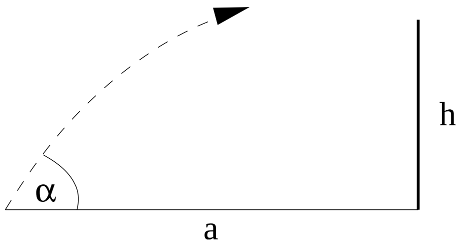
1. Präsenzübungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Lösung der Aufgaben in den Übungen der 2. Semesterwoche (25. Oktober 2007)

Aufgabe 1:

Ein Ball wird unter einem Winkel α schräg nach oben geworfen. In Entfernung a befindet sich eine Mauer der Höhe h. Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v des Balles mindestens sein, damit er über die Mauer gelangt? Gibt es immer eine Lösung? (Vernachlässigen Sie die Luftreibung.)



Aufgabe 2:

Sei $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$ und $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Zeigen Sie, dass

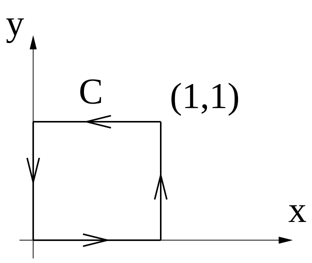
$$(a) \quad \nabla r = \hat{\mathbf{r}}, \qquad (b) \quad \nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}}\, \frac{df}{dr}, \qquad (c) \quad \nabla^2 \ln r = \frac{1}{r^2}.$$

Aufgabe 3:

Sei die Vektorfunktion $\mathbf{F}$ definiert durch

$$\mathbf{F} = (x+2)y^2\, \mathbf{e}_x + 4xy\, \mathbf{e}_y + 0 \cdot \mathbf{e}_z$$

und sei die in der (x, y)-Ebene liegende geschlossene Kurve C gegeben wie in der Skizze.



Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ (a) direkt und (b) nach dem Stokesschen Satz.

Aufgabe 4:

Sei $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ eine orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, etc. Wir definieren das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} durch

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk}\, \mathbf{e}_k,$$

wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird (Einstein-Summenkonvention).

a) Ermitteln Sie den Wert von ϵ_{ijk} für beliebige $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

b) Stellen Sie mit Hilfe des ϵ-Symbols das Spatprodukt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ dar, und zeigen Sie den Zusammenhang des Spatprodukts zur Determinante.

c) Betrachten Sie das zweifache Vektorprodukt $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l)$, um die wichtige Identität

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

zu zeigen. *Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst die Koeffizienten a, b und c im Ansatz $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l) = a\,\delta_{kl}\,\mathbf{e}_i + b\,\delta_{il}\,\mathbf{e}_k + c\,\delta_{ik}\,\mathbf{e}_l$.

d) Beweisen Sie mit der Identität aus c) die Gleichung

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

e) Zeigen Sie, dass

$$\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$