6. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen: in den Übungen der 9. Semesterwoche (5. Dezember 2007)

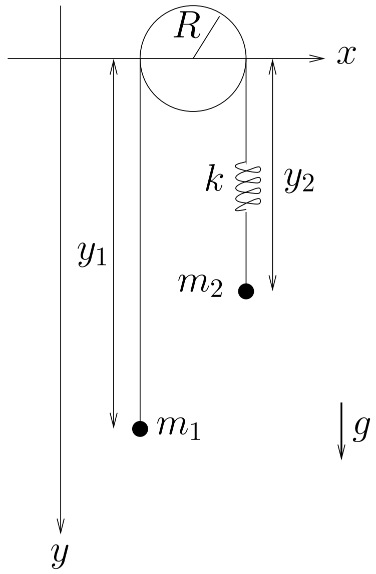
Aufgabe 24: (5 Punkte)

Die Atwoodsche Fallmaschine besteht aus zwei Massen m_1 und m_2 im Schwerefeld der Erde, die über ein Seil der Länge l_0 verbunden sind, welches reibungsfrei über eine Rolle vom Radius R läuft. Seil und Rolle sind dabei als masselos anzunehmen. In das Seil sei zusätzlich eine ideale Feder mit der Federkonstanten k installiert.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion der Atwoodschen Fallmaschine mit zusätzlicher Feder in den Koordinaten y_1 und y_2.

b) Überlegen Sie sich neue Koordinaten z_1 und z_2, in denen die Lagrange-Funktion in Summanden zerfällt, die nur von z_1 oder z_2 abhängen. Diese Koordinaten sind Linearkombinationen von y_1 und y_2 mit bzw. ohne Koeffizienten m_1 und m_2.

c) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf und interpretieren Sie diese physikalisch.



Aufgabe 25: (5 Punkte)

Die kleine Cornelia rutscht auf dem Rücken einer Riesenschildkröte hinunter. Ab welchem Winkel berührt sie die Schildkröte nicht mehr und befindet sich im freien Fall? Vernachlässigen Sie die Reibung, und nehmen Sie den Schildkrötenpanzer als perfekt kugelförmig an. Cornelia startet ganz oben mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit.

Aufgabe 26: (5 Punkte)

Für das Keplerproblem $V(r) = -a/r$ ist neben Energie und Drehimpuls der Lenzsche Vektor $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - a\,\hat{\mathbf{r}}$ eine Erhaltungsgröße (Drehimpuls: $\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$).

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung, dass $\dot{\mathbf{M}} = 0$. In welcher Ebene liegt $\mathbf{M}$?

b) Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\mathbf{r} = (s, 0, 0)$ und $\dot{\mathbf{r}} = (0, v_0, 0)$. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung und die Erhaltung des Lenzschen Vektors, und leiten Sie daraus die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda-2)x^2 - 2\lambda(\lambda-1)sx + \lambda^2 s^2, \qquad \lambda = \frac{msv_0^2}{a},$$

für die Bahnkurven ab. Für welche Parameter ergeben sich Parabel, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?