12. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen der 14. Semesterwoche (30. Januar 2008)

Aufgabe 43: (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Poissonklammern von zueinander kanonisch konjugierten Variablensätzen q_i und p_j folgende fundamentale Identitäten gelten:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

b) Zeigen Sie weiterhin, dass für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

die Poissonklammer des Drehimpulses L mit der Hamiltonfunktion verschwindet:

$$\{L, H\} = 0.$$

Hinweis: L ist die zur Rotationssymmetrie des Problems gehörige Erhaltungsgröße.

Aufgabe 44: (5 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung e und Masse m bewegt sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, das durch ein Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ gegeben ist als $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})$. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c}\,\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

a) Bestimmen Sie die zu den Koordinaten x_i gehörigen kanonischen Impulse p_i und die Hamiltonfunktion H. Schreiben Sie H als Funktion dieser Koordinaten und Impulse.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = Bx_1\,\mathbf{e}_2$ mit konstantem B.

c) Sei $\mathbf{A}$ wie in Teil b. gegeben. Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf, und berechnen Sie die allgemeinste Lösung für $\mathbf{x}(t)$. Welche Form hat die Trajektorie? Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?

Hinweis: Die Gleichungen werden übersichtlicher, wenn man die Abkürzung $\omega \equiv eB/mc$ einführt.

Aufgabe 45: (5 Punkte)

a) Gegeben sei ein eindimensionales Problem mit folgender Lagrange-Funktion (die nicht identisch zur Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators ist!):

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion des Systems und zeichnen Sie einige repräsentative Trajektorien (einschließlich des Fixpunktes).

b) Betrachten Sie die reibungsfreie Bewegung einer Perle auf einem senkrecht stehenden Drahtring im Schwerefeld der Erde. Überlegen Sie sich qualitativ die Trajektorien im Phasendiagramm und stellen Sie diese graphisch dar. Beachten Sie dabei die Periodizität in der geeignet gewählten Koordinate und das Auftreten zweier Fixpunkte.

c) Zeichnen Sie die Trajektorien für das Problem aus Aufgabenteil b) für den Fall, dass der Kreisring horizontal liegt.

Aufgabe 46 (Zusatzaufgabe für Interessierte): (5 Bonuspunkte)

Nach dem Noether-Theorem gibt es zu jeder Symmetrie eines mechanischen Systems eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt lassen sich erhaltene Größen oft mit infinitesimalen Symmetrietransformationen identifizieren. Wir wollen dies am Beispiel des Keplerproblems genauer untersuchen.

Hinweis: Der Rechenaufwand bei dieser Aufgabe lässt sich in Grenzen halten, wenn man die Eigenschaften der Poissonklammer geschickt ausnützt. Verwenden Sie die kanonischen Poissonklammern $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$, und machen Sie Gebrauch von der Bilinearität, der Antisymmetrie und der Derivationseigenschaft $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$. Die zu Anfang des Semesters bewiesene Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{inm} = \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}$ ist ebenfalls hilfreich.

a) Zeigen Sie, dass für die Komponenten $L_i = \epsilon_{ijk}q_j p_k$ des Drehimpulses $\mathbf{L}$ gilt

$$\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk}\, p_k, \qquad \{L_i, q_j\} = \epsilon_{ijk}\, q_k,$$

und zeigen Sie damit

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k.$$

Kommentar: Bekanntlich ist der Drehimpuls in rotationssymmetrischen Potentialen erhalten. Die Gruppe der Rotationen in drei Dimensionen $SO(3)$ besteht aus 3×3-Matrizen $\mathbb{A}$, die sich schreiben lassen als $\mathbb{A} = \mathbb{1} + \theta_i \mathbb{L}_i + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\theta}|^2)$ für ein $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$. Hierbei sind die $\mathbb{L}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ihrerseits 3×3-Matrizen, die "Erzeuger" der $SO(3)$, die den folgenden Kommutatorrelationen[1] genügen:

$$[\mathbb{L}_i, \mathbb{L}_j] = \epsilon_{ijk}\, \mathbb{L}_k.$$

[1] Der Kommutator $[\mathbb{A}, \mathbb{B}]$ zweier Matrizen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ ist definiert als $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \equiv \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}$; er ist wie die Poissonklammer bilinear, antisymmetrisch und eine Derivation und erfüllt ebenfalls die Jacobiidentität.

