einer sehr großen Kopplung $g > 1 + \sqrt{2/3}$ wieder aufhört. Wäre die Kopplung als Funktion von $\tilde{q}$ konstant und die Skala λ willkürlich z. B. als 1 GeV gewählt, so würde die kritische Masse in der Tat bei $g = 1 + \sqrt{2/3}$ wieder auf Null zurückgehen, das Maximum der Kurve läge genau bei $g = 1$. Bei unseren Ansätzen für die Kopplung ist aber auch im Fall $g(0) > 1,82$ ein Oszillieren der Funktion ϕ über einem bestimmten Impulsintervall möglich. Wichtig ist, daß dies für alle denkbaren stetigen Kopplungsverläufe so ist. Das Auftreten der Oszillationen und damit der Phasenübergänge hängt also nicht von einem bestimmten Verlauf der Kopplung oder gar einem bestimmten Wert bei irgendeiner Skala ab. Es ist nur notwendig, daß auf einem oder mehreren Intervallen unterhalb λ die Kopplung g Werte zwischen 0,18 und 1,82 annimmt.

Wir stellen fest, daß die kritische Masse bei nicht allzu großer Kopplungsstärke im Bereich von etwa 10 – 50 MeV liegt. Bei den verschiedenen Ansätzen für die Kopplung

kritisch ist. Diese Skala hängt im Falle des Kopplungsverlaufs A von der gewählten Kopplungsstärke ab, variiert aber mit dieser nicht sehr stark. Das Resultat wird hierdurch qualitativ nicht berührt, quantitativ ist die Abweichung vom Resultat bei einem fest gewählten λ sehr gering.

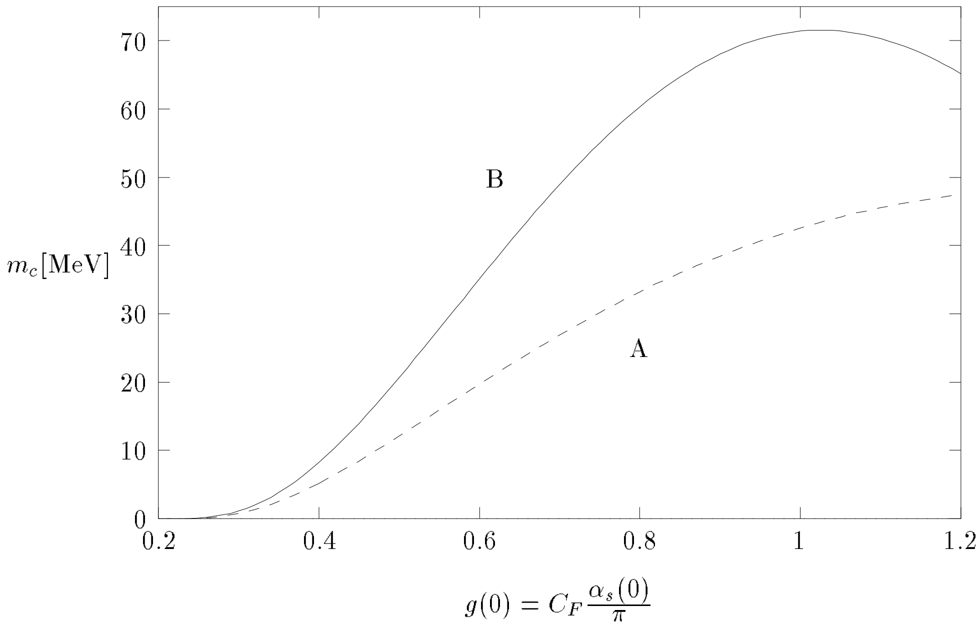


Abbildung 2.11. Kritische Masse m_c des ersten Phasenübergangs als Funktion der Kopplungsstärke mit Kopplungsverlauf A bzw. B

liegt die kritische Masse bei vergleichbaren Werten, zumindest die Größenordnung von m_c wird also durch den Kopplungsverlauf nicht verändert.[14]

Die Abhängigkeit der zweiten kritischen Masse m_c' von der Kopplungsstärke illustriert Abb. 2.12. Im nicht mehr dargestellten Bereich größerer Kopplungsstärke zeigt m_c' dasselbe Verhalten wie schon m_c. So hat m_c' z. B. bei Kopplungsverlauf B ein Maximum bei $g(0) \simeq 1,1$. Auch bei Verlauf A ist das Verhalten analog dem von m_c.

Schließlich wollen wir darauf hinweisen, daß der Wert der zweiten kritischen Masse um fast zwei Größenordnungen kleiner ist als der der ersten. Aus der Tatsache, daß es in der Natur nur ein (nahezu) masseloses Pion gibt, kann man folgern, daß die tatsächliche Masse der leichten Quarks zwischen m_c' und m_c liegen muß, damit nur ein Phasenübergang mit der Generation eines Goldstone–Bosons stattfindet. Diese Aussage allein schränkt aber, wie unser Resultat zeigt, den Bereich der Quarkmasse nicht sehr stark ein.

Wir haben hier die Lösungen betrachtet, bei denen χ von 0 nach π verlief. Die Ursache der Phasenübergänge war aber das Oszillieren der Funktion χ um den Wert π. Daher ist das spezielle Verhalten der Massenfunktion und damit das Auftreten von Phasenübergängen auch bei anderen Lösungen zu erwarten, die bei π enden.

[14] In [Bass] wird argumentiert, daß die kritische Masse m_c im Rahmen von Gribovs Theorie bei der Skala 1 GeV einen Wert von etwa 16 MeV haben sollte. Die dort angeführten Argumente entstammen der chiralen Störungstheorie und behandeln den Pion–Nukleon–Sigmaterm $\sigma_{\pi NN}$. Die Vorhersagekraft von Argumenten, die den Wert von $\sigma_{\pi NN}$ ausnutzen, wird jedoch von vielen Autoren angezweifelt, da sich bei diesem eine Reihe von kleinen Effekten zu einem großen aufsummiert. Wie dem auch sei — der von Bass angegebene Wert fällt tatsächlich in den Bereich der hier berechneten Werte von m_c. Der Vergleich ist möglich, weil unser λ, an dem wir m_P messen, etwa den Wert 1 GeV hat.

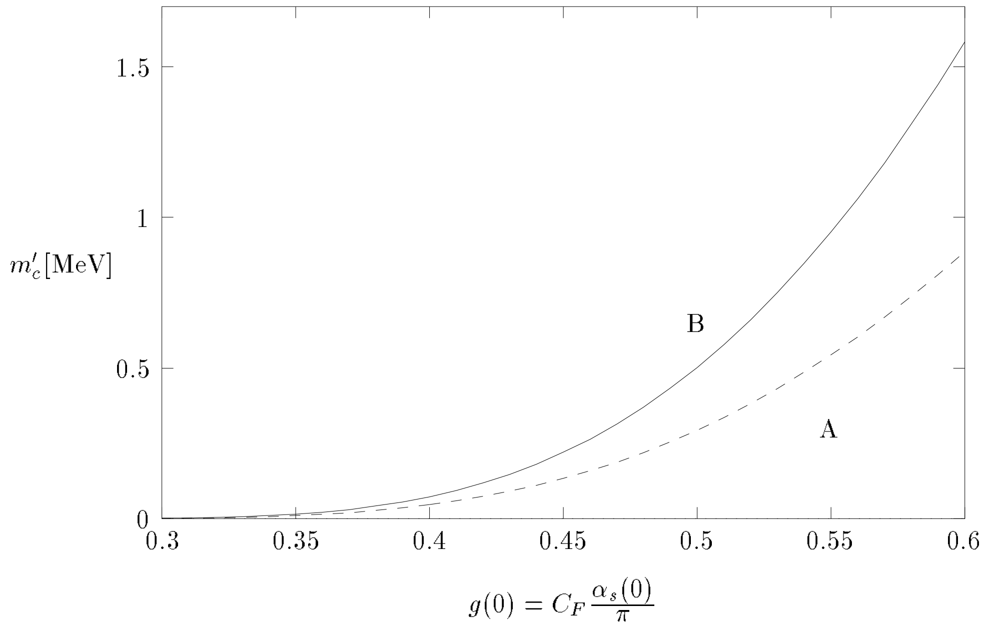


Abbildung 2.12. Kritische Masse m'_c des zweiten Phasenübergangs als Funktion der Kopplungsstärke mit Kopplungsverlauf A bzw. B

2.5 Fortsetzung der Lösungen in der komplexen Ebene

2.5.1 Verfahren und Wege

Nachdem wir oben die Lösungen im Euklidischen betrachtet haben, sollen hier deren analytische Eigenschaften in der gesamten komplexen q–Ebene untersucht werden. Wir werden also die Lösungen wieder mittels Runge–Kutta–Verfahren entlang geeigneter Wege in der Ebene fortsetzen, wobei wir natürlich immer von der imaginären Achse aus starten. Besonders einfach etwa sind Wege, wie sie in Abb. 2.13 dargestellt sind. Wir starten an einem Punkt auf der imaginären Achse, an dem wir die Anfangsbedingungen wie oben vorgeben. In Abb. 2.13 ist exemplarisch der Ursprung gewählt. Wir integrieren die Gleichung erst entlang dieser Achse, um dann auf Viertelkreisen zur reellen Achse hin voranzuschreiten. Hier kann man wieder an beliebiger Stelle auf dem Kreis eine radiale Gerade ansetzen usw. In den Abbildungen unten, insbesondere in den dreidimensionalen Plots, sind weniger Datenpunkte aufgetragen, als tatsächlich nötig sind, um die Lösungen mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen. Dies dient alleine der besseren Lesbarkeit dieser Plots, bei der Berechnung wurde eine deutlich kleinere Schrittweite verwendet. In den Plots ist die Variable q in GeV angegeben.

Wir werden öfters feststellen, daß die zu untersuchenden Funktionen Schnitte in der komplexen Ebene haben. Mit jedem Schnitt ist die Existenz verschiedener Blätter verbunden, auf denen die analytische Struktur eine völlig verschiedene sein kann. Schon bei wenigen Polen und Schnitten kann die Situation sehr kompliziert werden. Ich werde in diesen Fällen meist nicht die gesamte Struktur schildern, wenn etwa schon die Existenz eines Poles die jeweilige Lösung als unphysikalisch disqualifiziert.

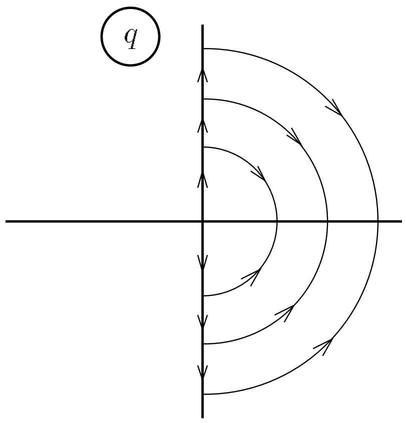


Abbildung 2.13. Typische Integrationswege in der q–Ebene

2.5.2 Die Kopplung in der q-Ebene

Das Verhalten der Kopplungskonstanten ist durch die Renormierungsgruppengleichungen nur für große raumartige q^2 festgelegt. Die in Ein–Schleifen–Näherung gültige Formel (1.12) kann aber offenbar nicht eindeutig analytisch fortgesetzt werden. Für den Gebrauch in unseren Rechnungen könnten wir nun einen von vielen in der Literatur vorgeschlagenen Ansätzen für die Kopplung in der komplexen q–Ebene machen. Viele Fortsetzungen der Formel (1.12) schaffen aber zusätzliche Komplikationen, weil sie Schnitte in $\alpha_s(q^2)$ induzieren. Außerdem handelt man sich bei willkürlich gewählten Fortsetzungen der Kopplung zusätzliche Parameter ein. Um dies zu vermeiden, benutzen wir bei der Fortsetzung der Lösungen in der q–Ebene schlicht eine konstante Kopplung, die wir hier meist überkritisch wählen. Die Motivation hierfür ist, daß wir einerseits das überkritische Verhalten im Infraroten berücksichtigen wollen und andererseits annehmen, daß ein langsames Variieren der Kopplung im Bereich größerer q^2 die analytische Struktur der Lösungen nicht qualitativ beeinflußt. Es wird sich zeigen, daß Pole und Schnitte der Lösungen gerade im Bereich relativ kleiner $|q|$ auftreten. Die Herleitung der Gleichung erforderte aber die Grundannahme, daß gerade in diesem Bereich die Kopplung nur schwach variiert und für $|q| \to 0$ gegen eine Konstante strebt. Es erscheint also plausibel, daß eine konstante Kopplung für die Untersuchung der analytischen Struktur geeignet ist.

Der Verlauf der Lösungen ist bei konstanter statt variierender Kopplung natürlich nicht exakt derselbe, die oben aufgeführten Klassen von Lösungen bleiben aber bestehen. Wir haben allerdings in jedem einzelnen Fall zu überprüfen, daß die Lösungen, die wir im Euklidischen mit variierendem g gefunden haben, auch bei konstantem g existieren und dieselben Anfangsbedingungen gewählt werden können. In einigen Fällen ist eine Änderung der Anfangsbedingungen erforderlich.

2.5.3 Die analytische Struktur der Lösungen

Oben haben wir drei verschiedene Klassen von Lösungen der Gleichung im Euklidischen unterschieden, deren analytische Struktur wir nun der Reihe nach untersuchen wollen.

Wir beginnen mit der Fortsetzung der Lösungen, die auch in [Gribov91] diskutiert werden. Diese starteten bei $\phi = 0$ für $q = 0$ mit positiver oder negativer Ableitung ϕ' respektive renormierter Masse m_R. Sie besitzen einen Pol auf der positiven reellen Achse und einen daran anschließenden Schnitt entlang dieser Achse.[15] Die analytischen Eigenschaften auf der negativen reellen Achse sind analog. Unsere Untersuchungen zeigen, daß diese Lösungen in der komplexen q–Ebene keine weiteren Singularitäten besitzen.[16] Dies wurde in [Gribov91] angenommen, konnte aber dort nicht bewiesen werden. Zur Illustration dieses Resultats zeigt Abb. 2.14 die Funktion $\Im\mathrm{m}\,\phi$ in der komplexen Ebene für die in Abb. 2.3 gezeigte (und als Typ ϕ_1 bezeichnete) Lösung. Die Anfangsbedingungen sind dieselben wie in Abb. 2.3, also insbesondere $m_R = 100$ MeV. Der Schnitt ist klar erkennbar. Die Funktion ϕ ist entlang der reellen Achse

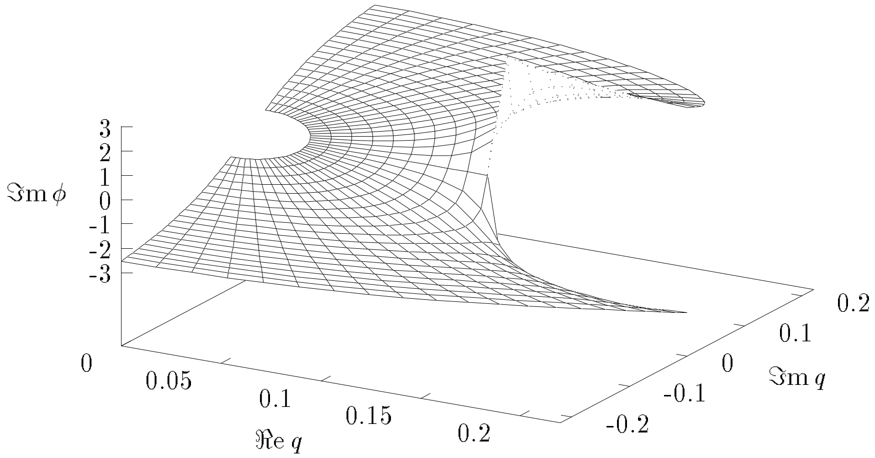


Abbildung 2.14. Fortsetzung der Funktion $\Im\mathrm{m}\,\phi$ der Lösung von Abb. 2.3 mit Schnitt auf der reellen q–Achse

unterhalb dieses Schnittes rein reell. Am Beginn des Schnittes liegt ein Pol bei $q = m^*$ (in unserem Beispiel $m^* \simeq 128$ MeV). Das illustrieren wir anhand der Funktion $\Re\mathrm{e}\,p$, die in Abb. 2.15 über einem Ausschnitt der q–Ebene um diese Stelle aufgetragen ist. Die Funktion ρ hat hier eine Nullstelle, die Green–Funktion also einen Pol, wenn man etwa $\rho(0) = 1$ wählt. Die analytischen Eigenschaften in der Halbebene mit $\Re\mathrm{e}\,q < 0$ sind analog (bzw. symmetrisch), d. h. auf der reellen Achse liegt ein Pol, an den sich ein Schnitt anschließt, sonst treten keine Singularitäten auf.

