11. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen der 13. Semesterwoche (23. Januar 2008)

Aufgabe 40: (5 Punkte)

Ein kegelförmiger Kreisel der Masse M rotiert im Schwerefeld mit der Winkelgeschwindigkeit ω_Z um seine Symmetrieachse Z. Das Trägheitsmoment des Kreisels um diese Achse ist Θ_3, und der Schwerpunkt befindet sich im Abstand s vom Fixpunkt der Rotation (Kreiselfuß). Die Z-Achse bilde mit der Vertikalen (Z'-Achse) den festen Winkel θ, d.h. der Kreisel erfährt eine gleichmäßige Präzession. Der Kreisel befinde sich in einem Aufzug; dabei sei sein Kreiselfuß in einem reibungslosen Kugelgelenk am Aufzugboden befestigt. Berechnen Sie die Präzessionsgeschwindigkeit Ω mit Angabe der Richtung für den Fall,

a) dass der Aufzug ruht,

b) dass der Aufzug mit $2g$ nach unten beschleunigt wird.

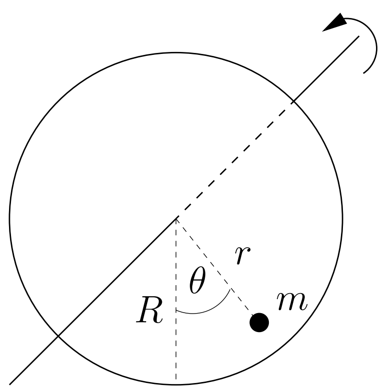
Hinweis: Verwenden Sie die Nährerung des "schnellen Kreisels", d.h. rechnen Sie zu führender Ordnung in $1/\omega_Z$. Welcher dimensionslose Parameter muss groß gegen Eins sein, damit diese Näherung gerechtfertigt ist?

Aufgabe 41: (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Pendelsystem: Eine homogene Kreisscheibe mit Masse M und Radius R sei an einer (reibugsfreien) horizontalen Drehachse befestigt, welche der Symmetrieachse der Scheibe entspricht. Auf der Scheibe ist im festen Abstand r von der Drehachse ein Massepunkt m fixiert, auf den die Gravitationskraft wirkt.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und die daraus folgende Bewegungsgleichung.

b) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und die daraus folgenden kanonischen Bewegungsgleichungen.



Aufgabe 42: (5 Punkte)

a) Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

i) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls p und die Hamiltonfunktion. Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf und lösen Sie sie.

ii) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$q \to a = \frac{1}{\sqrt{2im\omega}}p + \sqrt{\frac{im\omega}{2}}q, \qquad p \to \tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2im\omega}}p - \sqrt{\frac{im\omega}{2}}q$$

kanonisch ist, indem Sie die Poissonklammer $\{a, \tilde{a}\}$ berechnen. Schreiben Sie die Hamiltonfunktion in Abhängigkeit von a und $\tilde{a}$, stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen in diesen Variablen auf und lösen Sie sie.

b) Betrachten Sie ein Teilchen in einem Zentralpotential mit Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)$$

Finden Sie die zu r und ϕ gehörigen kanonischen Impulse p_r und p_ϕ sowie die Hamiltonfunktion. Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf, und zeigen Sie, dass eine Lösung durch $r(t) = R$ und $\phi(t) = \omega t$ mit geeigneten R und ω gegeben ist. Wie lautet die Beziehung zwischen R, ω und $V'(R)$?