17 Schwingungen, Kontinua

17.1 Kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad

- Harmon. Osz.: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m}$
- Allgemeine Lagrange-Fkt.: $L = f(q)\dot{q}^2 - V(q)$

  – Sei $V'(q_0) = 0$ („Ruhelage"). Wähle neue Koordinate $\tilde{q} \equiv q - q_0$; Anschließend Umbenennung: $\tilde{q} \to q$.

  $\Rightarrow \quad L = f(q_0+q)\dot{q}^2 - V(q_0+q)$ mit $V'(q_0) = 0$

  Entwickle zur Ordnung $O(q^2)$:

  $$L = f(q_0)\dot{q}^2 - \underbrace{V(q_0)}_{\text{irrelevant}} - \frac{1}{2}V''(q_0)q^2$$

$\Rightarrow$ Harm. Osz. mit $\omega = \sqrt{V''(q_0)/(2f(q_0))}$.

17.2 Kleine Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

- (Benutze Summenkonvention) – Allgemeine Lagr.-Fkt:

  $$L = f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q) \quad , \quad q \equiv q_1, \cdots, q_n$$

- Sei: $\frac{\partial V}{\partial q_i}(q_0) = 0$ für alle i $\quad (q_0 \equiv q_{1,0}, \cdots, q_{n,0})$

  („Ruhelage")

- Wie oben: $q \to q_0 + q$, Entwicklung bis $O(q^2)$

  $$\Rightarrow L = \underbrace{f_{ij}(q_0)}_{\equiv A_{ij}}\dot{q}_i\dot{q}_j - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_0)}_{\equiv B_{ij}} \cdot q_i q_j \quad \to 2 \text{ Matrizen } A \,\&\, B.$$

  (O.B.d.A. seien A & B symmetrisch)

- Lagrange-Fkt. in Matrix-Schreibweise:

$$L = \dot{q}^T A \dot{q} - q^T B q \quad \text{mit} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

- Wähle $R \in SO(n)$ so daß $R^T A R = A_D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ diagonal ist.

- Definiere neue Variable $q' = R^{-1} q$ (bzw. $q = R q'$).

$$\Rightarrow L = \dot{q}'^T R^T A R \dot{q}' - q'^T \underbrace{R^T B R}_{\equiv B'} q' = \sum_i a_i (\dot{q}_i')^2 - q'^T B' q^T$$

- Definiere neue Variable $q_i'' = \sqrt{a_i}\, q_i'$. Führe Umbenennung durch: $q'' \to q$, $B' \to B$.

$$\Rightarrow L = \dot{q}^T \dot{q} - q^T B q$$

- Wähle $R \in SO(n)$ so daß $R^T B R = B_D = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_d \end{pmatrix}$.

Definiere $q' = Rq$; Umbenennung $q' \to q$.

$$\Rightarrow L = \dot{q}^T \dot{q} - q^T B_D q = \underbrace{\sum_i \left(\dot{q}_i^2 - b_i q_i^2 \right)}_{}$$

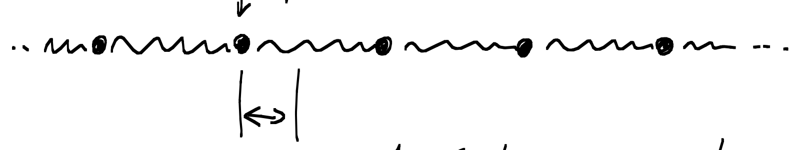
n unabhängige harmon. Oszillatoren mit Frequenzen $\omega_i = \sqrt{b_i}$.

Kommentare:

- gewisse $b_i < 0$ $\Rightarrow$ Instabilität der Ruhelage
- gewisse Koordinaten zyklisch $\Rightarrow$ entsprechende $b_i = 0$
  $\Rightarrow$ einfache Translationsbewegung (keine Schwingung!) in entsprechenden Koordinaten: $q_i = q_i^0 + v_i^0 \cdot t$

17.3 Lineare Kette, Kontinuumslimes

Massenpkt. "i"



$q_i \equiv$ Auslenkung des Massenpunktes "i" aus seiner Ruhelage.

$$\Rightarrow L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{k}{2} \underbrace{(q_{i+1} - q_i)}_{\text{Längenänderung der Feder zwischen Pkt. "i" und Pkt. "i+1".}}{}^2$$

- Diese Lagrange-Fkt. ist vom unter 17.2 diskutierten Typ mit Ruhelage $q_0 = (q_1 \cdots q_n) = (0 \cdots 0)$. (Um keine Randeffekte zu haben, nehme man an daß "$q_{n+1} \equiv q_1$"; also eine "kreisförmige" Kette.)

