9. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen in den Übungen der 12. Semesterwoche (9. Januar 2008)
Besprechung der Präsenzaufgabe in der 11. Semesterwoche (19. Dezember 2007)

Aufgabe 34: (5 Punkte)

Die von einer kugelsymmetrischen Massenverteilung ausgehende Gravitationskraft wirkt im Außenraum genau so, als befände sich die gesamte Masse im Mittelpunkt der Kugel.

a) Zeigen Sie, dass dies für die sogenannte Yukawa-Kraft mit Potential

$$V(r) = g\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

immer noch richtig ist, allerdings mit einer effektiven Masse, die sich von der Gesamtmasse M der Kugel unterscheidet. Geben Sie diese effektive Masse an.

b) Für die Gravitation gilt ebenfalls, dass das Innere einer hohlen Kugelschale (mit kugelsymmetrischer Massenverteilung) kräftefrei ist. Zeigen Sie, dass dies für die Yukawa-Kraft mit $\mu \neq 0$ nicht mehr der Fall ist, sondern dass eine Kraft auf ein Probeteilchen im Kugelinnern ausgeübt wird, die vom Abstand vom Zentrum abhängt.

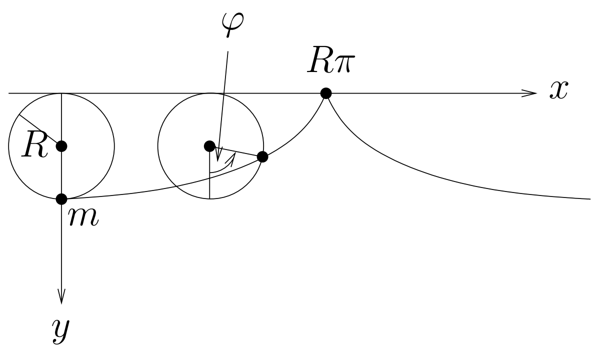
Aufgabe 35: (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerefeld der Erde auf einer Zykloide. Diese wird durch das Abrollen eines Kreises vom Radius R auf der Unterseite einer Geraden realisiert.

a) Überlegen Sie sich die Parameterdarstellung der realisierten Zykloide in Abhängigkeit vom Winkel φ (siehe Skizze).

b) Wählen Sie den Winkel φ als generalisierte Koordinate und bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

c) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und lösen Sie diese. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.



Aufgabe 36: (5 Punkte)

Gegeben seien drei Massenpunkte: $m_1 = 4m$ bei $\mathbf{r}_1 = (a, 0, 0)$, $m_2 = m$ bei $\mathbf{r}_2 = (0, 2a, 4a)$ und $m_3 = m$ bei $\mathbf{r}_3 = (0, 4a, 2a)$, welche (z.B. durch masselose Stangen) starr miteinander verbunden sind.

a) Berechnen Sie den zugehörigen Trägheitstensor.

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und die Hauptachsen $\mathbf{e_i}$.

c) Wie groß ist das Trägheitsmoment, wenn sich das System um eine Achse durch den Koordinatenursprung und den Punkt $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ dreht?

d) Wie groß ist das Trägheitsmoment für eine Drehung um die Achse parallel zur z-Achse, die durch den Schwerpunkt des Systems verläuft?

Aufgabe 37 (Weihnachtsaufgabe) (5 Zusatzpunkte)

In welcher Höhe muss der kleine Konrad eine Weihnachtsbaumkugel (Hohlkugel mit Radius R) anstoßen, damit sie ohne zu gleiten auf einem flachen Tisch direkt ins Rollen kommt? Berechnen Sie das Trägheitsmoment explizit. Der Kraftstoß wirke in horizontaler Richtung, also parallel zum Tisch.

Aufgabe 33 (Präsenzaufgabe): Brachistochrone

Eine Rutsche beginnt bei $x = 0$ und $y = 0$ und endet bei $x = L$ und $y = -h$. Welche Form muss sie haben, damit man in möglichst kurzer Zeit hinunterrutschen kann?

Die gesuchte Funktion, deren Graph die Rutsche beschreibt, sei $f(x)$.

a) Finden Sie den Ausdruck für die Zeit als Funktional

$$T[f] = \int_0^L \mathcal{L}(f(x), f'(x))\, dx.$$

Benutzen Sie dafür den Energieerhaltungssatz.

b) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und vereinfachen Sie sie (Ergebnis: $1 + f'^2 + 2ff'' = 0$.)

c) Zeigen Sie: Diese Gleichung ist äquivalent zu $ff'^2 + f - c = 0$ mit c konstant. Zeigen Sie weiter, dass für $x = \frac{c}{2}(\theta - \sin(\theta))$ mit beliebigem θ eine Lösung gegeben ist durch $f(x) = \frac{c}{2}(1 - \cos(\theta))$. Machen Sie sich klar, dass dies eine Zykloide parametrisiert (eine Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt auf einem auf einer Geraden abrollenden Kreis beschreibt).