Betrachtet man nun jedoch die Struktur auf unphysikalischen Blättern des Schnitts, so findet man durchaus auch bei diesen Lösungen Singularitäten. Läuft man etwa auf einem hinreichend großen Kreis von der unteren Halbebene kommend gegen den Uhrzeigersinn um den Pol bei m^* herum und von diesem Kreis auf Radien nach innen, so findet man Pole im ersten und zweiten Quadranten. Diese liegen bei kleiner Kopplung im zweiten Quadranten und wandern bei steigender Kopplung in den ersten Quadranten. Der Übergang vom zweiten Quadranten in den ersten findet erst bei Kopplungen

[15] Die Lage dieses Schnittes wird natürlich durch die Wahl unserer Integrationswege bestimmt, die aus dem ersten und vierten Quadranten auf die reelle Achse zu verlaufen.

[16] Das gilt auf den physikalischen Blättern des Schnitts, s. u.

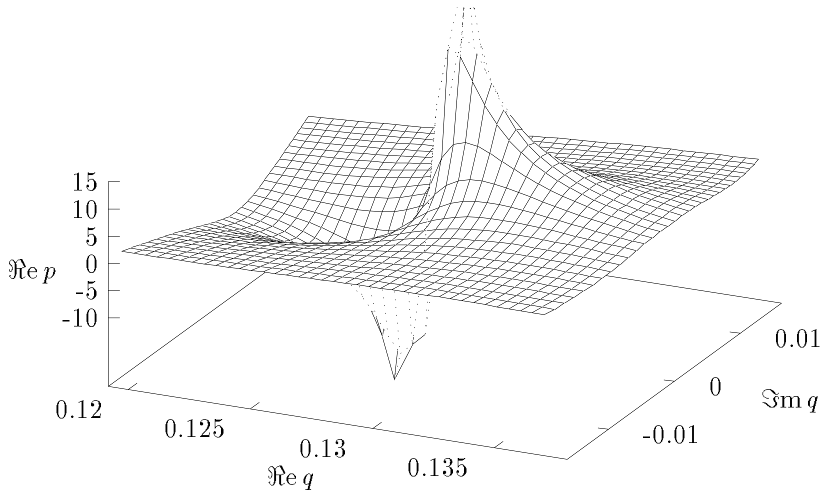


Abbildung 2.15. Pol der Funktion $\Re\mathrm{e}\, p$ auf der reellen Achse, Fortsetzung der Lösung von Abb. 2.3

von etwa $g \sim 0,65$ statt, also im überkritischen Bereich. Analog findet man einen Pol im dritten und vierten Quadranten, wenn man von der oberen Halbebene kommend im Uhrzeigersinn um den Pol herum voranschreitet.

Die so beschriebene analytische Struktur trifft auf alle Lösungen der ersten Klasse zu. Auch die in [Gribov91] mit ϕ_2 und ϕ_3 bezeichneten Lösungen haben also dieselbe analytische Struktur. Die Position des Pols auf der reellen Achse kann als Masse m^* des Quarks interpretiert werden. Diese Lösungen sind in der Struktur denen der Störungstheorie ähnlich. Ein Pol auf der Achse entspricht der Propagation des Teilchens, diese Lösungen weisen also kein Confinement auf.

Wenden wir uns nun den Lösungen zu, bei denen im Euklidischen ϕ von $-i\pi$ nach $i\pi$ verlief, siehe Abb. 2.5. Um diese Lösungen zu finden, hatten wir an einem Punkt auf der imaginären Achse, $q_A = ir$, die Anfangsbedingungen $\phi = 0$ und $p = 0$ gesetzt. Es zeigt sich, daß diese Lösungen bei Fortsetzung in die Ebene eine Singularität im ersten Quadranten aufweisen, die genau auf dem Viertelkreis mit Radius r liegt, auf dem die obigen Anfangsbedingungen gewählt wurden. An den Pol schließt sich ein Schnitt an. Die Lage der Singularität wird durch die Wahl von $\phi'(q_A)$ bestimmt. Hat die Ableitung bei q_A einen kleinen Wert, liegt der Pol nahe an der reellen Achse. Durch Wahl eines hinreichend kleinen $\phi'(q_A)$ kann der Pol sogar beliebig nahe an die reelle Achse herangelegt werden. Mit wachsendem $\phi'(q_A)$ bewegt sich der Pol auf dem Viertelkreis in Richtung der imaginären Achse. Als Beispiel zeigen wir in Abb. 2.16 die Funktion $\Im\mathrm{m}\, \phi$ im ersten Quadranten für die Anfangsbedingungen, die auch in Abb. 2.5 verwendet wurden, also ($r = 0,4$ GeV) $\phi(q_A) = 0$, $p(q_A) = 0$ und $\phi'(q_A) = 10$. Die zu erkennenden Schnitte erhalten ihre Form aufgrund der Wahl der Integrationswege. Diese Lösungen haben darüberhinaus weitere Singularitäten. Im ersten Quadranten liegen zwei weitere Pole. In Abb. 2.16 erkennt man diese, wie auch den oben beschriebenen Pol, am leichtesten am Zusammenlaufen der auf der Grundfläche des Plots

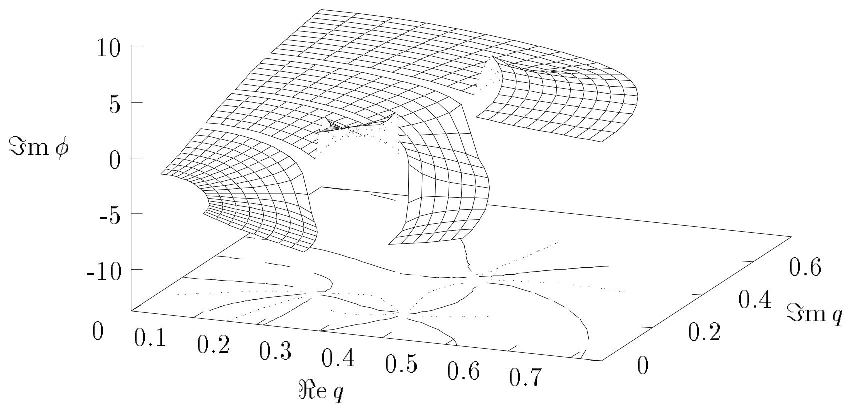


Abbildung 2.16. Funktion $\Im\mathrm{m}\,\phi$ im ersten Quadranten, Fortsetzung der Lösung aus Abb. 2.5

eingezeichneten Niveaulinien.[17] Diese beiden Pole liegen in unserem Beispiel unter einem Polarwinkel von $\varphi_q \simeq 0,45 \cdot \pi/2$ bei Radien von etwa 0,28 GeV und 0,55 GeV. Sie wandern bei kleiner gewählten $\phi'(q_A)$ in Richtung der reellen Achse, der mit kleinerem Radius zu kleineren, der mit größerem Radius zu größeren Radien hin. Bei allen drei Polen hat ρ eine Nullstelle, wenn man bei q_A einen willkürlichen Wert für ρ vorgibt. Wie in Abb. 2.5 zu erkennen, trifft diese Struktur für Viertelkreise als Integrationswege zu. An alle drei Pole schließen sich Schnitte an, deren Lage im Prinzip nicht mehr frei wählbar ist, sondern durch die genaue Topologie der Riemannschen Fläche der Funktionen bestimmt wird. Im vierten Quadranten liegen ebenfalls auf verschiedenen Blättern Pole. Wir verzichten hier aber auf eine detaillierte Beschreibung.

Auch die Lösungen dieser Klasse, die ich als unsymmetrisches Überqueren des Potentialhügels bei $\chi = 0$ bezeichnet hatte, bei denen also $p = 0$ und $\chi = 0$ nicht zusammenfielen, weisen zumindest auf dem Viertelkreis im ersten Quadranten einen Pol auf, auf dem auf der imaginären Achse $p = 0$ gewählt war. Wieder kann dieser Pol bei entsprechend kleinem $\phi'(q_A)$ sehr nah an die reelle Achse gelegt werden.

Die Suche nach Lösungen dieser Klasse, die den Pol auf dem Kreis mit Radius r erst unterhalb der reellen Achse haben, blieb erfolglos. Es gibt keinerlei Anzeichen für die Existenz einer solchen Lösung. (Siehe hierzu auch Abschnitt 2.5.4.)

Bei den Lösungen, bei denen ϕ sich im Euklidischen nahe dem Wert $i\pi$ bewegte, ist die Situation eine ganz ähnliche wie bei der gerade diskutierten Klasse. Auch diese haben oberhalb der reellen Achse einen Pol und einen daran anschließenden Schnitt auf dem Viertelkreis, auf dem auf der imaginären Achse die Anfangsbedingung $\phi = 0$ und $p = 0$ gewählt wurde. Als Beispiel beschreiben wir wieder die Fortsetzung der in Abb. 2.6 gezeigten Lösung. Bei $q_A = i \cdot 0,5$ GeV war dort $\phi = 0$, $p = 0$ und $\phi' = 4$. Der Pol liegt dann bei $\varphi_q \simeq 0,52 \cdot \pi/2$ und $r = 0,5$ GeV; er läßt sich wieder durch

[17] Diese sind natürlich kein ausreichender Beweis dafür, daß an diesen Stellen Pole liegen. Um dies zu beweisen, muß man die Lösung in einem kleinen Bereich um die betreffende Stelle berechnen und plotten. Da aber die meisten Pole aus der Nähe gleich aussehen, zeigen wir die entsprechenden Plots nur in wenigen Beispielen.

Wahl eines kleineren $\phi'(q_A)$ näher an die reelle Achse heranlegen. Im ersten und vierten Quadranten gibt es darüberhinaus weitere Singularitäten und Schnitte. Die Lage der Pole im ersten Quadranten ist in Abbildung 2.17 schematisch dargestellt. Die Pfeile

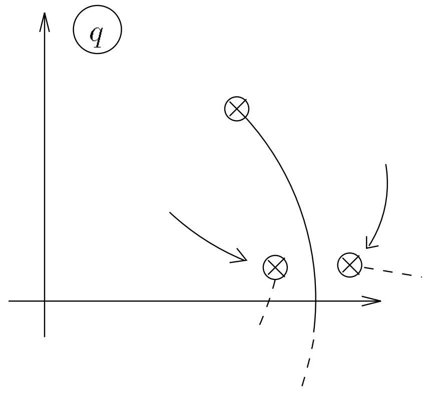


Abbildung 2.17. Lage der Singularitäten im ersten Quadranten der q–Ebene für die Fortsetzung der Lösung aus Abb. 2.6

deuten an, auf welchen Blättern des erwähnten Schnittes die beiden zusätzlichen Pole liegen. An beide schließt sich ein Schnitt an. Die beiden Pole liegen für die exemplarisch gewählten Anfangsbedingungen unter einem Polarwinkel von $\varphi_q \simeq 0,03 \cdot \pi/2$ bei Radien von 0,48 und 0,52 GeV.

In der dritten Klasse gab noch es Lösungen, bei denen die Nullstelle von p nicht mit dem π–Durchgang von χ koinzidierte. Auch diese haben einen Pol mit anschließendem Schnitt im ersten Quadranten bei dem Radius, bei dem p auf der imaginären Achse seine Nullstelle hat.

Abschließend können wir also feststellen, daß die Lösungen der ersten Klasse Pol und Schnitt auf der reellen Achse haben und sonst keine Singularitäten aufweisen. Die gefundene analytische Struktur verleitet dazu, diese Lösungen als „perturbative" Lösungen zu bezeichnen. Die Lösungen der anderen Klassen besitzen generell Pole sowohl im ersten als auch im vierten Quadranten. Entsprechendes gilt für die Halbebene mit $\Re e\, q < 0$.

2.5.4 Suche nach speziellen Lösungen

Bis hierher haben wir die Lösungen der Gleichung gemäß ihrem Verhalten im Euklidischen klassifiziert und die Struktur dieser verschiedenen Typen in der gesamten komplexen Ebene studiert. Es ist nicht ausgeschlossen, daß wir dabei bestimmte exzeptionelle Lösungen übergangen haben, also solche, die vom oben diskutierten typischen Verhalten bei ganz bestimmten Anfangsbedingungen abweichen. Die Suche nach solchen Lösungen möchte ich jetzt schildern. Ich werde dabei nicht auf alle Einzelheiten eingehen, weil die Suche letztlich nicht von Erfolg gekrönt wurde.

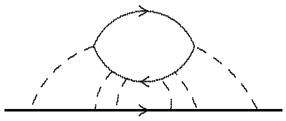
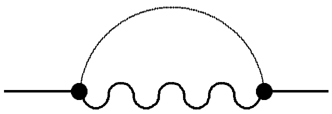
Wie oben bereits angedeutet, habe ich bei der Gleichung ohne Mesonkorrekturen insbesondere nach Lösungen der zweiten und dritten Klasse gesucht, die den angesprochenen Pol erst unterhalb der reellen Achse haben. Diese Suche war motiviert durch eine Anregung Gribovs, der einen Weg vorschlug, die Existenz einer solchen Lösung im Falle der zweiten Klasse zu zeigen. Störungstheoretische Argumente ließen eine derartige Lösung zunächst auch schon für kleine Kopplung möglich erscheinen. Wie ich aber herausfand, war der vorgeschlagene Weg leider nicht gangbar.

Ich habe einerseits mittels Runge–Kutta–Verfahren nach solchen Lösungen gesucht, wobei die Anfangsbedingungen, sprich $\phi'(q_A)$ (s. o.), in sehr kleinen Schritten über einen großen Bereich variiert wurden. Andererseits habe ich hierzu die Routine `COLSYS` angewendet. In beiden Fällen wurde versucht, die Gleichung entlang des Viertelkreises mit Radius $|q_A|$ zur reellen Achse hin aufzuintegrieren. Dabei wurden auch verschiedene Koordinaten benutzt, um auszuschließen, daß das Auftreten der Singularitäten numerisch in irgendeiner Form durch die Wahl der Koordinaten verursacht ist. Mit beiden Verfahren hat sich jedoch kein Hinweis auf die Existenz einer solchen Lösung ergeben.

Kapitel 3

Die Gleichung mit Mesonkorrekturen

Bisher haben wir eine Gleichung untersucht, die besonders die Effekte infraroter Gluonen in Betracht zog, aber auch das Renormierungsgruppenverhalten richtig wiedergab. Nicht berücksichtigt wurden allerdings Diagramme, in denen das Quark mit anderen Quarks oder Antiquarks wechselwirkt, die durch Vakuumpolarisation der emittierten Gluonen entstehen. Eine wichtige Teilmenge dieser Diagramme kann man durch die Emission und Reabsorption eines Mesons durch das Quark beschreiben. Daß also Mesonkorrekturen auftreten, resultiert aus der Vakuumpolarisation der Gluonen im starken Farbfeld des Quarks, wie es die folgenden Diagramme veranschaulichen.

 $\longrightarrow$  (3.1)

Die gestrichelten Linien stellen wieder Gluonen dar, die gewellte Linie repräsentiert ein Meson. Wir wenden uns in diesem Kapitel der Analyse einer von Gribov vorgeschlagenen Modifikation der Gleichung zu, die explizit die Mesonkorrekturen enthält, und studieren die Auswirkungen des Korrekturterms auf die Lösungen der Gleichung.

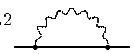
Der Aufbau dieses Kapitels ist ähnlich wie der des vorangegangenen. Wir leiten zuerst die neue Gleichung für die Green–Funktion mit Mesonkorrekturen her und analysieren dann ihre Asymptotik. Beginnend mit dem euklidischen Bereich werden die verschiedenen Lösungen dargestellt. Nach der Diskussion der Massenfunktion und der Struktur der damit verbundenen Phasenübergänge werden die verschiedenen Klassen von Lösungen wieder in der komplexen q–Ebene fortgesetzt, um ihre analytische Struktur zu untersuchen.