- Kontinuumslimes

Falls sich die Auslenkungen benachbarter Pkt.-e nicht zu stark unterscheiden, können wir eine näherungsweise Beschreibung durch eine glatte Fkt. $q(x)$ versuchen:

x - Ortskoordinate in Richtung der Kette

$$q(x_i) \equiv q_i$$

$$q'(x_i) \approx \frac{q(x_{i+1}) - q(x_i)}{\Delta x} = \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta x} \qquad \Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$\Rightarrow L = \sum_i \left[\frac{m}{2} \dot{q}(x_i)^2 - \frac{k}{2} q'(x_i)^2 \cdot \Delta x^2 \right]$$

$$= \sum_i \Delta x_i \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m}{\Delta x}\right) \dot{q}^2(x_i) - \frac{(k \cdot \Delta x)}{2} \cdot q'(x_i)^2 \right]$$

Kontinuumslimes: $\Delta x \to 0$ mit $K \cdot \Delta x = \kappa$ und $\frac{m}{\Delta x} = \varrho$

"Liniendichte".

Dabei gilt: $\sum_i \Delta x_i \to \int dx$,

Also: $L = \int dx \left(\frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 - \frac{\kappa}{2} q'^2 \right)$; $q = q(x,t)$

$$S = \int dt\, L = \int dt\, dx\, \underbrace{\left(\frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 - \frac{\kappa}{2} q'^2 \right)}_{} \equiv \int dt\, dx\, \underset{\sim}{\mathcal{L}}$$

"(einfacher) Feldtheorie-Lagrangian;
$q(x,t)$ ist hier das (skalare) Feld.

Ableitung der Bewegungsgleichungen:

$$0 = \delta S = \int dt\, dx \left(\frac{\varrho}{2} \delta(\dot{q}^2) - \frac{\kappa}{2} \delta(q'^2) \right)$$

$$= \int dt\, dx \left(\varrho \dot{q}\, \delta\dot{q} - \kappa q'\, \delta q' \right) = \int dt\, dx \left(-\varrho \ddot{q} + \kappa q'' \right) \cdot \delta q$$

+ Randterme

$\Rightarrow$ $\ddot{q} - c^2 q'' = 0$ mit $c^2 \equiv \kappa/\varrho$
(Wellengleichung)

Lösungen: beliebige Linearkombinationen von Wellen vom Typ $q = A \cos[k(x - ct - x_0)]$ (A, k, x_0 beliebig)

($\Rightarrow$ c ist die "Schallgeschwindigkeit")

Kommentar: Der Übergang zum echten Festkörper kann als 3-dim. Verallgemeinerung der obigen Wirkung aufgefaßt werden:

$\int dx \frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 \to \int d^3x \frac{\varrho}{2} \sum_{a=1}^{3} \dot{q}_a^2$

($q_a = q_a(\bar{x}, t)$ beschreibt Auslenkung in die x^a-Richtung)

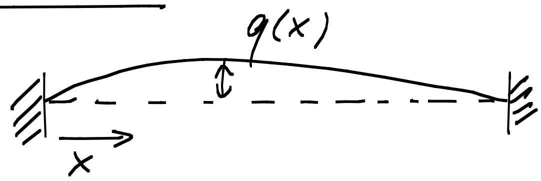
; $\int dx \frac{\kappa}{2} q'^2 \to \int d^3x \frac{1}{2} \underbrace{\kappa_{ab,cd}}_{} (\partial_a q_b)(\partial_c q_d)$

versch. elastische Konstanten

$\Rightarrow$ Kompressions-, Scherungs-, Verdrillungswellen ...

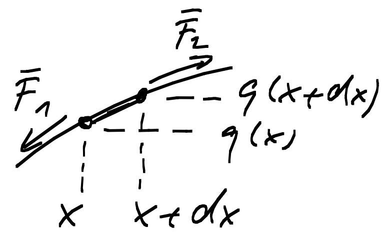
17.4 Schwingende Saite

- eingespannte Saite:



(im Gegensatz zur lin. Kette geschieht hier die Auslenkung orthogonal zur x-Achse.)