Die Erzeuger $\mathbb{L}_i$ der Rotationsgruppe bilden also dieselbe Algebra unter dem Kommutator wie die Komponenten des Drehimpulses L_i unter der Poissonklammer. In diesem Sinne, mit der Identifikation $\mathbb{L}_i \leftrightarrow L_i$, "erzeugt" die Erhaltungsgröße die Symmetrie.

Im Spezialfall des Keplerproblems mit Potential $\sim 1/r$ ist die Symmetriegruppe tatsächlich noch größer als $SO(3)$. Es gibt nämlich eine weitere Erhaltungsgröße, den Lenzschen Vektor $\mathbf{M}$ (vgl. Aufgabe 23).
Die Hamiltonfunktion ist

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) \qquad \text{mit} \quad V(\mathbf{q}) = -\frac{\alpha}{|\mathbf{q}|}.$$

b) Zeigen Sie, dass für die Komponenten $M_i = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk}\, p_j L_k + V(\mathbf{q})\, q_i$ des Lenzschen Vektors gilt

$$\{L_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}\, M_k.$$

Hinweis: Berücksichtigen Sie, dass $\mathbf{L}$ erhalten ist. Es gilt also $\{H,\mathbf{L}\} = 0$ und damit $\{V,\mathbf{L}\} = 0$ (machen Sie sich letzteres klar!)

Ebenso erhält man

$$\{M_i, M_j\} = -\frac{2H}{m}\,\epsilon_{ijk}\, L_k.$$

Betrachten Sie nun gebundene Zustände mit fester Energie $H = E < 0$. Definiere

$$\mathbf{L}^\pm \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} \pm \sqrt{-\frac{m}{2E}}\,\mathbf{M}\right).$$

c. Zeigen Sie unter Verwendung der obigen Ergebnisse, dass

$$\{L_i^\pm, L_j^\pm\} = \epsilon_{ijk}\, L_k^\pm, \qquad \{L_i^\pm, L_j^\mp\} = 0.$$

Kommentar: Sie haben zwei entkoppelte Basen $\mathbf{L}^+$ und $\mathbf{L}^-$ von infinitesimalen Transformationen gefunden, die jeweils eine Erzeugendenalgebra der $SO(3)$ bilden. Die Symmetriegruppe ist tatsächlich $SO(4)$, deren infinitesimale Struktur gleich der von $SO(3)\times SO(3)$ ist. Für Streuzustände mit $H > 0$ ergibt sich in analoger Weise $SO(3,1)$, die Gruppe der Lorentztransformationen. Diese globale Struktur der Symmetriegruppe ist nicht so leicht zu erkennen: Man kann zeigen [1], dass sich die Bewegung eines Massenpunktes im Keplerpotential durch eine verallgemeinerte kanonische Transformation auf die freie Bewegung eines Massenpunktes in einem Raum mit konstanter Krümmung abbilden lässt. Negative (positive) Energien entsprechen dabei positiver (negativer) Krümmung. Konstant positiv gekrümmte dreidimensionale Räume sind 3-Sphären mit Isometriegruppe $SO(4)$, konstant negativ gekrümmte sind dreidimensionale hyperbolische Räume mit Isometriegruppe $SO(3,1)$. Für den Spezialfall $E = 0$ erhält man den flachen dreidimensionalen affinen Raum mit Isometriegruppe $ISO(3)$ (Translationen und Rotationen).

Literatur:

[1] A. Keane, R. Barrett und J. Simmons, "The classical Kepler problem and geodesic motion on spaces of constant curvature," *J. Math. Phys.* **41** (2000) 8108.