3.1 Die neue Gleichung

Die neue Gleichung erhalten wir wieder durch Anwenden des d'Alembert–Operators auf den Ausdrucks für die inverse Green–Funktion. In diesem tritt jetzt aber ein zusätzlicher Term auf, den wir durch

 (3.2)

darstellen wollen. Dabei koppeln wir skalare und pseudoskalare Mesonen an das Quark an. Später werden wir die Motivation hierfür noch weiter beleuchten. Der wichtigste Grund, masselose Mesonen beider Paritäten zu berücksichtigen, ist aber, daß man bei masselosen Konstituenten Paritätsentartung erwartet. Außer der Annahme masseloser Mesonen werden wir noch zwei weitere Näherungen machen. Namentlich berücksichtigen wir nur den Term niedrigster Ordnung in der Quark–Quark–Meson–Kopplung, und werden für diese Kopplung hier keine Renormierungsgruppenverbesserung vornehmen, wie wir es bei der starken Kopplung α_s gemacht hatten. Die nun zu untersuchende Gleichung ist also

$$\partial^2 G^{-1} = g(\partial^\mu G^{-1})\, G\,(\partial_\mu G^{-1}) + \partial^2$$  . (3.3)

Die Ankopplung skalarer und pseudosklarer Mesonen an das Quark wird beschrieben durch die Lagrangedichten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S &= g_S \overline{\psi} \varphi_S \psi & (3.4) \\ \mathcal{L}_{PS} &= g_{PS} \overline{\psi} i \varphi_{PS} \psi\,. & (3.5) \end{aligned}$$

Mit ψ ist das Quarkfeld bezeichnet, die Funktionen φ_S und φ_{PS} sind die im nächsten Kapitel zu diskutierenden Vertexfunktionen der skalaren (S) bzw. pseudoskalaren (PS) Mesonen. g_S und g_{PS} sind die zugehörigen Kopplungsstärken der Wechselwirkung. In Abschnitt 4.3 werden wir zeigen, daß die beiden Vertexfunktionen sich bei verschwindendem Mesonimpuls durch die inverse Green–Funktion G^{-1} ausdrücken lassen als

$$\begin{aligned} \varphi_{PS}(q, p=0) &= C\,\{G^{-1}, \gamma_5\} = -2\,C\,b(q^2)\gamma_5 & (3.6) \\ \varphi_S(q, p=0) &= C\,\{G^{-1}, \gamma_5\}\,\gamma_5 = -2\,C\,b(q^2)\,, & (3.7) \end{aligned}$$

wobei wieder die Parametrisierung (2.24) verwendet ist, C ist eine Konstante. Die Vertexfunktion des skalaren Mesons ergibt sich aus der des pseudoskalaren also einfach durch Multiplikation mit γ_5. Der Faktor i in $\mathcal{L}_{PS}$ gegenüber $\mathcal{L}_S$ ist erforderlich, um die Hermitizität der Wechselwirkung zu gewährleisten, denn

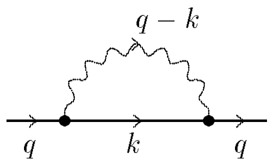
$$\overline{\psi}\gamma_5\psi = \psi^\dagger\gamma_0\gamma_5\psi \tag{3.8}$$

ist antihermitesch. Der Propagator eines pseudoskalaren oder skalaren Mesons, das durch die Klein–Gordon–Gleichung beschrieben wird, ist

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\,, \tag{3.9}$$

im uns interessierenden Fall masseloser Mesonen also $i\,[\,p^2 + i\epsilon]^{-1}$.

Um die Korrekturterme zu berechnen, müssen wir das Diagramm



(3.10)

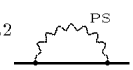
auswerten. Dieses Diagramm ist im Falle pseudoskalarer Mesonen gegeben durch das Integral[1]

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ig_{PS})^2 \left[i\varphi_{PS}\left(\frac{q+k}{2}, q-k\right)\right] G(k) \left[i\varphi_{PS}\left(\frac{q+k}{2}, k-q\right)\right] \frac{i}{(q-k)^2}. \quad (3.11)$$

Wegen des Mesonpropagators $\frac{i}{(q-k)^2}$ stammt der größte Beitrag zum Wert dieses Integrals aus dem Bereich, in dem $k \simeq q$, d. h. in dem $(q-k)^2$ klein ist. Wir wollen nun auf dieses Diagramm den d'Alembert–Operator anwenden. Dabei ergibt sich eine Reihe von Termen, in denen die einzelnen Funktionen im Integranden ein– bzw. zweimal differenziert werden. Der singulärste dieser Terme im Integranden wird dann — ein nicht zu singuläres Verhalten der Vertexfunktionen vorausgesetzt — derjenige Term sein, in dem der Mesonpropagator zweimal differenziert wird, denn dieser ist einer Delta–Funktion proportional. Es ist nämlich, wie wir auch schon im Falle des Photonpropagators in Abschnitt 2.2.1 verwendet haben,

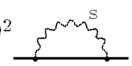
$$\partial^2 \frac{1}{(q-k)^2 + i\epsilon} = -4\pi^2 i\delta^4(q-k)\,. \quad (2.7)$$

Wir vernachlässigen die anderen, weniger singulären Terme und erhalten durch Einsetzen dieser Identität für unseren Korrekturterm im Falle pseudoskalarer Mesonen

∂^2 

$$= -\frac{g_{PS}^2}{4\pi^2} \left[i\varphi_{PS}(q, p=0)\right] G(q) \left[i\varphi_{PS}(q, p=0)\right]. \quad (3.12)$$

Im Falle skalarer Mesonen erhalten wir in ganz analoger Weise den Korrekturterm

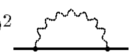
∂^2 

$$= -\frac{g_S^2}{4\pi^2} \varphi_S(q, p=0)\, G(q)\, \varphi_S(q, p=0)\,. \quad (3.13)$$

Die gesamte durch die Ankopplung von skalaren und pseudoskalaren Mesonen induzierte Korrektur ist durch die Summe dieser beiden Ausdrücke bestimmt und damit gegeben durch[2]

∂^2 
$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4\pi^2} \varphi_S^2(q, p=0) \left[g_S^2 G + g_{PS}^2 i\gamma_5 G i\gamma_5\right] && (3.14)\\ &= -\frac{C^2}{\pi^2} \frac{b^2}{a^2q^2 - b^2} \left[g_S^2(a\,\not{q} + b) + g_{PS}^2(a\,\not{q} - b)\right]. && (3.15)\end{aligned}$$

Wir werden nun annehmen, daß die Kopplung skalarer und pseudoskalarer Mesonen an das Quark von gleicher Stärke ist, d. h. daß gilt $g_S = g_{PS}$. Ein Argument, das diese Annahme rechfertigen kann, wird in Abschnitt 4.3 erläutert werden. Somit wird schließlich

∂^2 
$$= -\frac{2}{\mu^2} \frac{1}{a^2q^2 - b^2} a(q^2) b^2(q^2)\,\not{q}\,, \quad (3.16)$$

worin wir die auftretenden Konstanten zusammengefaßt haben zu

$$\mu^2 \equiv \frac{\pi^2}{C^2 g_{PS}^2}\,. \quad (3.17)$$

[1] Zur Notation bzw. Definition der Argumente der Vertexfunktionen φ siehe (4.4,4.5).

[2] Die Funktionen a und b sind Funktionen des Arguments q^2, welches wir hier wieder unterdrücken.

Eine Abschätzung des Wertes von μ erweist sich auf den ersten Blick als nicht ganz einfach. Da das Mesonfeld nur in der Form (3.6) bekannt ist, involviert seine Normierung die Green–Funktion, für deren Bestimmung wir aber gerade μ benötigen. Wie wir nun zeigen wollen, kann man das Problem der Normierung der Vertexfunktion zumindest für die pseudoskalaren Mesonen durch Anwendung der Ward–Identität für den Axialvektorstrom lösen bzw. umgehen. Die pseudoskalaren Mesonen identifizieren wir nämlich mit masselosen Goldstone–Bosonen ($p = 0$), die in der Natur durch fast masselose Pionen verwirklicht sind (siehe Abschnitt 4.3). Wir berechnen die obige Quark–Quark–Meson–Vertexfunktion im Sinne einer Goldberger–Treiman–Relation, was einer Normierung gleichkommt.[3] Der Axialvektorstrom der Quarks ist gegeben durch[4]

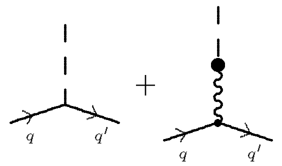
$$J_\mu^5(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu\gamma_5 q(x)\,. \tag{3.18}$$

Der volle Quark–Quark–Axialvektorstrom–Vertex $\Gamma_\mu^5(q,q')$ genügt der Ward–Identität

$$(q-q')^\mu\,\Gamma_\mu^5(q,q') = G^{-1}(q)\gamma_5 + \gamma_5 G^{-1}(q')\,. \tag{3.19}$$

Ist in $\{G^{-1},\gamma_5\} = -2b(q^2)\gamma_5$ nun $b(q^2) \neq 0$, so hat $\Gamma_\mu^5(q,q')$ einen Pion–Pol und läßt sich darstellen als

$$\Gamma_\mu^5(q,q') \quad = \tag{3.20}$$



$$= \quad \gamma_\mu\gamma_5 - f_\pi \frac{(q-q')_\mu}{(q-q')^2}\hat{g}\gamma_5\,, \tag{3.21}$$

worin die Pion–Zerfallskonstante f_π der Definition

$$\langle\pi(q)|J_\mu^5(0)|0\rangle = iq_\mu f_\pi \tag{3.22}$$

genügt. Mit der Ward–Identität (3.19) ergibt sich im Grenzwert $(q-q') \to 0$ wegen (3.6)[5]

$$\hat{g} = \frac{2b(q^2)}{f_\pi}\,. \tag{3.23}$$

Nimmt man nun wieder an, daß pseudoskalare und skalare Mesonen mit der gleichen Stärke koppeln und ersetzt man in obiger Herleitung die Vertexfunktion durch den vollen Quark–Quark–Pion–Vertex $i\gamma_5\hat{g}$, so findet man für μ

$$\mu = \pi f_\pi \simeq 0,3\,\mathrm{GeV}\,. \tag{3.24}$$

Dieser Wert gibt μ wohl nicht mit sehr großer Genauigkeit wieder. Er sollte aber zumindest die Größenordnung richtig treffen. Für die numerische Behandlung benutzen wir für μ Werte zwischen $0,1$ und $0,5$ GeV. Es zeigt sich, daß die Lösungen für verschiedene Werte aus diesem Bereich qualitativ nicht verschieden sind.

[3] Ein ähnliches Vorgehen findet man auch in der Literatur, siehe z. B. [Cornwall].

[4] Wieder vernachlässigen wir die Existenz verschiedener Flavors und damit den Isospin. Üblicherweise tritt in den folgenden Gleichungen der Isospinfaktor $\frac{1}{2}\tau^a$ auf.

[5] Wir setzen den axialen Formfaktor, der gewöhnlich in der Goldberger–Treiman–Relation auftritt, hier als $g_A = 1$.

Nun wollen wir die neue Gleichung in der Parametrisierung (2.28) angeben. Es wird

∂^2  $= \frac{2}{\mu^2}\rho\cosh^2\frac{\phi}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\,\not{p}\,,$ (3.25)

und damit erhält das Gleichungssystem für ϕ und k die Gestalt[6]

$$\ddot{\phi} + 2p\,\dot{\phi} - 3\sinh\phi - \frac{2q^2}{\mu^2}\cosh^2\frac{\phi}{2}\sinh\phi = 0 \tag{3.26}$$

$$\dot{k} + 2k + \beta\left(k^2 + \frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + 3\sinh^2\frac{\phi}{2}\right) + \frac{q^2}{2\mu^2}\sinh^2\phi = 0\,. \tag{3.27}$$

Die zweite dieser Gleichungen kann wieder als Gleichung für die Funktion p dargestellt werden,

$$\dot{p} = 1 - p^2 - \beta^2\left(\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + 3\sinh^2\frac{\phi}{2}\right) - \beta\,\frac{q^2}{2\mu^2}\sinh^2\phi\,. \tag{3.28}$$

Die Herleitung dieser modifizierten Gleichungen aus (3.16) erfolgt völlig analog der der Gleichungen ohne Mesonkorrektur.

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß auch die neue Gleichung invariant gegenüber der Multiplikation der Greenfunktion mit einer Konstanten ist. Die Konsequenz ist dieselbe, die wir im Falle der alten Gleichung in Abschnitt 2.2.3 beschrieben hatten.

3.2 Asymptotisches Verhalten

Auch für die neue Gleichung untersuchen wir zunächst das asymptotische Verhalten der Lösungen, insbesondere im euklidischen Bereich, in dem wir wieder die verschiedenen Klassen von Lösungen unterscheiden wollen.

Das Verhalten für $q \to i\infty$

Wir beginnen mit dem euklidischen Bereich. Die Gleichung mit Mesonkorrekturen hat wie die alte Gleichung für $|q| \to \infty$ Fixpunkte bei

$$\begin{aligned} \phi &= (2n+1)i\pi \qquad (n \in \mathbb{N}) \\ p &= \sqrt{1+3\beta^2}\,. \end{aligned}$$

Um dies zu beweisen, schreiben wir

$$\phi = i(\pi + \psi) \qquad \text{und} \qquad p = p_0 + \hat{p}\,, \tag{3.29}$$

und bestimmen $p_0 = \sqrt{1+3\beta^2}$ aus (3.28). Die asymptotische Gleichung für ψ ist

$$\tilde{q}^2\psi'' + (1+2p_0)\tilde{q}\psi' + 3\psi + \frac{2}{\mu^2}\tilde{q}^2\psi^3 = 0\,. \tag{3.30}$$

[6]Man erinnere sich, daß $q = e^\xi$.

Den führenden Term der Asymptotik erhalten wir mit dem Ansatz $\psi = \tilde{q}^{\delta}$. Es wird nämlich

$$\delta(\delta-1)\tilde{q}^{\delta} + \delta(1+2p_0)\tilde{q}^{\delta} + 3\tilde{q}^{\delta} - \frac{2}{\mu^2}\tilde{q}^{3\delta+2} = 0\,. \tag{3.31}$$

In der alten Gleichung ohne den letzten Term hatten wir die beiden Lösungen $\delta = -1$ und $\delta = -3$ im Grenzwert großer $\tilde{q}$ ($\beta \to 1$) ermittelt aus

$$\delta = -\sqrt{1+3\beta^2} \pm \sqrt{3\beta^2 - 2}\,. \tag{3.32}$$

Betrachten wir den in der neuen Gleichung zusätzlich auftretenden Term als Störung, so erkennen wir unmittelbar, daß er im Fall $\delta = -3$ vernachlässigt werden kann, daher ist

$$\psi(\tilde{q}) \longrightarrow \frac{\nu^3}{\tilde{q}^3} \tag{3.33}$$

weiterhin eine asymptotische Lösung. Diese alleine entspräche dem Fall masseloser Quarks, $m_0 = 0$ (siehe Abschnitt 2.4.1). Auch die Lösung mit $\delta = -1$ geht mit dem Zusatzterm nicht verloren. Setzt man nämlich

$$\psi(\tilde{q}) = \frac{1}{\tilde{q}} \tag{3.34}$$

in die Gleichung (3.30) ein, so ergibt sich die Bedingung

$$(2 - p_0 - \frac{1}{\mu^2})\frac{1}{\tilde{q}} = 0\,. \tag{3.35}$$

Diese ist aber im Limes großer $\tilde{q}$ asymptotisch erfüllt.

Für die Gleichung mit Mesonen tritt jetzt zusätzlich ein neuer Fixpunkt für $\tilde{q} \to \infty$ auf bei $\phi = 0$ und $p = 1$. (Mit diesem gibt es entsprechend der Periodizität der Gleichung Fixpunkte bei $\phi = 2\pi i n$, ($n \in \mathbb{N}$).) Um dies zu zeigen, setzen wir

$$\phi = i\psi \quad \text{und} \quad p = p_0 + \hat{p}\,, \tag{3.36}$$

ψ und $\hat{p}$ klein. Aus (3.28) ergibt sich $p_0 = \pm 1$, und wir werden weiter unten sehen, daß nur $p = 1$ eine stabile Lösung liefert. Wir linearisieren die Gleichung (3.26), das Resultat ist (der Strich ist die Ableitung nach $\tilde{q}$)

$$\tilde{q}^2\psi'' + (1+2p_0)\tilde{q}\psi' + \left(\frac{2}{\mu^2}\tilde{q}^2 - 3\right)\psi = 0\,. \tag{3.37}$$

Mit dem Ansatz

$$\psi(\tilde{q}) = \frac{1}{\tilde{q}^{p_0}} f(\tilde{q}) \tag{3.38}$$

findet man für $f(\tilde{q})$ die Gleichung

$$\tilde{q}^2 f'' + \tilde{q} f' + \left[\frac{2}{\mu^2}\tilde{q}^2 - (3+p_0^2)\right] f = 0\,, \tag{3.39}$$

also für $y = f(x)$, $x = \sqrt{2}\tilde{q}/\mu$, die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{3.40}$$

mit $n = 2$, denn $p_0^2 = 1$. Die Lösung für ψ ist daher

$$\psi(\tilde{q}) = \frac{1}{\tilde{q}}\left[C_1 J_2\left(\frac{\sqrt{2}}{\mu}\tilde{q}\right) + C_2 N_2\left(\frac{\sqrt{2}}{\mu}\tilde{q}\right)\right] \tag{3.41}$$

mit der Bessel–Funktion J_2 zweiter Ordnung und der Neumann–Funktion N_2 zweiter Ordnung, C_1 und C_2 sind reelle Konstanten. Das asymptotische Verhalten dieser Funktionen für $x \to \infty$ ist bestimmt durch

$$J_2(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) \tag{3.42}$$

$$N_2(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{5}{4}\pi\right)\,, \tag{3.43}$$

woraus man mit (3.38) ablesen kann, daß nur $p_0 = 1$ eine stabile Lösung liefert. Die Asymptotik der Funktion p findet man aus

$$\tilde{q}\hat{p}' = -2p_0\hat{p} - \frac{\beta}{\pi\sqrt{2}\mu\tilde{q}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}\tilde{q}}{\mu} - \frac{5}{4}\pi\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}\tilde{q}}{\mu} - \frac{5}{4}\pi\right)\right]^2\,, \tag{3.44}$$

der letzte Summand konvergiert gegen Null, so daß schließlich in führender Ordnung $\hat{p} \sim \tilde{q}^{-2}$. Hieraus wiederum folgt, daß $\rho \sim \exp(-\tilde{q}^{-2}/2)$. ρ strebt also gegen eine Konstante. Wir halten schließlich noch fest, daß das mit den Bessel– bzw. Neumannfunktionen verbundene gedämpfte Oszillieren nicht von der Stärke der Kopplung g abhängt, also auch im unterkritischen Fall auftritt.