- konventionelle Herleitung der Bewegungsgleichungen:



$\Rightarrow$ Kräftebilanz + Newt. Grundgesetz für infinitesimales Stück.
(→ Physik I bzw. diverse Experimentalphysikbücher)

<u>Hier:</u> <u>Wirkungsprinzip</u> $\quad L = T - V$

$$T = \int dx \, \frac{\varrho}{2} \dot{q}^2$$

$$V = F \cdot \Delta x = F\left[\int \sqrt{dx^2 + dq^2} - \int dx\right]$$

F: Kraft, mit der die Saite gespannt ist
Δx: Längenänderung der Saite

$$V = F \int dx \left(\sqrt{1 + q'^2} - 1\right) \approx \int dx \, \frac{F}{2} q'^2$$

$$\Rightarrow L = \int dx \left(\frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 - \frac{F}{2} q'^2\right)$$; wie bei 14.3, aber mit $\sigma \to F$

$\Rightarrow$ Dynamik wird durch Wellengleichung $\ddot{q} - c^2 q'' = 0$ mit $c^2 = \frac{F}{\varrho}$ beschrieben.

17.5 (Ideale) Hydrodynamik (nur informativ)

(Als weiteres Beispiel einer "Feldtheorie". Die relevanten Felder sind $\underbrace{\bar{v}(\bar{x},t)}_{\text{Geschwindigkeit}}$ und $\underbrace{\rho(\bar{x},t)}_{\text{Dichte}}$ und $\underbrace{p(\bar{x},t)}_{\text{Druck}}$ und ...)

- Massenstrom: $\rho\bar{v}$
- inkompressible Strömung: $\bar{\nabla}\cdot\bar{v} = 0$ (vgl. Liouville-Theorem)

  allgemein: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v}) = 0$

  ("Massenerhaltung" oder Kontinuitätsgleichung)

- Newtonsches Grundgesetz angewandt auf kleines mitbewegtes Volumenelement: $\rho\frac{d\bar{v}}{dt} = -\bar{\nabla}p + \bar{\tilde{f}}$ ← Kraftfeld (bezogen auf Volumenelement der Flüssigkeit)

  Druck

- $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v}$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p + \bar{f}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{v}) = 0$$

Kraftfeld (bezogen auf Massenelement, also in N/kg)

Eulersche Gleichungen

(ideal: kein Wärmeaustausch oder Viskosität)

- Vereinfachungen:
  - inkompressibel $\Rightarrow$ $\rho = \text{const.}$ bzw. $\bar{\nabla}\cdot\bar{v} = 0$
  - stationäre Strömung $\Rightarrow$ $\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} = 0$
  - Kraftfeld sei konservativ $\Rightarrow$ $\bar{f} = -\bar{\nabla}V$

- Eulersche Gl.: $\Rightarrow$ $(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{v} + \bar{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}p + V\right) = 0$

- Multipliziere mit $\bar{v}$ und beachte $\bar{v}\cdot\bar{\nabla} = \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}\cdot\left(\frac{d}{dt}\bar{v}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varrho}p + V\right) = 0$$

bzw: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{p}{\varrho} + V\right) = 0$

bzw: $\frac{1}{2}\bar{v}^2 + \frac{p}{\varrho} + V$ = const. entlang d. Flußlinien
("Bernoulli-Gl.")

• Auch ableitbar: $\mathrm{rot}\,\bar{v} = 0$ bei t_0 $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\bar{v} = 0$ für immer
("Vortizität ist erhalten") Potentialströmung

Dies wird aber beim Umströmen von Hindernissen verletzt $\Rightarrow$ Wirbelbildung $\Rightarrow$ Turbulenz
(mehr z.B. in Landau/Lifschitz, VI
oder Sommerfeld, II)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Abschließend noch ein Hinweis in eigener Sache:
Zukünftige Teilchen-Theoretiker sollten nach Theorie II–IV möglichst bald:
- Quantfeldtheorie I, II
- Allg. Relativitätstheorie
- Kosmologie
- Gruppentheorie
- Differentialgeometrie

} auch schon jetzt möglich

hören (oder selbst lernen) und sich ca. 1 Jahr vor dem Beginn der Diplomarbeit um Kontakt zum potentiellen Diplom-Betreuer bemühen.