5 Lagrange - Formalismus

Gegeben eine Abbildung ("Zuordnung")

$$\text{Trajektorie } (\equiv \text{Funktion}) \xmapsto[\substack{\text{(Wirkungs-)}\\ \text{Funktional}}]{\qquad\qquad} \text{reelle Zahl},$$

verläuft die phys. Bewegung so, daß der Wert des Wirkungsfunktionals minimiert wird. Diese Forderung kann als Dgl., die Euler-Lagrange-Gl., ausgedrückt werden.

5.1 Variationsrechnung

Funktion – Abb. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y(x)$$

oder auch Abb. $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{x} \longmapsto y(\bar{x})$$

Funktional – Abb. $\underbrace{\mathbb{V}}_{\text{ein bestimmter Raum von (Menge von) Funktionen}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto F[y]$$

z.B. • Sei V der Raum der diff.baren Fkt.-en auf $[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$. Mögliche Funktionale wären etwa

$$F_1[y] = y(0.5)$$

$$F_2[y] = y'(0.5)$$

$$F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y(0.9)$$

$$\ldots$$

- Für uns besonders wichtig: Funktionale vom Typ

$$F[y] = \int_0^1 f(y(x), y'(x), x)\, dx$$

(f ist eine geeignet gewählte Fkt. von 3 Variablen).

- <u>Beispiele für Funktionale von diesem Typ:</u>

1) Parametrisiere den Weg von $\bar{y}_a$ nach $\bar{y}_b$ durch $\bar{y} = \bar{y}(\tau)$ mit $\tau \in [0,1]$. Infinites. Wegstück: $|d\bar{y}| = \left|\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right| \cdot d\tau$. Gesamtlänge des Weges:

$$\int_{\bar{y}_a}^{\bar{y}_b} |d\bar{y}| = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right)^2} \equiv F[\bar{y}]$$

(Im Unterschied zu unserer obigen Diskussion hängt F hier von 3 Funktionen, (y^1, y^2, y^3), ab. Aber das ist kein prinzipieller Unterschied.)

2) Weglänge im Gebirge.
(Genauso wie 1), aber mit 2-dim. Vektor $\bar{y}$ und mit "Höhenfunktion" $z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{y} \mapsto z(\bar{y})$.)

   - Infinit. Wegstrecke: $ds = \sqrt{d\bar{y}^2 + dz^2}$
   - Weglänge: $$F[\bar{y}] = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right)^2 + \left(\nabla_{\bar{y}} z(\bar{y}) \cdot \frac{d\bar{y}}{d\tau}\right)^2}$$

(Während 1) bekanntermaßen durch Gerade minimiert wird, ist die Minimierung von 2) i.A. ein nichttriviales Problem.)

<u>Schlußfolgerung:</u> Die Extremalisierung derartiger Funktionale ist eine interessante und lohnende Aufgabe.

<u>Vorbemerkung:</u> Für <u>Funktionen</u> wissen wir: wenn ein Extremum bei $x = x_0$ vorliegt, so ist $y'(x_0) = 0$. Hier haben wir es mit dem analogen Problem für <u>Funktionale</u> zu tun.

<u>Extremalisierung eines Funktionals:</u>

- gegeben Funktional $F[y] = \int_0^1 f(y, y', x)\,dx$,
  definiert auf den Raum der stetig diff.baren Funktionen
  $y: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = y_a$, $y(1) = y_b$.
- Annahme: $F[y]$ wird durch die Funktion $y_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ extremalisiert.
- Sei $\delta y(x)$ eine belieb. Fkt. mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$.
- Dann erfüllt $y_\alpha = y_0 + \alpha \cdot \delta y$ die gleichen Randbed.-en wie y. Wir können also die Fkt.

$$\begin{array}{ccc} (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longmapsto & F[y_\alpha] \end{array}$$

betrachten.

- Diese Fkt. hat nach unserer Annahme ein Extremum bei $\alpha = 0$.
  $\Rightarrow \frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] = 0$.
- Betrachte: $F[y_\alpha] = \int_0^1 dx\, f(y_0 + \alpha\delta y, y_0' + \alpha\,\delta y', x) =$

$$= F[y_0] + \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y_0', x)\, \alpha\, \delta y' \right] + O(\alpha^2).$$

- Der Ausdruck linear in α muß verschwinden:

$$0 = \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{d}{dx}(\delta y) \right] = \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \delta y \right]$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right] \delta y \quad \text{(bei } y = y_0\text{, aber für } \underline{\text{beliebige}}\ \delta y\text{)}$$

<u>Also:</u> y_0 extremalisiert $F \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$ Eulersche Gl.