Das Verhalten für $|q| \to 0$

In diesem Grenzwert ist das Verhalten der Lösungen der neuen Gleichung genau das gleiche wie bei der alten Gleichung. Der in der neuen Gleichung zusätzlich auftretende Term kann in beiden in Abschnitt 2.3.2 für den Grenzwert $|q| \to 0$ diskutierten Fällen (also für $\phi \to 0$ und für $\phi \to i\pi$) wegen des Faktors q^2 vernachlässigt werden.

3.3 Lösungen der neuen Gleichung im Euklidischen

Auch für die neue Gleichung untersuchen und klassifizieren wir die Lösungen zunächst im Euklidischen, wo wir die Randbedingungen aufgrund der analytischen Eigenschaften einschränken können.

3.3.1 Asymptotische Freiheit

Im Falle der neuen Gleichung sind solche Lösungen asymptotisch frei, die für $\tilde{q} \to \infty$ in einen der Fixpunkte laufen, die auch die alte Gleichung schon besaß. Das asymptotische Verhalten ist bei diesen Lösungen dasselbe wie bei der alten Gleichung und daher kann man mit denselben Schritten wie in Abschnitt 2.4.1 zeigen, daß für große $\tilde{q}$ die Renormierungsgruppengleichungen erfüllt sind.

Diejenigen Lösungen aber, die für $\tilde{q} \to \infty$ im nur in der neuen Gleichung auftretenden Fixpunkt enden, sind nicht asymptotisch frei. Bei diesen nämlich hat die Funktion

ϕ asymptotisch den Verlauf einer Bessel– bzw. Neumannfunktion (siehe (3.41)), insbesondere treten also unendlich viele Nullstellen der Funktion ϕ auf. Dort jedoch hat die Massenfunktion

$$M(q^2) = i\tilde{q} \coth \frac{\phi}{2} \tag{2.69}$$

Singularitäten, so daß die Renormierungsgruppengleichungen ganz offenkundig nicht erfüllt werden.[7]

3.3.2 Die Lösungen im Euklidischen

Hier stellen wir, ähnlich wie in Abschnitt 2.4.4, die verschiedenen Klassen von Lösungen zusammen, die die Gleichung im Euklidischen besitzt. Zu den aus der alten Gleichung bekannten Typen von Lösungen treten nun neue.

Der in der neuen Gleichung zusätzlich auftretende Term (siehe (3.26,3.28)) läßt das in Abschnitt 2.4 beschriebene Potentialbild für die Bewegung des Freiheitsgrades ϕ nun nicht mehr in dieser einfachen Form zu. Die Potentialfunktion V wird explizit vom Impuls q abhängig. Grob gesprochen kann man den Effekt im alten Bild so interpretieren, daß sich an den abfallenden Flanken der Cosinuskurve um $\chi = 0$ zwei „Höcker“ ausbilden, deren Höhe und Position vom Verlauf der jeweiligen Lösung χ abhängen. Der Zusatzterm wirkt sich offenbar bei kleinen $\tilde{q}$ kaum aus. Die Lösungen haben daher in diesem Bereich dieselbe Struktur wie in der alten Gleichung. Andererseits ist der Korrekturterm auch dann klein, wenn $\chi \simeq \pi$. Zudem hängt natürlich der Zusatzterm von der Größe des Parameters μ und damit von der Meson–Quark–Kopplung ab. Im Grenzwert sehr großer μ erhält man die alte Gleichung. Ich beschreibe im folgenden, wie sich die Lösungen für ein μ verhalten, das im physikalisch sinnvollen Bereich liegt, den wir oben grob als $0,1\,\mathrm{GeV} \leq \mu \leq 0,5\,\mathrm{GeV}$ ermittelt haben.

Wir beginnen wieder mit den Lösungen, die für $q = 0$ bei $\chi = 0$ starten und nach $\chi = \pi$ verlaufen. Für große $\chi'(0)$, also kleine m_R, steigt χ schnell an und ist schon bei recht kleinen $\tilde{q}$ nahe π. Daher wirkt sich der Zusatzterm bei diesen Lösungen nur unwesentlich aus. Abbildung 3.1 zeigt eine dieser Lösungen. Sie unterscheiden sich nur unwesentlich von den entsprechenden Lösungen der alten Gleichung. Auch hier ist es bei überkritischer Kopplung wieder möglich, daß die Lösungen den Wert $\chi = \pi$ passieren und sich von oben π nähern. Das daraus resultierende überkritische Verhalten, insbesondere der nichtmonotone Zusammenhang zwischen m_R und m_P sind auch hier gegeben (siehe hierzu den nächsten Abschnitt).

Startet man dagegen mit kleineren $\chi'(0)$ (größeren m_R), so kommt man in einen instabilen Bereich der Lösungsmannigfaltigkeit. Die Lösungen nähern sich erst dem Fixpunkt, beginnen dann aber bei wachsendem $\tilde{q}$ resonanzähnlich zu oszillieren. Ein solches Beispiel ist in Abb. 3.2 gezeigt. Das Verhalten der Funktionen für große $\tilde{q}$ ist unvorhersehbar.

Bei noch kleineren $\chi'(0)$ dagegen streben die Lösungen stabil dem neuen Fixpunkt zu, siehe Abbildung 3.3. Das asymptotische Verhalten ist das einer Besselfunktion. Im nächsten Abschnitt werde ich für verschiedene Werte des Parameters μ angeben, bei

[7] Auch die anderen für asymptotische Freiheit notwendigen Bedingungen an ϕ und p bzw. ρ sind nicht erfüllt, die Pole der Massenfunktion sind aber der offensichtlichste Hinweis, daß die Renormierungsgruppengleichungen nicht reproduziert werden.

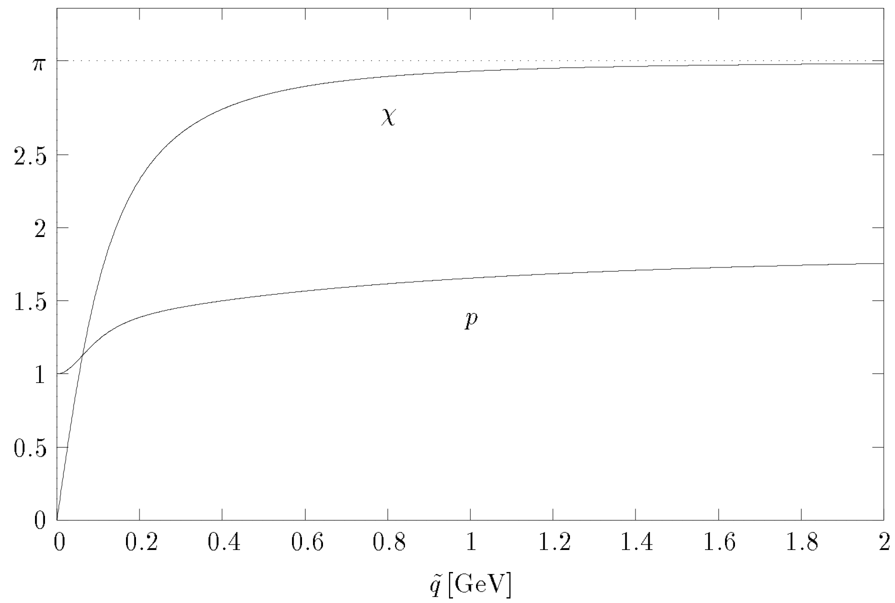


Abbildung 3.1. Lösung für renormierte Masse $m_R = 133$ MeV bei $\mu = 0,2$ GeV und Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$

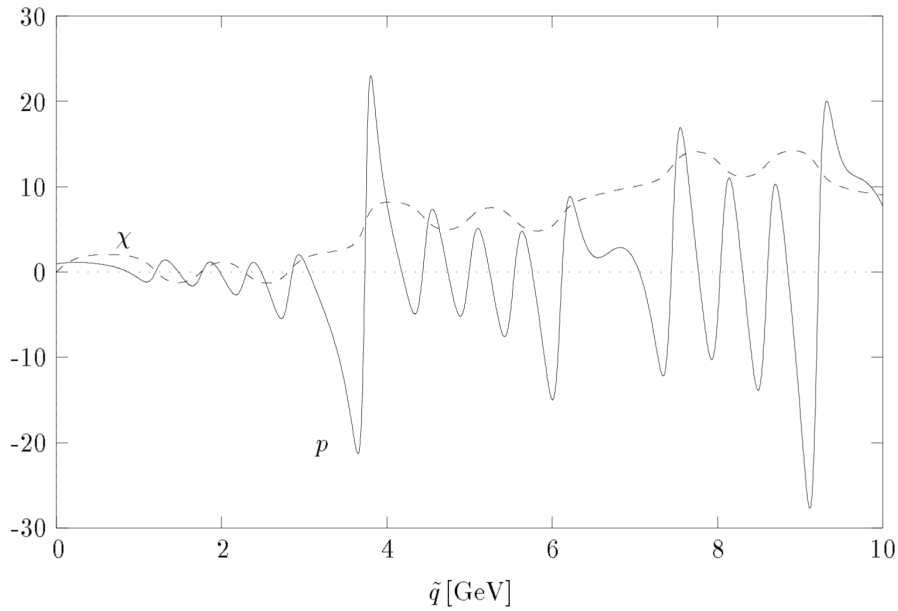


Abbildung 3.2. Lösung mit resonanzähnlichem Verhalten, $m_R = 217$ MeV, bei $\mu = 0,2$ GeV und Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$

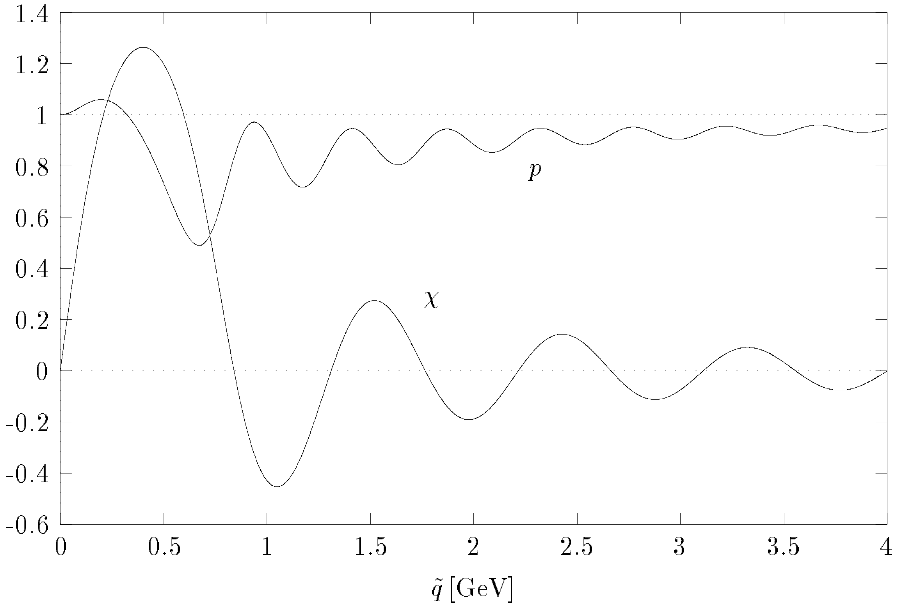


Abbildung 3.3. Oszillierende Lösung, $m_R = 333$ MeV, bei $\mu = 0,2$ GeV und Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$

welchen $\chi'(0)$ bwz. m_R der Übergang zu Lösungen stattfindet, die stabil gegen den neuen Fixpunkt konvergieren.

Nur in der neuen Gleichung treten Lösungen auf, bei denen χ von π nach 0 verläuft und p gegen 1 strebt. Eine solche ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Diese Lösungen sind nicht asymptotisch frei, wir werden uns daher nicht weiter mit ihnen befassen. Ihre Existenz ist es aber, die die Analyse der folgenden Lösungen erschwert.

Auch in der neuen Gleichung gibt es die Lösungen, bei denen χ von $-\pi$ nach π verläuft, siehe Abbildung 3.5 für ein Beispiel. Um diese Lösungen numerisch zu finden, muß man bei endlichem $\tilde{q}_A$ starten, wo man $\chi = 0$ und $p = 0$ setzt, und die Gleichung zu großen und kleinen $\tilde{q}$ hin getrennt aufintegrieren. Bei der alten Gleichung stand bei einmal vorgegebenem Startpunkt ein großer Bereich möglicher $\chi'(\tilde{q}_A)$ zur Verfügung, mit dem die Lösung von einem Fixpunkt in den anderen verlief. Bei der neuen Gleichung ist das nicht mehr der Fall. Vielmehr kann man nur noch einen sehr kleinen Bereich möglicher $\chi'(\tilde{q}_A)$ finden, in dem die Lösungen nicht in einen instabilen Bereich geraten und für große $\tilde{q}$ dann ähnlich verlaufen wie die in Abb. 3.2 gezeigte. Zudem hängt dieser kleine Bereich zur Verfügung stehender $\chi'(\tilde{q}_A)$ auch noch empfindlich vom Verlauf der Kopplung ab. So ist es mir nicht gelungen, Anfangsbedingungen zu finden, die sowohl bei variierender Kopplung (Verlauf A oder B) als auch bei konstanter Kopplung zu einer Lösung dieses Typs führen.

Auch die Lösungen, bei denen χ auf dem ganzen Intervall $\tilde{q} \in [0, \infty[$ nahe π bleibt, gibt es in der neuen Gleichung. In Abbildung 3.6 ist eine solche aufgetragen. Wieder ist

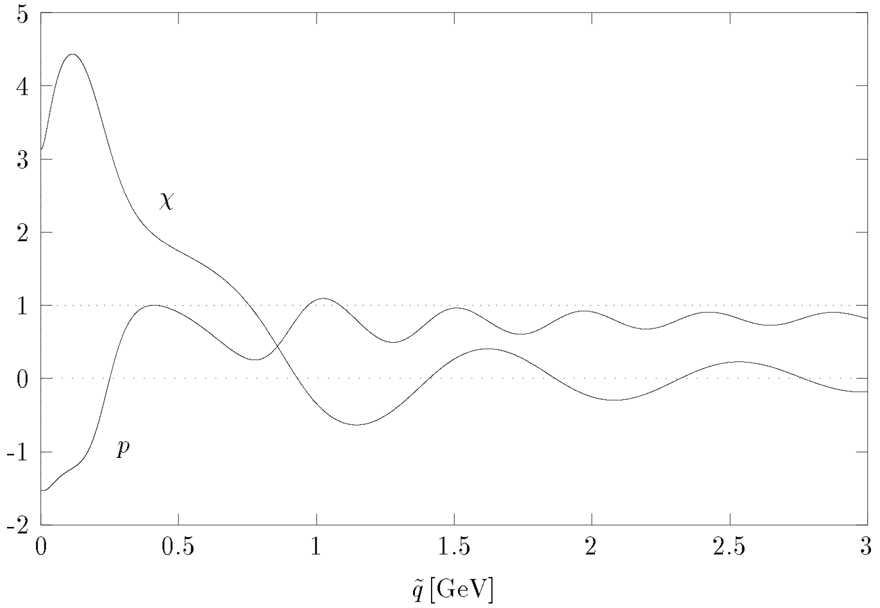


Abbildung 3.4. Bei $\chi = \pi$ startende und um $\chi = 0$ oszillierende Lösung für $\chi(0,25) = \pi$, $\chi'(0,25) = -13$ und $p(0,25) = 0$ bei $\mu = 0,2$ GeV und Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$

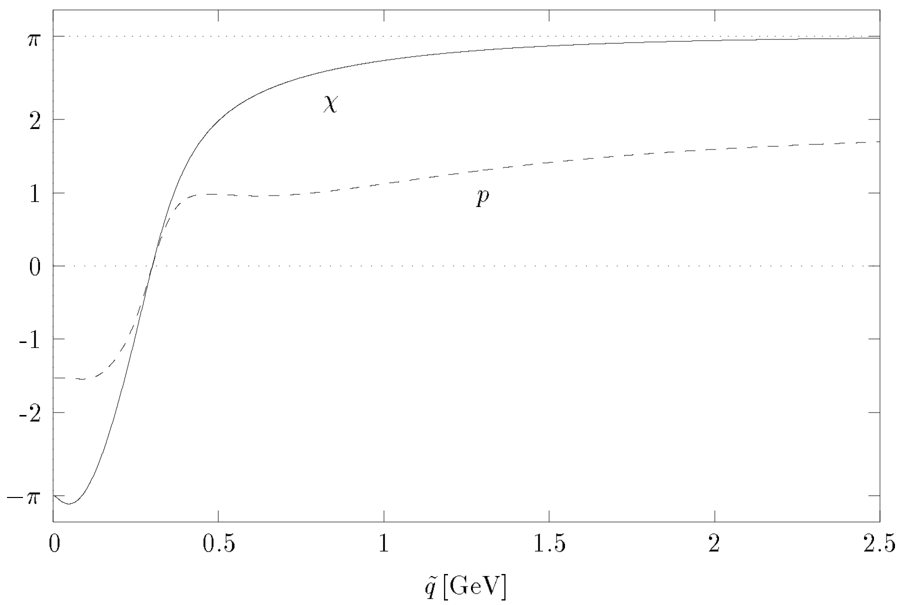


Abbildung 3.5. Von $\chi = -\pi$ nach $\chi = \pi$ verlaufende Lösung für $\chi(0,3) = 0$, $\chi'(0,3) = 18$ und $p(0,3) = 0$ bei $\mu = 0,2$ GeV und Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$

