

# Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

## Blatt 6

Besprechung:

am 30.05. um 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

*Die Montagsübung fällt wegen Pfingsten aus und wird nach Vereinbarung nachgeholt!*

### 1. GPS: Gravitative Rotverschiebung

Die GPS-Satelliten von Blatt 2 erfahren nicht nur Zeitdilatation gemäß der speziellen Relativitätstheorie, sondern auch einen Effekt aufgrund der Rotverschiebung im Gravitationspotential  $\Phi$ . Benutze die Newton'sche Näherung,  $g_{00} = 1 - 2\Phi$  und berechne beide Effekte. Vergleiche dazu die Eigenzeiten von Uhren in Heidelberg sowie an Bord eines GPS-Satelliten. Die Satelliten befinden sich auf Kreisbahnen 20200 km über der Erdoberfläche und umrunden die Erde einmal in 12 Stunden.

Hinweis: Wähle Kugelkoordinaten um den Erdmittelpunkt, so daß  $\Phi = GM_{\oplus}/r$ . Bestimme die Eigenzeiten von Uhren in Heidelberg sowie an Bord eines GPS-Satelliten. Beachte dabei, daß die Eigenzeit Beiträge sowohl von  $\Phi$  in  $g_{00}$  als auch von den Geschwindigkeiten der Uhren enthält. Drücke die Eigenzeit als Funktion der Koordinatenzeit  $t$  aus,  $d\tau^2 = C dt^2$ , und berechne die Zeitdilatation aus den Koeffizienten  $C_{\text{Heidelberg}}$  und  $C_{\text{Satellit}}$ .

### 2. Der Riemann-Tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ hat einige Symmetrien:

- Antisymmetrie in den ersten beiden und letzten beiden Indizes:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

- Symmetrie unter Vertauschung der ersten beiden mit den letzten beiden Indizes:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$$

- Die erste Bianchi-Identität:

$$R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$$

Wie viele unabhängige Komponenten hat  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  in  $d$  Dimensionen? (Hinweis: Die drei Symmetrieeigenschaften sind nicht völlig unabhängig.)

### 3. Energie-Impuls-Tensor für ein skalares Feld

Die Wirkung für ein reelles skalares Feld ist

$$S_{\phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) .$$

- (a) Bestimme daraus den Energie–Impuls–Tensor mittels der Formel aus der Vorlesung,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

- (b) Falls die Raumzeit flach ist, d.h.  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , ist die Wirkung  $S_\phi$  invariant unter infinitesimalen Translationen  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ . Zu dieser Symmetrie gehört ein erhaltener Noether-Strom (oder „kanonischer“ Energie–Impuls–Tensor)

$$T_{\mu\nu}^{\text{kan}} = \eta_{\mu\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Leite diesen Ausdruck her, bestimme die explizite Form für die angegebene Lagrangedichte und vergleiche mit dem Energie-Impuls-Tensor aus dem ersten Aufgabenteil.

Hinweis: Bestimme die Änderung von  $\phi$  als Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung im infinitesimalen Parameter  $a^\mu$ . Die Variation der Lagrangedichte kann auf zwei Weisen berechnet werden: Einmal als durch die Variation von  $\phi$  induzierte Änderung von  $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ , und einmal als Taylorentwicklung von  $\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))$ . Bestimme beide Ausdrücke und benutze die Bewegungsgleichungen.