(bei $y = y_0$ & für alle $x \in [0,1]$)

5.2 Das Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung

(auch bekannt als "Hamiltonsches Prinzip")

- sehr allgemeine und "mächtige" Formulierung der Bewegungsgesetze mechanischer (und anderer!) Systeme.
- Man hätte die Vorlesung auch hier starten können (vgl. Landau/Lifschitz, Bd. I).
- <u>Vorbereitung</u>: Beschreibung der Lage eines mech. Systems
  - <u>bisher</u>: kartes. Koordinaten (x_a^1, x_a^2, x_a^3) für $\underbrace{a = 1 \ldots N}_{\text{hinreichend viele Punkte}}$
  - <u>allgemeiner</u>: $\boxed{\text{verallg. Koordinaten}}$ $(q_1, \cdots, q_s)$

    z.B.:
    - N Massenpkt.-e: $(q_1 \cdots q_s) = (x_1^1, x_1^2, \cdots, x_N^2, x_N^3)$
    - Rad auf Welle: $q_1 = \varphi$ (Drehwinkel)
    - Perle auf (gebogenem) Draht: $q_1 = s$ (Abstand entlang Draht)

Hamiltonsches Prinzip:

Für jedes mech. System, beschrieben durch verallg. Koordinaten $q_1 \cdots q_s$, existiert eine Fkt.

$$L = L(q_1, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_s, t) \quad (\text{kurz: } L(q, \dot{q}, t))$$

so daß gilt:

Die phys. Bewegung des Systems aus einer Lage $q = q^{(1)}$ bei $t = t_1$ in eine Lage $q = q^{(2)}$ bei $t = t_2$ verläuft so, daß

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t)$$

minimal wird. (Im Vergleich zu anderen denkbaren Trajektorien mit $q(t_1) = q^{(1)}$ und $q(t_2) = q^{(2)}$!)

Kommentare:

- L heißt Lagrange-Fkt., S heißt Wirkungsfunktional.
- Minimalität gilt nur für kleine Bahnabschnitte. Insgesamt kann es sein, daß S nur extremal wird.
- Dieses Prinzip läßt sich übertragen auf: Spezielle & Allg. Rel. theorie, Feldtheorie, Stringtheorie, etc. ... . Das Funktional S spielt wichtige Rolle bei Quantisierung $\Rightarrow$ enorme Bedeutung des Wirkungsprinzips
- Wir kennen bereits die aus dem Extremalprinzip folgende(n) Differentialgleichung(en): Die Euler(-Lagrange) Gleichung(en):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{(für eine verallg. Koordinate } q)$$

(auch: "Lagrangesche Gl.-en 2. Art")

Die oben gegebene Herleitung läßt sich leicht verallgemeinern auf Vektorfunktionen $\bar{y}(t)$ bzw., in diesem Zush.hang auf viele q's : $q_1 \cdots q_s$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{für } i = 1 \cdots s$$

5.3 Einfache Anwendungen der Lagrange-Gl.en

① Massenpkt. im Potential: $L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = T - V = \frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 - V(\bar{x})$

Bewegungsgleichungen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L - \frac{\partial}{\partial x^i} L = 0$

$$\frac{d}{dt} m\dot{x}^i + \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0$$

$$m\ddot{x}^i = F^i \quad \text{mit } F^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

(wie erwartet!)

② ganz analog: System wechselwirkender Massenpunkte

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\bar{x}}_a^2 \quad ; \quad V = \sum_{a>b} V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$$

$$L = T - V$$

$$\Downarrow$$

(für alle a) $\quad m_a \ddot{\bar{x}}_a = \bar{F}_a$ mit $\bar{F}_a = \sum_b \bar{F}_{ab} = -\bar{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$

③ Perle auf gekrümmten Draht:

Draht beschrieben durch $\bar{x} = \bar{x}(s)$; s sei Abstand entlang des Drahtes.

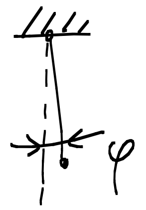
$$L = \frac{m}{2} v^2 - V(\bar{x}(s)) \; ; \quad v = |\bar{v}| = \left|\frac{d\bar{x}}{dt}\right| = \underbrace{\left|\frac{d\bar{x}}{ds}\right|}_{=1 \text{ per Def. von } s} \cdot \dot{s} = \dot{s}$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - V(\bar{x}(s))$$

$$\Downarrow$$

Bewegungsgleichung: $$m\ddot{s} - \underbrace{(-\bar{\nabla} V) \cdot \underbrace{\frac{d\bar{x}}{ds}}_{\text{Einheitsvektor in Drahtrichtung}}}_{\text{Projektion der Kraft auf Bahnrichtung}} = 0$$

④ (mathematisches) Pendel der Länge l:



$$L = \frac{m}{2} \bar{v}^2 - V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^{2\,*)} - (-mgl\cos\varphi)$$

"$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial\varphi}$" $$\Rightarrow \quad m l^2 \ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0 \; ; \quad \sin\varphi = \varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

($\rightarrow$ harmon. Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.)