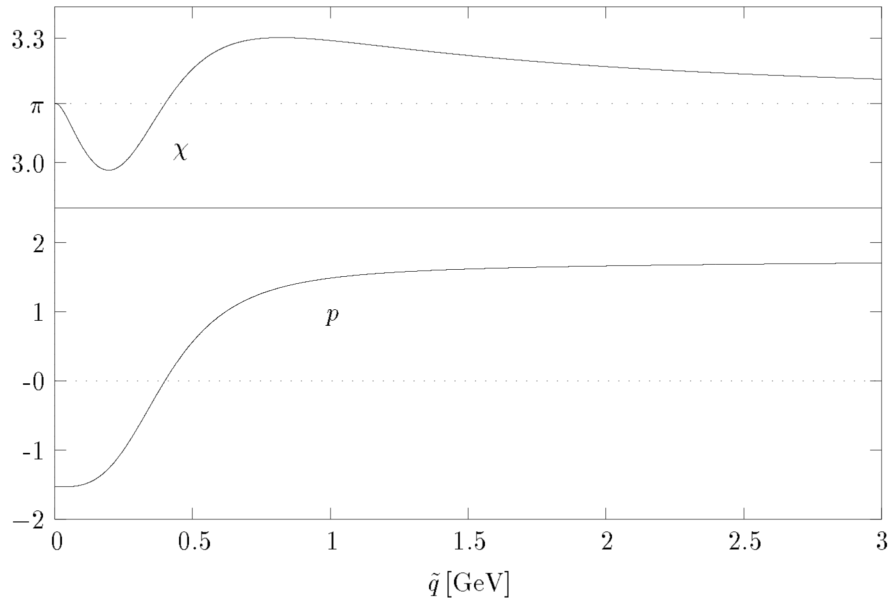


Abbildung 3.6. Lösungen χ und p für $\chi(0,4) = \pi$, $\chi'(0,4) = 1$ und $p(0,4) = 0$ bei $\mu = 0,2$ GeV und Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$

in der neuen Gleichung der Bereich der Anfangsbedingungen, die einen solchen Verlauf induzieren, gegenüber der alten Gleichung stark eingeschränkt.

3.3.3 Massenfunktion und Phasenübergänge

Die Mesonkorrekturen in der Gleichung beeinflussen die in Abschnitt 2.4.5 gefundenen Resultate nur wenig. Der Zusammenhang zwischen renormierter und perturbativer Masse ist im für die Phasenübergänge interessanten Bereich kleiner Massen fast unverändert, obwohl bei größeren Massen die Kurve $m_R(m_P)$ flacher verläuft. Dies erkennt man an Abbildung 3.7, die wieder diesen Zusammenhang zeigt. Aufgetragen ist hier nur der Bereich positiver m_R, aus der Punktsymmetrie der Kurve zum Ursprung kann man aber die Information für negative m_R leicht ableiten. Die durchgezogene Linie ist die entsprechende Kurve im Falle der alten Gleichung (vgl. Abb. 2.9), die man im Grenzwert $\mu \to \infty$ aus der neuen erhält. Der Wert der ersten kritischen Masse weicht hier erst bei $\mu < 0,1$ GeV um mehr als 10 % vom Wert ohne Mesonkorrekturen ab.

Aus diesem Resultat wird unmittelbar klar, daß auch die Abhängigkeit der kritischen Masse von der Kopplung g kaum mit μ variiert. Die in Abb. 2.11 dargestellten Werte haben also auch für die neue Gleichung in fast unveränderter Form Gültigkeit.

Der Bereich großer Massen ist aber aufgrund der Mesonkorrekturen einer dramatischen Veränderung unterworfen. Wie wir nämlich gesehen hatten, existiert die in der Funktion χ von 0 nach π verlaufende Lösung nur für kleine m_R. Oberhalb eines durch μ bestimmten Wertes von m_R verlaufen die Lösungen asymptotisch gemäß (3.41) in den neuen Fixpunkt, d. h. $\chi \to 0$. Dabei hat die Massenfunktion bei jedem Nulldurchgang von χ eine Singularität. Diese Lösungen sind nicht asymptotisch frei und genügen nicht

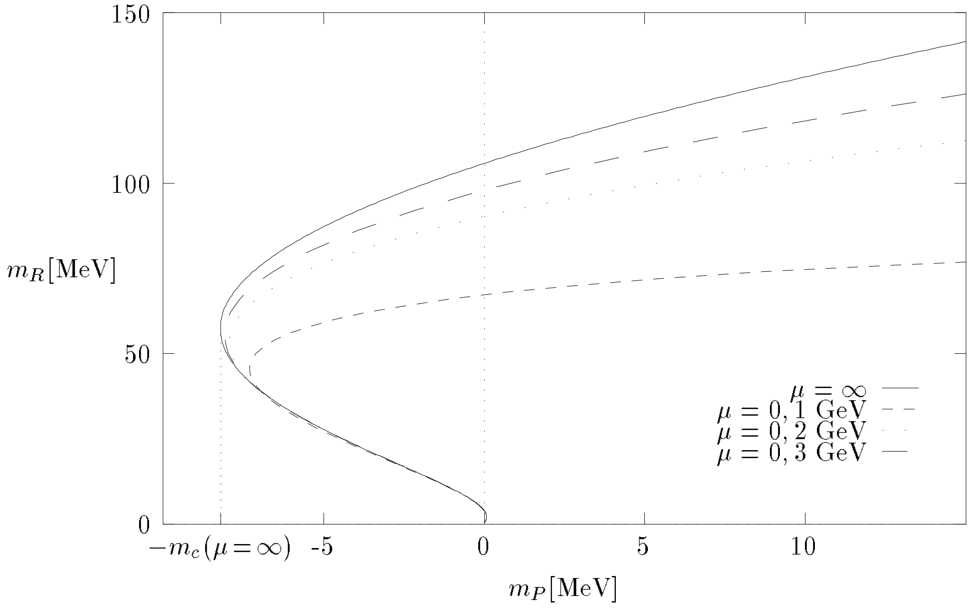


Abbildung 3.7. Auswirkung des Parameters μ auf den Zusammenhang zwischen renormierter Masse m_R und perturbativer Masse m_P bei Kopplungsverlauf B mit $\alpha_s(0)=0,94$

den Renormierungsgruppengleichungen. Somit macht die Definition einer perturbativen Masse keinen Sinn. In Tabelle 3.1 sind für einige Werte von μ die Werte $m_{R\,\max}$ von m_R angegeben, oberhalb derer die asymptotisch freien Lösungen nicht mehr existieren, also der Beginn des oben diskutierten Bereichs instabiler Lösungen. Bei der

μ [GeV]	$m_{R\,\max}$ [MeV]	$m_{R\,\text{Bess.}}$ [MeV]
0,1	80	125
0,2	155	245
0,3	225	355
0,4	260	465
0,5	355	570

Tabelle 3.1. $m_{R\,\max}$ und $m_{R\,\text{Bess.}}$ für einige Werte von μ

Berechnung wurde Kopplungsverlauf A mit $\alpha_s(0) = 0,8$ verwendet. Die Werte von $m_{R\,\max}$ sind mit einer Genauigkeit von etwa ± 5 MeV bestimmt. Das Einsetzen des instabilen Verhaltens macht sich zuerst nur bei sehr großen $\tilde{q}$ bemerkbar, was die exakte Feststellung dieser Werte erschwert. Es ist überraschend zu sehen, daß die Massen m_R, oberhalb derer keine asymptotisch freien Lösungen mehr existieren, bei wahrscheinlichen Werten für μ in etwa in den Bereich einer Konstituentenmasse (ca. 1/3 GeV) fallen.

In Tabelle 3.1 sind außerdem die im vorangegangen Abschnitt versprochenen Werte

$m_{R\,\mathrm{Bess.}}$ eingetragen, oberhalb derer die Lösungen stabil gegen den neuen Fixpunkt konvergieren. Auch diese sind mit einer Genauigkeit von etwa ± 5 MeV bestimmt. Die beiden Massenwerte in der Tabelle grenzen für das jeweilige μ den Bereich der Anfangsbedingungen ein, die die instabilen Lösungen induzieren.

3.4 Fortsetzung der Lösungen in der komplexen Ebene

Das Vorgehen ist hier analog dem des Falles ohne Mesonkorrekturen. Bei allen Polen, die ich in diesem Abschnitt erwähne, handelt es sich um Nullstellen der Funktion ρ, also tatsächlich um Pole der Green–Funktion.

3.4.1 Fortsetzung der gefundenen Lösungen

Wir beginnen wieder mit der Fortsetzung der Lösungen, bei denen auf der imaginären Achse χ von Null nach π oder $-\pi$ verlief, vgl. Abb. 3.1. Es zeigt sich, daß sie dieselbe analytische Struktur aufweisen wie in der Gleichung ohne Mesonkorrekturen. Es liegt ein Pol auf der positiven reellen Achse mit einem daran anschließenden Schnitt. (Analoges gilt für die negative reelle Achse.) Darüberhinaus gibt es keine weiteren Singularitäten in der komplexen Ebene. Dies trifft wieder sowohl auf die in χ monotonen Lösungen (Typ ϕ_1) als auch auf die oszillierenden Lösungen (Typ ϕ_2, ϕ_3 usw.) zu. Da das Verhalten also analog zu dem in der alten Gleichung ist, verzichten wir hier auf eine graphische Darstellung und verweisen auf die entsprechenden Abbildungen 2.14 und 2.15 in Abschnitt 2.5.3.

Verringert man, ausgehend von diesen Lösungen, den Wert von $\phi'(0)$, so kommt man zu den Lösungen, die im Euklidischen instabil waren, und schließlich weiter zu denen, die dem neuen Fixpunkt $\phi = 0$ zustrebten. Die Unterschiede hierzwischen treten aber erst bei größeren Impulsen auf, so daß es nicht verwunderlich ist, daß alle diese Lösungen für kleine $|q|$ dieselbe, gerade beschriebene analytische Struktur haben. Erst bei größeren $|q|$ macht sich das unterschiedliche Verhalten durch Pole und Schnitte bemerkbar, die auf den Viertelkreisen liegen, auf denen ϕ im Euklidischen seine Nulldurchgänge hat.

Als nächste untersuchen wir die Lösungen, bei denen im Euklidischen ϕ auf dem Intervall $\tilde{q} \in [0, \infty[$ von $-i\pi$ nach $i\pi$ verlief. Wir illustrieren die Lage der Singularitäten wieder an einem Beispiel. Da wir bei der Fortsetzung eine konstante Kopplung annehmen, können wir jetzt nicht dieselben Anfangsbedingungen wählen wie im Beispiel der Abb. 3.5, sondern müssen die Anfangsbedingungen ändern, um bei konstanter Kopplung eine Lösung dieser Klasse zu erhalten. Für unser Beispiel setzen wir bei $q_A = ir = i \cdot 0,3$ GeV die Werte $\phi = 0$, $p = 0$ und $\phi' = 11,5$. Bei der alten Gleichung lag bei Lösungen dieser Klasse typischerweise im ersten Quadranten ein Pol auf dem Kreis mit Radius r. Der Pol existiert auch hier, liegt aber ein wenig neben dem Kreis, nämlich in unserem Beispiel, angegeben in Polarkoordinaten, bei $|q| = 0,33$ GeV und $\varphi_q = 0,60 \cdot \pi/2$. Um die weiteren Singularitäten wenigstens kurz zu beschreiben, veranschaulichen wir diese schematisch in Abbildung 3.8. Der beschriebene Pol trennt die Wege a und b in der Ebene. Läuft man auf dem Weg a um den Pol herum, findet man auf radialen Wegen nach innen keine weiterer Singularitäten. Umläuft man den Pol dagegen gegen den Uhrzeigersinn auf dem Weg b, so trifft man auf zwei Pole nahe der

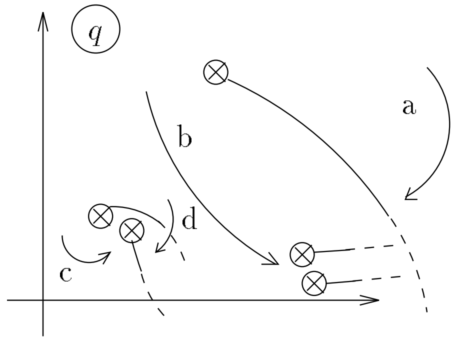


Abbildung 3.8. Lage der Singularitäten im ersten Quadranten der q–Ebene für die Fortsetzung einer Lösung des Typs von Abb. 3.5

reellen Achse, nämlich bei Radien von 0,32 und 0,33 GeV und Winkeln von respektive $\varphi_q = 0,08 \cdot \pi/2$ und $\varphi_q = 0,025 \cdot \pi/2$. Auf diesem Blatt liegt ein weiterer Pol bei $|q| = 0,18$ GeV und $\varphi_q = 0,45 \cdot \pi/2$. An ihn schließt sich ein Schnitt an, auf dessen einem Blatt (Weg c) ein Pol liegt, auf dem anderen (Weg d) nicht.

Es ist nicht ganz leicht, überhaupt geeignete Anfangsbedinungen für die Lösungen dieser Klasse zu finden. Eine systematische Analyse des Zusammenhangs zwischen der Lage der Singularitäten und den Anfangsbedingungen erweist sich leider als schwer durchführbar.

Nun wollen wir die Lösungen untersuchen, bei denen im Euklidischen ϕ nahe $i\pi$ bleibt. Bei der Fortsetzung findet man i. a. Pole im ersten Quadranten der q–Ebene. Im Falle der alten Gleichung lag immer ein Pol auf dem Viertelkreis, auf dem im Euklidischen $\phi = i\pi$ und $p = 0$ waren. Bei der neuen Gleichung gibt es den Pol auch, er liegt aber nicht mehr genau auf dem Viertelkreis. Es gibt weitere Singularitäten, deren Lage wir für das Beispiel aus Abb. 3.6 schematisch in Abbildung 3.9 zeigen. An alle

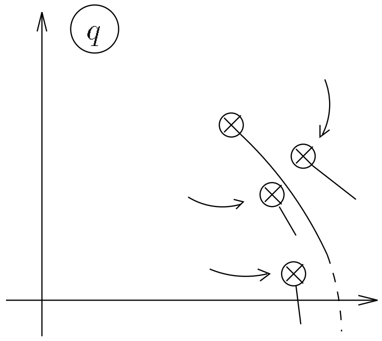


Abbildung 3.9. Lage der Singularitäten im ersten Quadranten der q–Ebene für die Fortsetzung der Lösung aus Abb. 3.6

Pole schließt sich ein Schnitt an, der durch die kurze durchgezogene Linie angedeutet ist. Wie die Schnitte global zu legen sind, hängt wieder von der genauen Topologie der Riemannschen Fläche ab, die wir jetzt nicht erörtern. Die Anfangsbedingungen waren bei $q_A = i \cdot 0,4$ GeV als $\phi = 0$, $p = 0$ und $\phi' = 1$ gewählt, was sowohl bei variierender als auch bei konstanter Kopplung denselben Lösungstyp induziert. Der genannte Pol liegt jetzt knapp neben dem Viertelkreis mit Radius 0,4 GeV, nämlich bei einem Radius von 0,41 GeV unter einem Polarwinkel von $\varphi_q = 0,4 \cdot \pi/2$. Wenn man gegen den Uhrzeigersinn um diesen Pol läuft, findet man zwei weitere Pole bei einem Radius von jeweils 0,4 GeV unter Polarwinkeln von $\varphi_q = 0,22 \cdot \pi/2$ bzw. $\varphi_q = 0,05 \cdot \pi/2$. Läuft man im Uhrzeigersinn um obigen Pol, findet man einen Pol bei $r = 0,44$ GeV und $\varphi_q = 0,25 \cdot \pi/2$ auf dem anderen Blatt. Auf diesen beiden Blättern liegen in radialer Richtung im ersten Quadranten keine weiteren Singularitäten. Im vierten Quadranten liegen Pole, so zum Beispiel auf dem ersten Blatt, also von kleinen $|q|$ kommend, bei $r = 0,44$ GeV und $\varphi_q = 0,25 \cdot \pi/2$. Auf diesem Blatt liegen im vierten Quadranten keine weiterer Pole.

Wir wollen zusammenfassen. Die „perturbativen“ Lösungen haben bei kleinen renormierten Massen dieselben Eigenschaften wie bei der alten Gleichung, nämlich Pol und Schnitt auf der reellen q–Achse. Diese Eigenschaften kennzeichnen bei kleinen $|q|$ auch die Lösungen dieser Klasse mit größeren renormierten Massen, die aber bei größeren $|q|$ Singularitäten und Schnitte im ersten Quadranten haben. Letztere treten genau bei den Lösungen auf, die im Euklidischen resonanzähnliches Verhalten zeigen oder gegen den neuen Fixpunkt ($\phi = 0$) konvergieren.

Die Lösungen der anderen Klassen haben eine ähnliche analytische Struktur wie bei der alten Gleichung, wenn es auch Unterschiede in der Lage bzw. Anzahl der Singularitäten gibt. Alle von mir gefundenen Lösungen dieser Klassen wiesen insbesondere Singularitäten im ersten Quadranten der q–Ebene auf. Im Gegensatz zur alten Gleichung ist es aber nun sehr schwierig, die Lage der Pole in Abhängigkeit von den jeweiligen Anfangsbedingungen zu studieren, weil man dabei einerseits sehr leicht in instabile Lösungen hineingerät und andererseits schon eine leichte Veränderung der Anfangsbedingungen den Lösungstyp völlig ändern kann.

3.4.2 Suche nach speziellen Lösungen

Auch im Falle der neuen Gleichung habe ich nach Lösungen gesucht, die im ersten Quadranten der q–Ebene und auf der reellen Achse keine Singularitäten haben. Die Suche nach solchen Lösungen ist nun aber bei der neuen Gleichung wegen der instabilen Lösungen ungleich schwerer als bei der alten. Bei der Untersuchung der analytischen Struktur ließen sich leider keine Hinweise auf Anfangsbedingungen für Lösungen mit besseren Eigenschaften erkennen.

Es sind verschiedene Formen von Lösungen denkbar, die man gerne finden würde, um aus der Gleichung Confinement abzuleiten. Ich möchte nun eine solche Form kurz beschreiben. Man erwartet natürlich, daß ϕ auf der imaginären Achse rein imaginär ist und für große $\tilde{q}$ im masselosen Fall ($m_0 = 0$) wie $\nu^3/\tilde{q}^3$ gegen $i\pi$ strebt. Die Green–Funktion sollte im ersten Quadranten und auf der reellen Achse keine Singularitäten besitzen. Für große reelle q sollte $\phi - \pi$ ebenfalls wie $\nu^3/\tilde{q}^3$ gegen Null gehen. Die Fermi–Kante wäre durch einen Punkt auf der reellen Achse realisiert, an dem die Green–Funktion reell wäre. Oberhalb dieses Punktes stimmen retardierte und

Feynman–Green–Funktion überein und unterscheiden sich unterhalb um einen Imaginärteil. Die Green–Funktion sollte für $q \to 0$ und $q \to \infty$ verschwinden, d. h. ρ sollte dort Singularitäten haben und ϕ jeweils in einen der Fixpunkte $i\pi$ oder $-i\pi$ laufen.

Mir ist es nicht gelungen, eine solche Lösung aufzuspüren. Es gelingt zwar, Lösungen zu finden, die auf der reellen Achse solche Eigenschaften haben. Setzt man diese aber zur imaginären Achse hin fort, findet man i. a. Singularitäten im ersten Quadranten und stellt fest, daß die analytische Struktur auf der imaginären Achse nicht die notwendige Gestalt hat (ϕ rein imaginär usw.).

Aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten kann ich leider keine abschließende Aussage über die Existenz von Lösungen treffen, die Confinement aufweisen. Die Situation ist aber nicht so klar wie im Fall der alten Gleichung, wo man solche Lösungen nun mit recht großer Wahrscheinlichkeit ausschließen kann.

Kapitel 4

Die Gleichung für die Vertexfunktion von Mesonen

Das Wesen des Confinements ist es, daß nur gebundene Zustände von Quarks als freie Teilchen beobachtet werden können. Von einer theoretischen Erklärung des Confinements erwartet man daher fast zwangsläufig, daß sie auch Aussagen zumindest über die einfachsten Bindungszustände von Quarks ermöglicht. Im vorausgegangenen Kapitel haben wir eine Gleichung für die Green–Funktion von Quarks diskutiert, die in besonderer Weise den Infrarot–Bereich der Selbstenergiegraphen berücksichtigte. Die Struktur der Mesonen und das Mesonenspektrum sind Niederenergiephänomene der QCD. Deshalb sollte die in der Gleichung für die Green–Funktion gemachte Näherung auch zur Beschreibung der Mesonen adäquat sein. Unsere Untersuchung wird sich mit der Vertexfunktion der Mesonen befassen, für die wir eine Gleichung angeben. Das Fernziel ist natürlich, aus dieser quantitative oder doch wenigstens qualitative Erkenntnisse über das Mesonenspektrum zu gewinnen. In der vorliegenden Arbeit werden die ersten hierzu notwendigen Schritte aufgezeigt. Um uns auf den wesentlichen Mechanismus konzentrieren zu können, verzichten wir hierbei auf die Berücksichtigung verschiedener Quark–Flavors. Diese können und müssen allerdings im Sinne einer späteren realistischen Beschreibung der Mesonen einbezogen werden.

In diesem Kapitel leiten wir zunächst die Gleichung für die Vertexfunktion von $q\bar{q}$–Zuständen her. Es wird die schon in Kapitel 3 im Vorgriff benutzte Goldstone–Lösung beschrieben. In Abschnitt 4.4 wird eine Umformulierung der Gleichung für die Vertexfunktion angegeben, deren Resultat eine Eigenwertgleichung ist, die vielleicht für die numerische Behandlung nützlich sein könnte.[1] Abschließend untersuchen wir auch in diesem Kapitel die Notwendigkeit von Mesonkorrekturen.

4.1 Die Vertexfunktion

Die Bethe–Salpeter–Amplitude χ eines Mesons mit Impuls p ist gegeben durch

$$\chi(x, x', p) = \langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\overline{\psi}(x')|p\rangle \,, \tag{4.1}$$

[1] Dieser Abschnitt lehnt sich eng an das korrespondierende Kapitel in [Gribov91] an. Es werden dort auftretende Ungenauigkeiten korrigiert.

worin der Mesonzustand $|p\rangle$ normiert werden kann auf

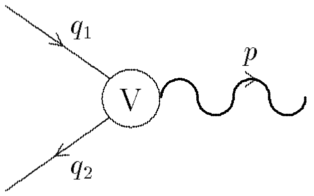
$$\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3\, 2p_0\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') \,. \tag{4.2}$$

Die Vertexfunktion $\varphi(q,p)$ eines Mesons wird dann definiert als die amputierte Bethe–Salpeter–Amplitude,

$$\varphi(q,p) = [G(q_1)]^{-1}\, \chi(q,p)\, [G(q_2)]^{-1} \,, \tag{4.3}$$

worin wir für die Fouriertransformierte der Bethe–Salpeter–Amplitude dasselbe Symbol χ verwenden. Die Variable p soll den Impuls des Mesons, die Variable q den Relativimpuls der Quarks bezeichnen. Dies veranschaulicht die graphische Darstellung

$$\varphi(q,p) =$$



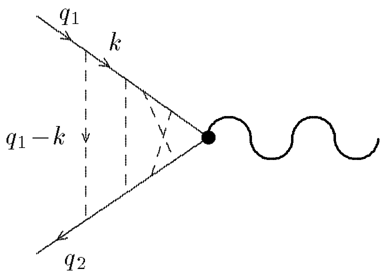
, (4.4)

in der die geraden Linien die Quarks und die gewellte Linie das Meson repräsentieren. Die Impulse hängen zusammen gemäß

$$q_1 = q + \frac{p}{2} \qquad \text{und} \qquad q_2 = q - \frac{p}{2} \,. \tag{4.5}$$

4.2 Herleitung der Gleichung

Um nun in derselben Näherung wie in Kapitel 2 eine Gleichung für die Vertexfunktion herzuleiten, wenden wir auf diese den d'Alembert–Operator an. Wieder berücksichtigen wir die infraroten Gluonen, indem wir diejenigen Terme aufsummieren, in denen eine Gluonlinie zweimal abgeleitet wird, die anderen Terme vernachlässigen wir. Bei der Vertexfunktion sind nun verschiedene Typen von Diagrammen zu behandeln. Zum einen gibt es leiterartige Diagramme der Art



, (4.6)

in denen das erste vom Quark emittierte Gluon als äußerstes auf der Antiquarklinie absorbiert wird. (Hierbei müssen Vertexkorrekturen zu Emission und Absorption mit einbezogen werden.) Das einfachste dieser Diagramme, das den Austausch nur eines Gluons zwischen den Quarklinien beinhaltet, ergibt das Integral

$$C_F \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, (-ig_s\gamma^\mu)\, G(k)\, \varphi\left(k - \frac{p}{2}, p\right)\, G(k+p)\, (-ig_s\gamma_\mu) \frac{i}{(q-k)^2} \,. \tag{4.7}$$

Leitet man die Gluonlinie zweimal ab, was gerade dem Aufschneiden der Linie äquivalent ist (siehe Abschnitt 2.2.1), so findet man, wenn man alle Vertexkorrekturen aus höheren Ordnungen berücksichtigt, den Ausdruck

$$-\,C_F\frac{\alpha_s}{\pi}\,\Gamma^\mu(q_1,0)\,G(q_1)\,\varphi(q,p)\,G(q_2)\,\Gamma_\mu(q_2,0)\,. \tag{4.8}$$

Auch hier haben wir wieder, wie schon bei der Gleichung für die Green–Funktion, die impulsabhängige Kopplung $\alpha_s = \alpha_s(q^2)$ eingesetzt. Verwendet man wieder die Ward–Identität und die Abkürzung $g = C_F\alpha_s/\pi$, so wird hieraus

$$-\,g\,\partial^\mu G^{-1}(q_1)\,G(q_1)\,\varphi(q,p)\,G(q_2)\,\partial_\mu G^{-1}(q_2)\,. \tag{4.9}$$

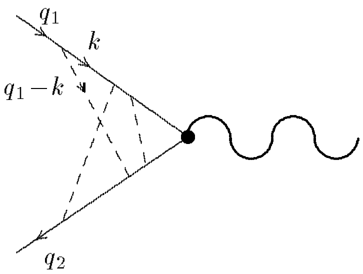
Abkürzend wollen wir nun die Schreibweise

$$A_\mu(q) \equiv \partial_\mu G^{-1}(q)\cdot G(q) \quad \text{und} \quad \tilde{A}_\mu(q) \equiv G(q)\,\partial_\mu G^{-1}(q) \tag{4.10}$$

einführen. Dadurch wird der Ausdruck (4.9) für das Leiterdiagramm

$$-\,g\,A^\mu(q_1)\,\varphi(q,p)\,\tilde{A}_\mu(q_2)\,. \tag{4.11}$$

Die verbleibenden Diagramme sind solche, in denen das erste vom ersten Quark emittierte Gluon an irgendeiner Stelle „im Vertex" absorbiert wird. (Auch hier sind die Diagramme mit Vertexkorrekturen zur Emission mitzuzählen.) Ein solches ist etwa das Diagramm



. (4.12)

Leitet man in dieser Gluonlinie zweimal ab, so erhält man am einen Ende der aufgeschnittenen Linie einen Quark–Gluonvertex $\Gamma(q,0)$, das andere Ende ist eine Einfügung einer Gluonlinie mit verschwindendem Impuls an einer Stelle „im Vertex". Die Aufsummation aller Diagramme dieses Typs entspricht also dem jeweiligen Einfügen einer Gluonlinie mit verschwindendem Impuls an *allen* möglichen Stellen im Vertex. Dies ist aber, wenn man wieder die Ward–Identität benutzt, nichts anderes als die Ableitung der gesamten Vertexfunktion. Der aus diesen Diagrammen resultierende Term ist daher

$$g\,A^\mu(q_1)\,\partial_\mu\varphi(q,p)\,, \tag{4.13}$$

worin wir wieder die Notation (4.10) verwendet haben. Ein ganz analoger Term ergibt sich, wenn wir die Photonlinien zweimal ableiten, die auf der Antiquarklinie emittiert werden und „im Vertex" enden,

$$g\,\partial^\mu\varphi(q,p)\,\tilde{A}_\mu(q_2)\,. \tag{4.14}$$

Addiert man all diese Terme auf, findet man schließlich die gesuchte Gleichung für die Vertexfunktion

$$\partial^2\varphi(q,p) = g[A^\mu(q_1)\,\partial_\mu\varphi(q,p) + \partial^\mu\varphi(q,p)\,\tilde{A}_\mu(q_2) - A^\mu(q_1)\varphi(q,p)\tilde{A}_\mu(q_2)]\,. \tag{4.15}$$

Bei dieser Herleitung war es wieder von entscheidender Bedeutung, durch geschickte Wahl der Integrationsvariablen in den Schleifen diejenigen Terme ausfindig zu machen, die im Infraroten den wichtigsten Beitrag liefern. Es ist dazu wichtig, den Relativimpuls (ähnlich wie bei der Green–Funktion den Impuls q) entlang Gluonlinien „durch das Diagramm zu tragen", in diesem Fall von der einlaufenden Quarklinie auf die auslaufende.

Anders als bei der Gleichung für die Green–Funktion kann man bei der Gleichung für die Vertexfunktion nicht allein an der Größe q^2/λ^2 abschätzen, wie gut die durchgeführte Näherung ist. Vielmehr sind hier nun auch die Parameter pq/λ^2 und p^2/λ^2 von Bedeutung. Eine gute Näherung wird diese Gleichung wohl nur dann darstellen können, wenn p klein ist.

4.3 Die Goldstone-Lösung

Für $p = 0$ läßt sich eine Lösung der Gleichung für die Vertexfunktion direkt angeben. Diese Lösung φ_{PS} ist, wie in [Gribov91] argumentiert wird, eine Goldstone–Lösung. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter auf die Symmetriebrechung ein, sondern zeigen explizit, daß

$$\varphi_{PS}(q, p = 0) \equiv C\,\{G^{-1}, \gamma_5\} \qquad (C \in \mathbb{C}) \tag{4.16}$$

die Gleichung (4.15) für die Vertexfunktion löst. Mit den Parametrisierungen (2.24) bzw. (2.28) für die inverse Green–Funktion ist

$$\begin{aligned} \varphi_{PS}(q, p = 0) = C\,\{G^{-1}, \gamma_5\} &= C\,[(a\,\not{q} - b)\gamma_5 + \gamma_5(a\,\not{q} - b)] &(4.17)\\ &= -2\,C\,b(q^2)\gamma_5 &(4.18)\\ &= -2\,C\,\rho\,\cosh\frac{\phi}{2}\,\gamma_5\,. &(4.19) \end{aligned}$$

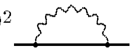
Für $p = 0$ ist gemäß (4.5) $q_1 = q_2 = q$. Setzt man φ_{PS} in die rechte Seite von (4.15) ein, so findet man[2]

$$\begin{aligned} & g\left[A^\mu(q)\partial_\mu\varphi_{PS}(q,0) + \partial_\mu\varphi_{PS}(q,0)\tilde{A}^\mu(q) - A^\mu(q)\varphi_{PS}(q,0)\tilde{A}_\mu(q)\right] \\ &= \quad C\,g\left[A^\mu\left\{\partial_\mu G^{-1}, \gamma_5\right\} + \left\{\partial_\mu G^{-1}, \gamma_5\right\}\tilde{A}^\mu - A^\mu\left\{G^{-1}, \gamma_5\right\}\tilde{A}_\mu\right] \\ &\overset{(4.10)}{=} \quad C\,g\left[(\partial^\mu G^{-1})\,G\,(\partial_\mu G^{-1})\gamma_5 + \gamma_5(\partial^\mu G^{-1})\,G\,(\partial_\mu G^{-1})\right] \\ &= \quad C\,\left\{g(\partial^\mu G^{-1})\,G\,(\partial_\mu G^{-1}), \gamma_5\right\}\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

An dieser Stelle benötigen wir die Gleichung für die Green–Funktion aus dem vorangegangenen Kapitel. Im Falle jener Gleichung ohne Mesonkorrekturen ist der letzte Ausdruck gleich

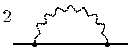
$$C\,\{\partial^2 G^{-1}, \gamma_5\} = C\,\partial^2\,\{G^{-1}, \gamma_5\} = \partial^2\varphi_{PS}\,, \tag{4.21}$$

so daß $\varphi_{PS}(q, p = 0)$ in der Tat die Gleichung für die Vertexfunktion löst.
Etwas komplizierter wird es, wenn man Mesonkorrekturen in der Gleichung für die Green–Funktion berücksichtigt, d. h. die Gleichung (3.3) verwendet. In diesem Fall ist der Ausdruck (4.20) gleich

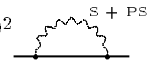
$\left\{\partial^2 G^{-1} - \partial^2\right.$  $\left., \gamma_5\right\} = \partial^2\,\{G^{-1}, \gamma_5\} - \left\{\partial^2\right.$  $\left., \gamma_5\right\}\,.$ (4.22)

[2] Von der zweiten Zeile an wird die q–Abhängigkeit in der Notation unterdrückt.