*) Wem der Schritt $|\bar{v}| = l \cdot \dot{\varphi}$ zu schnell ist, der mag statt dessen explizit $\bar{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 = [(l\sin\varphi)^\cdot]^2 + [(l\cos\varphi)^\cdot]^2 =$

$= l^2\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = l^2\dot{\varphi}^2$ schreiben.

⑤ Pendel in einem mit Beschleunigung a nach oben bewegten Fahrstuhl:

$$\bar{v} = \Big(\underbrace{(l\sin\varphi)^\cdot}_{\text{horizontal}},\ \underbrace{at - (l\cos\varphi)^\cdot}_{\text{vertikal}}\Big) \qquad \Big| \qquad V = mg\left(\frac{at^2}{2} - l\cos\varphi\right)$$

Ab jetzt "greift" der Formalismus: Aus

$$v^2 = a^2t^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2atl(\sin\varphi)\dot{\varphi} \quad \& \quad V = mg\left(\frac{at^2}{2} - l\cos\varphi\right)$$

folgt:

$$0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{m}{2}v^2 - V\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\,\frac{m}{2}\left(2l^2\dot{\varphi} + 2atl\sin\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{m}{2}\,2atl\dot{\varphi}\sin\varphi + mgl\cos\varphi\right]$$

$$= ml^2\ddot{\varphi} + mal\sin\varphi + matl(\cos\varphi)\dot{\varphi} - matl\dot{\varphi}\cos\varphi + mgl\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g+a}{l}\sin\varphi = 0$$

(Wie bei ④, nur mit "$g+a$" an Stelle von "g".)

Beachte: So wie hier der "Zwang" (Bewegung des Aufhängungspunktes) eine explizite Zeitabhängigkeit von T & V eingeführt hat, könnte natürlich auch Fälle behandeln wo V (z.B. wegen sich ändernder elektr. Felder etc) von vornherein zeitabhängig ist. Weitere Beispiele → Übungen.

5.4 Vereinfachte Herleitung der Lagrangeschen Gl.-en

- Betrachte Variation $\delta q(t)$ der Trajektorie $q(t)$. Aus der Extremalität von S folgt

$$0 \overset{!}{=} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L(q, \dot{q}, t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q} \delta \dot q \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q} \frac{d}{dt}(\delta q) \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) \delta q \right)$$

partielle Int. ohne Randterme, da $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ per Annahme.

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} \right)}_{\text{muß identisch verschwinden}} \cdot \underbrace{\delta q}_{\text{beliebig}}$$

(Übergang zu mehreren q's elementar: $\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i$; weiter wie bisher.)

<u>Wichtige Kommentare</u>

- L ist nur bis auf eine totale Zeitableitung definiert, denn
$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t)$$
führt auf $S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q,t) = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$.
Damit ist $\delta S' = \delta S$ und L' ist also mit L gleichwertig.

- Wir lassen nicht zu, daß L von $\ddot q$, $\dddot q$ etc. abhängt, da sonst die Bew.gl.-en $\ddddot q$, $\ddot{\ddot{\dot q}}$ etc. enthalten würden.
(Daher insbesondere unser Ansatz $L + \frac{d}{dt} f(q,t)$ (ohne $\dot q$!) oben.)

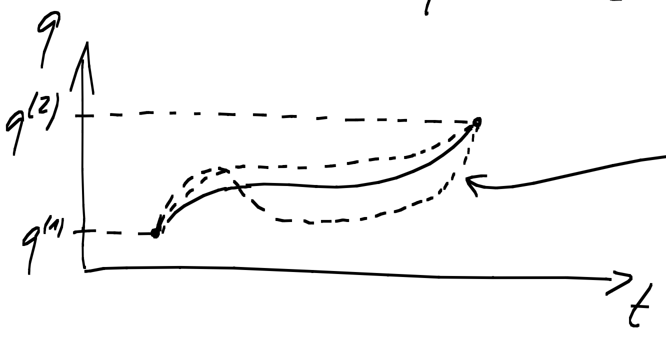
5.5 Ausblick auf Quantenmechanik (fortgeschritten)

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Massenpkt.-es (Systems) von $(t_1, q^{(1)})$ nach $(t_2, q^{(2)})$ ist

$$w \sim |A|^2 \quad ; \quad A \in \mathbb{C} \text{ heißt "Amplitude".}$$

Es gilt $A \sim \underbrace{\int Dq}_{} \, e^{iS}$

Summe über alle möglichen Wege von $q^{(1)}$ bei t_1 nach $q^{(2)}$ bei t_2 ("Pfadintegral"):



verschiedene Fkt.-en $q(t)$; der klassische Weg ist genau eine davon.