Damit $\varphi_{PS}(q,p=0)$ eine Lösung darstellt, muß mithin die Bedingung

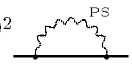
$$\Big\{\partial^2$$  $$,\gamma_5\Big\} = 0 \tag{4.23}$$

erfüllt sein. Dies ist, wie in (3.15,3.16) abzulesen, der Fall, wenn skalare *und* pseudoskalare Mesonen in der Gleichung für die Green–Funktion berücksichtigt werden, und zwar mit gleicher Kopplungsstärke. Gerade dann nämlich ist

$$\partial^2$$  $$= \partial^2$$ 

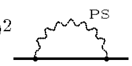
$$= -\frac{2}{\mu^2}\,\frac{1}{a^2q^2-b^2}\,a(q^2)b^2(q^2)\,\not{q}\,. \tag{3.16}$$

Der Antikommutator dieses Ausdrucks mit γ_5 verschwindet.
Die Bedingung (4.23) ist aber nicht erfüllt, wenn nur pseudoskalare Mesonen angekoppelt werden, denn (siehe (3.15,3.17))

$$\partial^2$$ 

$$= -\frac{1}{\mu^2}\,\frac{b^2}{a^2q^2-b^2}\,(a\,\not{q}-b)\,, \tag{4.24}$$

so daß

$$\Big\{\partial^2$$ 

$$,\gamma_5\Big\} = \frac{2}{\mu^2}\,\frac{b^3}{a^2q^2-b^2}\,\gamma_5 \neq 0\,. \tag{4.25}$$

Dies ist neben der schon erwähnten Paritätsentartung bei masselosen Quarks ein weiterer Hinweis darauf, daß sowohl pseudoskalare als auch skalare Mesonen — und zwar mit gleicher Stärke — angekoppelt werden müssen, um die richtige Gleichung für die Green–Funktion zu finden. Es ist aber zu beachten, daß die skalaren Mesonen mit der Vertexfunktion

$$\varphi_S(q,p=0) \equiv C\,\{G^{-1},\gamma_5\}\,\gamma_5 = \varphi_{PS}(q,p=0)\gamma_5 \tag{4.26}$$

selber keine Lösung der Gleichung (4.15) darstellen. Dies erkennt man, wenn man die Gleichung für φ_{PS} (siehe (4.20,4.21) und evtl. (4.23)) von rechts mit γ_5 multipliziert und gleichzeitig $\gamma_5^2 = 1$ einfügt,

$$\partial^2\varphi_S = \partial^2\varphi_{PS}\gamma_5 = g[A^\mu\underbrace{\partial_\mu\varphi_{PS}\gamma_5}_{\partial_\mu\varphi_S} + \underbrace{\partial_\mu\varphi_{PS}\gamma_5}_{\partial_\mu\varphi_S}\gamma_5\tilde{A}^\mu\gamma_5 - A^\mu\underbrace{\varphi_{PS}\gamma_5}_{\varphi_S}\gamma_5\tilde{A}_\mu\gamma_5]\,. \tag{4.27}$$

Hieraus geht hervor, daß $\varphi_S(q,p=0)$ nur dann eine Lösung wäre, wenn $\tilde{A}_\mu$ γ_5–invariant wäre. In der Parametrisierung (2.24) ist aber

$$\tilde{A}_\mu = \frac{1}{a^2q^2-b^2}\left\{\left[a(\partial_\mu a)q^2 + a^2\,\not{q}\gamma_\mu - b(\partial_\mu b)\right] + \left[(\partial_\mu a)b\,\not{q} - a(\partial_\mu b)\,\not{q} + ab\gamma_\mu\right]\right\}\,, \tag{4.28}$$

die Terme in der zweiten eckigen Klammer vertauschen nicht mit γ_5.

Darüberhinaus ist zu bedenken, daß wir hier die Gleichung für die Vertexfunktion in einer anderen Näherung als die Gleichung für die Green–Funktion betrachten, nämlich diese mit und jene ohne Mesonkorrekturen. Wir werden später noch auf mögliche Mesonkorrekturen in der Vertexfunktion eingehen. Diese Korrekturen sollten jedoch zumindest die pseudoskalare Lösung weiterhin zulassen. Offenbar führt die Mesonankopplung so auf ein kompliziertes Selbstkonsistenzproblem, das die beiden Gleichungen für die Green–Funktion und für die Vertexfunktion miteinander verbindet.

Es stellt sich natürlich die Frage, welche in der Natur beobachteten Mesonen durch φ_{PS} bzw. φ_S beschrieben werden könnten. Obwohl wir hier auf die Berücksichtigung verschiedener Flavors verzichten, lassen sich doch folgende Aussagen treffen. Das pseudoskalare Meson mit $p = 0$ ist zwanglos mit dem nahezu masselosen Pion ($m_\pi \sim 135$ MeV) zu identifizieren. Schwieriger ist ein masseloses skalares Meson einzuordnen. Die leichtesten im Review of Particle Properties [PDG] aufgeführten skalaren Mesonen sind $f_0(980)$ und $a_0(980)$ mit Massen von jeweils etwa 980 MeV — eindeutig zu viel, um sie mit masselosen Teilchen zu identifizieren. Diesen beiden Teilchen kommt in Gribovs Theorie des Confinements möglicherweise jedoch eine spezielle Bedeutung zu, siehe hierzu [Close]. Eine andere Möglichkeit, über die schon oft spekuliert wurde, ist die Existenz eines skalaren σ–Mesons mit einer Masse von etwa 500 MeV und einer sehr großen Breite. Ein solches wird häufig in der Berechnung von Nukleon–Nukleon–Potentialen als Austauschteilchen benötigt und in diesem Zusammenhang als korrelierter 2–Pion–Austausch interpretiert. Seine tatsächliche Existenz ist aber sehr umstritten. Die masselosen Mesonen, die wir hier betrachten, sind also als erste grobe Näherung zu verstehen. Der Mechanismus, der ihnen nichtverschwindende Massen verleiht, und damit ihre Einordnung in das physikalische Mesonspektrum bleibt, insbesondere quantitativ, noch genauer zu untersuchen.

Wir erwähnen abschließend noch, daß die Gleichung (4.15) eine formale Lösung in

$$\varphi(q,p) = G^{-1}(q_1)\gamma_5 + \gamma_5 G^{-1}(q_2) \tag{4.29}$$

besitzt, die jedoch für große q nicht abfällt. Diese könnte aber für die Konstruktion von normierbaren Lösungen im Falle $p \neq 0$ von Nutzen sein.

4.4 Die ersten Schritte auf einem langen Weg

Hier wollen wir die Gleichung (4.15) für die Vertexfunktion unter Verwendung der Parametrisierung (2.28) für die Green–Funktion untersuchen.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, definieren wir zunächst für A_μ und eine Funktion ψ [3]

$$[A_\mu, \psi]_V \equiv A(q_1)\psi - \psi\tilde{A}(q_2) \tag{4.30}$$

$$\{A_\mu, \psi\}_V \equiv A(q_1)\psi + \psi\tilde{A}(q_2)\,, \tag{4.31}$$

wobei wieder (s. (4.5)) $q_{1/2} = q \pm \frac{p}{2}$ und A bzw. $\tilde{A}$ wie in (4.10) definiert sind. Damit wird (4.15) zu

$$\partial^2\varphi(q,p) = g\,\{A^\mu, \partial_\mu\varphi\}_V - \frac{g}{4}\,\{A^\mu, \{A_\mu, \varphi\}_V\}_V + \frac{g}{4}\,[A^\mu, [A_\mu, \varphi]_V]_V\,. \tag{4.32}$$

Sei nun eine kovariante Ableitung definiert durch

$$\mathrm{D}_\mu \equiv \partial_\mu - \frac{g}{2}\,\{A_\mu, \,.\,\}_V\,. \tag{4.33}$$

[3] Man beachte, daß diese Notation auch für $p = 0$ nicht mit dem normalen Kommutator bzw. Antikommutator zusammenfällt. Die Notation erweist sich leider aufgrund der Gewöhnung an den üblichen Kommutator als gefahrvoll. Die expliziten Formeln ohne diese Abkürzung wären aber zu unüberschaubar. Der Index V soll daran erinnern, daß die Variablen q_1, q_2 und p für den Vertex (4.4) definiert sind.

Hiermit kann (4.15) äquivalent umgeformt werden zu

$$\mathrm{D}^2\varphi = \frac{g}{2}\left(1-\frac{g}{2}\right)\left[A^\mu,[A_\mu,\varphi]_V\right]_V \,. \tag{4.34}$$

Mit dem Operator

$$\hat{H} \equiv -\mathrm{D}^2 + \frac{g}{2}\left(1-\frac{g}{2}\right)\left[A^\mu,[A_\mu,\,.\,]_V\right]_V \tag{4.35}$$

ergibt sich also

$$\hat{H}\varphi = 0\,. \tag{4.36}$$

Beweis:

Aus (4.33) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2\varphi &= \mathrm{D}^\mu\left(\partial_\mu\varphi - \frac{g}{2}\{A_\mu,\varphi\}_V\right)\\ &= \partial^2\varphi - g\{A^\mu,\partial_\mu\varphi\}_V - \frac{g}{2}\{\partial^\mu A_\mu,\varphi\}_V\\ &\quad + \frac{g^2}{4}\left\{A^\mu,\{A_\mu,\varphi\}_V\right\}_V \,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Wegen

$$\begin{aligned} A^\mu A_\mu &= (\partial^\mu G^{-1})\,G\,(\partial_\mu G^{-1})\,G\\ &= (\partial^\mu G^{-1})\left[\partial_\mu(GG^{-1}G) - (\partial_\mu G)G^{-1}G - GG^{-1}\partial_\mu G\right]\\ &= -(\partial^\mu G^{-1})(\partial_\mu G) \end{aligned} \tag{4.38}$$

und analog

$$\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu = -(\partial^\mu G)(\partial_\mu G^{-1}) \tag{4.39}$$

gilt

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu &= (\partial^2 G^{-1})\,G + (\partial_\mu G^{-1})(\partial^\mu G)\\ &\overset{(2.15)}{=} g(\partial^\mu G^{-1})\,G\,(\partial_\mu G^{-1})\,G + (\partial_\mu G^{-1})(\partial^\mu G)\\ &\overset{(4.38)}{=} (g-1)A^\mu A_\mu \end{aligned} \tag{4.40}$$

und analog

$$\partial^\mu\tilde{A}_\mu = (g-1)\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu\,. \tag{4.41}$$

Damit erhält man

$$\{\partial^\mu A_\mu,\varphi\}_V = \frac{1}{2}(g-1)\left(\left\{A^\mu,\{A_\mu,\varphi\}_V\right\}_V + \left[A^\mu,[A_\mu,\varphi]_V\right]_V\right)\,, \tag{4.42}$$

wie man durch Ausführen der rechten Seite verifiziert. Die Gleichung für die Vertexfunktion in der Form (4.32) führt dann mittels (4.37) und (4.42) durch elementare Umformung auf die Behauptung (4.34). □

Wir berechnen nun den in $\hat{H}$ auftretenden Operator $[A^\mu, [A^\mu, \,.\,]_V]_V$ explizit mit Hilfe der Parametrisierung (2.28). Zunächst ist mittels (2.44)

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{\partial_\mu \rho}{\rho} - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)\, \not{n} - \sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not{n})\exp\left(\frac{\phi}{2}\,\not{n}\right) && (4.43)\\ \tilde{A}_\mu &= \frac{\partial_\mu \rho}{\rho} - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)\, \not{n} - \sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not{n})\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not{n}\right). && (4.44)\end{aligned}$$

Hierfür erklären wir die offensichtliche Zerlegung

$$\begin{aligned} A_\mu &= a^\rho_\mu + a^\phi_\mu + E^\phi_\mu && (4.45)\\ \tilde{A}_\mu &= a^\rho_\mu + a^\phi_\mu + \widetilde{E}^\phi_\mu\,, && (4.46)\end{aligned}$$

indem wir definieren

$$\begin{aligned} a^\rho_\mu &\equiv \frac{\rho'}{\rho} n_\mu && (4.47)\\ a^\phi_\mu &\equiv -\frac{1}{2}\phi' n_\mu \not{n} && (4.48)\\ E^\phi_\mu &\equiv -\sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not{n})\exp\left(\frac{\phi}{2}\,\not{n}\right) && (4.49)\\ \widetilde{E}^\phi_\mu &\equiv -\sinh\frac{\phi}{2}\,(\partial_\mu \not{n})\exp\left(-\frac{\phi}{2}\,\not{n}\right) = -E^{(-\phi)}_\mu\,. && (4.50)\end{aligned}$$

Hierin ist mit dem Strich die Ableitung nach q gekennzeichnet, d.h. $\partial_\mu \rho = \rho' n_\mu$ und analog für ϕ. Durch Anwendung von (4.30) findet man

$$\begin{aligned} [A^\mu, [A_\mu, \varphi]_V]_V = {} & \left[a^\rho_\mu, [a^{\rho\mu}, \varphi]_V\right]_V + \left[a^\phi_\mu, [a^{\phi\mu}, \varphi]_V\right]_V + \left[E^\phi_\mu, [E^{\phi\mu}, \varphi]_V\right]_V + \\ & + 2\left[a^\rho_\mu, [a^{\phi\mu}, \varphi]_V\right]_V + \\ & - 2\Big\{ a^\rho_\mu(q_1)\,\varphi\,\widetilde{E}^{\phi\mu}(q_2) + a^\phi_\mu(q_1)\,\varphi\,\widetilde{E}^{\phi\mu}(q_2) + \\ & \quad E^\phi_\mu(q_1)\,\varphi\,a^{\rho\mu}(q_2) + E^\phi_\mu(q_1)\,\varphi\,a^{\phi\mu}(q_2)\Big\}\,. \qquad (4.51)\end{aligned}$$

Die Terme in der geschweiften Klammer[4] hängen mit q_1 und q_2 von p ab und verschwinden nur für $p = 0$. Ein Skalarprodukt kann man einfach[5] definieren durch

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \equiv \int d^4q\, \mathrm{tr}\,(\overline{\varphi}_1 \varphi_2)\,. \qquad (4.54)$$

[4] In [Gribov91] wird die Gleichung etwas anders umformuliert (s. u.), die Struktur ist aber dieselbe. Es fehlen jedoch, wohl durch ein Versehen, in der zu (4.51) korrespondierenden Gleichung (dort Gl. (6.24-26)) die zu den Termen in der geschweiften Klammer analogen Terme.

[5] In [Gribov91] wird ein anderes Skalarprodukt gewählt, nämlich

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int d^4q\, \mathrm{tr}\,(\overline{\varphi}_1(q)\, G^g(q_1)\, \varphi_2(q)\, G^g(q_2))\,. \qquad (4.52)$$

Dann werden die Funktionen ψ behandelt, die durch

$$\varphi = G^{-g/2}(q_1)\, \psi(q)\, G^{-g/2}(q_2) \qquad (4.53)$$

definiert sind. Die Struktur der Resultate ist für die Funktionen ψ dieselbe wie für unsere Funktionen φ, es tritt lediglich im Argument der Exponentialfunktion in E^ϕ ein zusätzlicher Faktor β auf. Obige Definition ist einfacher und leichter zu handhaben.

Eine Ansatzmöglichkeit für die numerische Lösung der Gleichung ergibt sich unmittelbar aus (4.34). Man sucht die Werte von p, für die die Eigenwertgleichung

$$\hat{H}\varphi = \epsilon\varphi \tag{4.55}$$

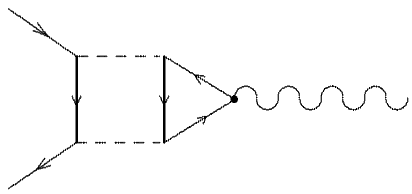
den Eigenwert $\epsilon = 0$ besitzt. Hierzu kann man das obige Skalarprodukt verwenden. Der Operator H ist aber nicht hermitesch, die Eigenwerte ϵ sind daher im allgemeinen nicht reell. Daher ist es numerisch schwierig, Funktionen φ mit Eigenwert $\epsilon = 0$ zu finden. Die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung für φ ist vielleicht aussichtsreicher. Man kann nämlich die Differentialgleichung durch Diskretisierung in eine Differenzengleichung überführen, die sich numerisch recht gut behandeln läßt. Dieses Verfahren wird in [Gawron] für die Bethe–Salpeter–Gleichung mit Fermionen angewendet.

Die numerische Lösung der Gleichung setzt die Kenntnis der Funktionen ρ und ϕ voraus und erfordert damit die Kenntnis der richtigen Lösung der Gleichung für die Green–Funktion. Man kann aber natürlich hoffen, daß die Gleichung für die Vertexfunktion auch brauchbare Resultate liefert, wenn man für die Green–Funktion einen geeigneten Ansatz macht.

4.5 Korrekturen zum Vertex

Auch wenn wir die damit verbundenen Probleme hier nicht lösen können, wollen wir abschließend andeuten, welche Korrekturen zur Vertexfunktion in der obigen Gleichung keine Berücksichtigung gefunden haben.

Ein sicher wichtiger Term, der in die Gleichung (4.15) für die Vertexfunktion nicht eingeht, ist der durch das Diagramm



(4.56)

gegebene. Er sollte besonders dann von Bedeutung sein, wenn man unter Berücksichtigung verschiedener Flavors mit Hilfe dieser Gleichung das reale Mesonenspektrum untersuchen möchte.

Eine weitere Korrektur ergibt sich in Analogie zu den Mesonkorrekturen zur Quark–Green–Funktion, die wir in Kapitel 3 betrachtet haben. Diagramme, in denen vom einlaufenden Quark oder Antiquark Mesonen emittiert und absorbiert werden, sind in der Gleichung (4.15) für die Vertexfunktion nicht berücksichtigt. Die Berücksichtigung solcher Diagramme ist in systematischer Form nicht so einfach möglich wie im Falle der Photonen bzw. Gluonen. Das zu (4.6) analoge leiterartige Diagramm bereitet keine Probleme. Schwieriger wird es sein, die Summe aller Diagramme zu berechnen, in denen die Mesonlinie von einem Quark ausgeht und „im Vertex“ endet. Die Summe dieser Diagramme wurde für den Gluonen–Austausch ja mit Hilfe der Ward–Identität als Ableitung der Vertexfunktion nach dem äußeren Impuls geschrieben. Für den Fall der Mesonen steht eine solche Möglichkeit nicht zur Verfügung. Diese Korrekturen sind diagrammatisch den in (2.16) dargestellten verwandt, die auch in der Gleichung für die Green–Funktion noch nicht berücksichtigt wurden.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit habe ich die physikalische Idee von Gribovs Theorie und die Herleitung der von ihm vorgeschlagenen Gleichungen dargestellt. Ich habe die Lösungen klassifiziert, die die Gleichung für die Green–Funktion ohne und mit Mesonkorrekturen besitzt. Die Untersuchung der Mesonkorrekturen involvierte auch die Gleichung für die Vertexfunktion von Mesonen.

Es erweist sich, daß es sowohl ohne als auch mit Mesonkorrekturen Lösungen der Gleichung für die Green–Funktion gibt, die „perturbativen" Charakter haben. Sie weisen Pol und Schnitt auf der positiven und negativen reellen q–Achse auf. Für diese Lösungen wurde der Zusammenhang zwischen den Werten der Massenfunktion bei $q = 0$ und bei einem großen raumartigen Impuls λ beschrieben. Es gibt weitere Lösungen der Gleichung, die aber im allgemeinen Pole im ersten Quadranten der q–Ebene haben. Im Falle der Gleichung ohne Mesonen können wir mit recht großer Wahrscheinlichkeit die Existenz von geeigneten Lösungen ausschließen, die im ersten Quadranten der q–Ebene keine Singularitäten aufweisen. Auch bei der Gleichung mit Mesonkorrekturen habe ich keine solche Lösung finden können. Leider kann ich in diesem Fall aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten keine abschließende Aussage über deren Existenz treffen.

In der Gleichung mit Mesonkorrekturen ist es denkbar, daß verschiedene Ansätze für das Verhalten der Kopplungskonstante zu anderen Resultaten führen. Möchte man verschiedene Ansätze untersuchen, muß man jedoch beachten, daß diese in Einklang mit den Annahmen gewählt werden, die zur Herleitung der Gleichung gemacht wurden. So sollte die Kopplung bei kleinen $|q|$ gegen eine Konstante streben. Es ist daher nicht zu erwarten, daß andere Kopplungverläufe schon bei kleinen Impulsen eine qualitative Veränderung der analytischen Eigenschaften der Lösungen mit sich bringen.

Wir haben bei den Mesonkorrekturen sowohl pseudoskalare als auch skalare Mesonen eingeschlossen, die Notwendigkeit der skalaren Mesonen war aber nicht offensichtlich. Es wäre deshalb interessant zu sehen, welche Effekte auftreten, wenn man nur pseudoskalare Mesonen ankoppelt.

Für weitere Untersuchungen bieten sich natürlich auch das Spektrum der Gleichung für die Vertexfunktion und die Berücksichtigung höherer Korrekturen zur Gleichung für die Green–Funktion an.

Die Theorie der überkritischen Ladungen in der QCD ist ein attraktiver Vorschlag zur Erklärung des Confinements, auch wenn sich die quantitative Präzisierung als schwierig erweist. Die Entscheidung über die Richtigkeit einer Theorie hat aber immer die Natur zu treffen. Interessant wird daher sein, ob sich experimentelle Hinweise ergeben, die das physikalische Bild der überkritischen Ladungen in der QCD bestätigen.

Anhang A

Notation

In diesem Anhang sind die verwendeten Notationen und Konventionen zusammengestellt. Diese folgen im wesentlichen [Itzykson]. Außerdem werden einige grundlegende Eigenschaften der auftretenden Größen aufgeführt.

A.1 Metrik und Ableitungen

Der metrische Tensor im Minkowski–Raum ist

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(+,-,-,-)\,. \tag{A.1}$$

Über doppelt auftretende griechische bzw. lateinische Indizes wird von 0 bis 3 bzw. von 1 bis 3 summiert, d. h. für zwei 4–Vektoren a und b gilt

$$ab = a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - a^i b^i\,. \tag{A.2}$$

Ableitungen nach kontravarianten bzw. kovarianten Koordinaten (x^μ bzw. x_μ) sind

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{bzw.} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\,. \tag{A.3}$$

Der d'Alembert–Operator ist

$$\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu\,. \tag{A.4}$$

Analoge Definitionen gelten für den Impulsraum.

A.2 γ – Matrizen

Die Diracschen Gammamatrizen sind definiert durch

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,. \tag{A.5}$$

γ^0 ist hermitesch, γ^i sind antihermitesch. Es ist

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.6}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= 1 && \text{(A.7)} \\ \gamma_5^\dagger &= \gamma_5 && \text{(A.8)} \\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0\,. && \text{(A.9)} \end{aligned}$$

Es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 && \text{(A.10)} \\ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma_\lambda &= -2\gamma^\mu && \text{(A.11)} \end{aligned}$$

und die Spurformeln

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\mathbf{1} &= 4 && \text{(A.12)} \\ \mathrm{tr}\,\gamma_5 &= 0\,. && \text{(A.13)} \end{aligned}$$

Die Spur einer ungeraden Anzahl von γ–Matrizen verschwindet.

Für einen Vektor a sei

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu\,, \tag{A.14}$$

damit ist

$$\not{a}\,\not{b} = a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu\,, \tag{A.15}$$

wobei

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]. \tag{A.16}$$

Speziell also

$$\not{a}\,\not{a} = a^2\,. \tag{A.17}$$

Für Dirac–Spinoren ψ sei

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0\,, \tag{A.18}$$

und wir definieren

$$\overline{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0\,, \tag{A.19}$$

so daß

$$\begin{aligned} \overline{\gamma^\mu} &= \gamma^\mu && \text{(A.20)} \\ \overline{\gamma_5} &= -\gamma_5\,. && \text{(A.21)} \end{aligned}$$

Anhang B

Einige nützliche Formeln

Dieser Anhang enthält enthält die kurzen Beweise einer Reihe von Formeln, die wir an verschiedenen Stellen in der Arbeit verwenden.

Beh. 1

$$\partial_\mu q = \frac{q_\mu}{q}\,, \tag{B.1}$$

was unmittelbar aus der Definition $q = \sqrt{q^\nu q_\nu}$ folgt.

Beh. 2

$$\partial_\mu q^\mu = \frac{\partial}{\partial q^\mu} q^\mu = 4 \tag{B.2}$$

Beh. 3

$$\{\not n, \partial_\mu \not n\} = 0 \tag{B.3}$$

Beweis:

$$0 = \partial_\mu \mathbf{1} = \partial_\mu(\not n \not n) = (\partial_\mu \not n) \not n + \not n\,(\partial_\mu \not n) = \{\not n, \partial_\mu \not n\}$$

Beh. 4

$$\partial_\mu \not n = \frac{1}{q}\left(\gamma_\mu - q_\mu \frac{\not q}{q^2}\right) \tag{B.4}$$

Beweis:

$$\partial_\mu \not n = \partial_\mu \frac{\not q}{q} = \frac{1}{q}\gamma_\mu + \not q\, \partial_\mu \frac{1}{q} = \frac{1}{q}\left(\gamma_\mu - q_\mu \frac{\not q}{q^2}\right)$$

Beh. 5

$$q^\mu (\partial_\mu \not n) = 0 \tag{B.5}$$

Beweis:

$$q^\mu (\partial_\mu \not n) \stackrel{(B.4)}{=} \frac{1}{q}\left(q^\mu \gamma_\mu - q^\mu q_\mu \frac{\not q}{q^2}\right) = \frac{1}{q}(\not q - \not q) = 0$$

Beh. 6

$$(\partial^\mu \not n)(\partial_\mu \not n) = \frac{3}{q^2} \tag{B.6}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(\partial^\mu \not{n})(\partial_\mu \not{n}) &\overset{(B.4)}{=} \frac{1}{q^2}\left(\gamma^\mu\gamma_\mu - \gamma^\mu q_\mu \frac{\not{q}}{q^2} - \frac{\not{q}}{q^2} q^\mu\gamma_\mu + q^\mu q_\mu \frac{\not{q}\,\not{q}}{q^4}\right) \\
&= \frac{1}{q^2}(4-1-1+1) = \frac{3}{q^2}
\end{aligned}
$$

Beh. 7

$$
\partial^2 \not{n} = -3\frac{\not{q}}{q^3} = -\frac{3}{q^2}\not{n} \tag{B.7}
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\partial^2 \not{n} &\overset{(B.4)}{=} \partial^\mu\left(\frac{\gamma_\mu}{q} - q_\mu\frac{\not{q}}{q^3}\right) \\
&= -\frac{q^\mu}{q^3}\gamma_\mu - \underbrace{(\partial^\mu q_\mu)}_{=4}\frac{\not{q}}{q^3} + 3q_\mu\frac{q^\mu}{q^5}\not{q} - \frac{q_\mu}{q^3}\underbrace{\partial_\mu \not{q}}_{=\gamma_\mu} = -3\frac{\not{q}}{q^3}
\end{aligned}
$$

Beh. 8 Für eine Funktion $f(q)$ gilt mit $\xi = \ln q$

$$
\partial_\mu f(q) = \frac{q_\mu}{q}\frac{df}{dq} \tag{B.8}
$$

$$
\partial_\mu f(q) = \frac{q_\mu}{q^2}\frac{df}{d\xi}, \tag{B.9}
$$

sowie[1]

$$
\partial^2 f(q) = \frac{3}{q}f' + f'' \tag{B.10}
$$

$$
\partial^2 f(q) = \frac{1}{q^2}(\ddot{f} + 2\dot{f}) \tag{B.11}
$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu f(q) &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dq^\mu} = \frac{q_\mu}{q}\frac{df}{dq} \\
&= \frac{q_\mu}{q^2}\frac{df}{d\ln q} \\
\partial^2 f(q) &\overset{(B.8)}{=} \partial^\mu\left(\frac{q_\mu}{q}f'\right) \overset{(B.8)}{=} \left(\frac{\partial^\mu q_\mu}{q} - \frac{q^\mu q_\mu}{q^3}\right)f' + \frac{q^\mu q_\mu}{q^2}f'' \\
&\overset{(B.2)}{=} \frac{3}{q}f' + f'' \\
\partial^2 f(q) &\overset{(B.9)}{=} \partial^\mu\left(\frac{q_\mu}{q^2}\dot{f}\right) \overset{(B.9)}{=} \left(\frac{\partial^\mu q_\mu}{q^2} - 2\frac{q^\mu q_\mu}{q^4}\right)\dot{f} + \frac{q^\mu q_\mu}{q^4}\ddot{f} \\
&\overset{(B.2)}{=} \frac{1}{q^2}(\ddot{f} + 2\dot{f})
\end{aligned}
$$

[1] Der Strich bezeichnet wieder die Ableitung nach q, der Punkt die Ableitung ∂_ξ nach $\xi = \ln q$.

Literatur

[Ascher] U. Ascher, J. Christiansen , R. D. Russell, Tech. Rep. 77–13, Dept. Computer Sc., Univ. B. C., Vancouver, Canada, auch in Math. Comp. 33 (1979), 659-679; Proc. Conf. for Codes for BVPs in ODEs, Houston, Texas, 1978

[Bass] S. D. Bass, Phys. Lett. **B**329 (1994), 358

[Bjorken I] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, BI–Hochschultaschenbücher, Bd. 98, BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990

[Bjorken II] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI–Hochschultaschenbücher, Bd. 101, BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990

[Buras] A. J. Buras, Rev. Mod. Phys. 52 (1980), 199

[Cheng] T.–P. Cheng, L.–F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, 1984

[Close] F. E. Close et al., Phys. Lett. **B**319 (1993), 291

[Cornwall] J. M. Cornwall, Phys. Rev. **D**22 (1980), 1452

[Dirac] P. A. M. Dirac, *Théorie du Positron*, Rapport du 7^{e} Conseil Solvay de Physique, Structure et Proprietés des Noyaux Atomiques (1934), p. 203, auch in J. Schwinger (ed.), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, New York, 1958

[Dokshitzer] Yu. L. Dokshitzer, Gatchina PNPI preprint 1962 (1994)

[Fetter] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many–Particle Systems*, Mc Graw–Hill, 1971

[Fritzsch] H. Fritzsch, M. Gell–Mann, Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Chicago–Batavia 1972, Vol. 2, p. 135

[Gawron] Ch. Gawron, *Numerische Behandlung der Bethe–Salpeter–Gleichung für Fermionen*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1995 (in Vorbereitung)

[Gell–Mann] M. Gell–Mann, Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, Benjamin, New York, 1964

[Greiner] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, Berlin, 1985

[Gribov] V. N. Gribov, private Mitteilung

[Gribov87] V. N. Gribov, Physica Scripta T15 (1987), 164

[Gribov91] V. N. Gribov, *Possible Solution of the Problem of Quark Confinement*, Lund University Preprint LU TP 91-7

[Gribov92] V. N. Gribov, *Orsay Lectures on Confinement I&II*, Université de Paris XI Preprints LPTHE Orsay 92-60 und 94-20

[Gross] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1343

[Itzykson] C. Itzykson, J.–B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw–Hill, 1980

[Marciano] W. Marciano, H. Pagels, *Quantum Chromodynamics*, Phys. Rep. 36 **C** (1978), 137

[Pagels] H. Pagels, Phys. Rev. **D**15 (1977), 2991

[PDG] Particle Data Group, *Review of Particle Properties*, Phys. Rev. **D**50 (1994), 1173

[Politzer] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1346

[Roberts] C. D. Roberts, A. G. Williams, *Dyson–Schwinger Equations and their Application to Hadronic Physics*, in *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Vol. 33, p. 477, ed. by A. Fäßler, Pergamon Press, Oxford, 1994

[Taylor] J. C. Taylor, Nucl. Phys. **B**33 (1971), 436

['t Hooft] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B**33 (1971), 173; Nucl. Phys. **B**35 (1971), 167

[Slavnov] Teor. Math. Fiz. 10 (1972), 153 [Theor. Math. Phys. 10 (1972), 99]; Fiz. Elem. Chastits. At. Yad. 5 (1974), 755 [Sov. J. Part. Nucl. 5 (1975), 303]

[Yang] C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954), 191

[Ynduráin] F. J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interactions*, Springer–Verlag, Berlin, 1992

[20 Years] *Twenty Years of QCD*, ed. P. Zerwas, H. Kastrup, 2 vols., World Scientific, Singapore, 1993

Danksagung

Ganz besonders herzlich danken möchte ich Prof. Vladimir Gribov, der mir in vielen langen Diskussionen neue Einsichten vermittelt hat. Seine Hilfe und sein Rat waren für mich sehr wichtig. Auch seiner Frau Dr. Julia Nyiri möchte ich herzlich danken.

Ich danke Prof. Dieter Schütte, der mir diese Arbeit ermöglicht und sie in interessanten Gesprächen gefördert hat.

Besonders möchte ich mich bei Christian Gawron bedanken. Unsere Zusammenarbeit während des gesamten Studiums hat mir viel Freude bereitet. Ohne seine Hilfe und die vielen Gespräche mit ihm wäre mir diese Arbeit sehr viel schwerer gefallen.

Dr. Bernard Metsch und Burkhard Diekmann danke ich für hilfreiche Gespräche in der Anfangsphase dieser Arbeit.

Schließlich möchte ich Uli Bohn, Franz Nachtsheim, Claus Münz und Thomas Schirmer danken. Sie haben entscheidend dazu beigetragen, daß ich mich im Institut sehr wohl gefühlt habe.