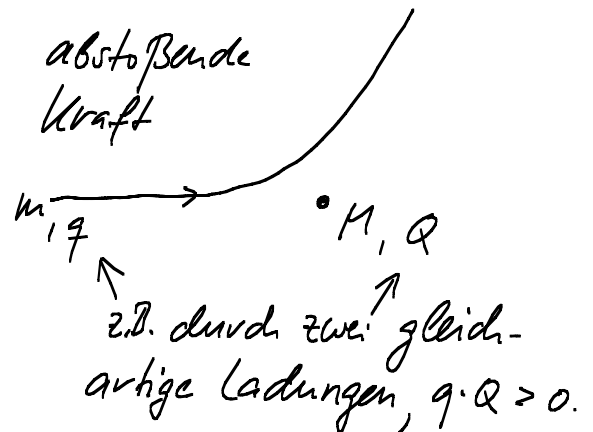


9 Zerfalls- und Stoßprozesse

- wichtig in Chemie, Kernphysik, Teilchenphysik (jeweils mit quantenmech. Aspekten, die hier ignoriert werden).
- in Astrophysik:
 - Vorbeiflug einer Raumsonde an einem entfernten Planeten
 - "Begegnung" (ohne Kollision) zweier Himmelskörper

(Dies sind perfekte, rein klassische Beispiele in unserem Sinne. Die technischen Mittel zur Behandlung stehen uns seit dem letzten Kapitel zur Verfügung.)



- Beispiel aus dem "täglichen Leben": Billiard

9.1 Teilchenzerfall

(\rightarrow Zerfall instabiler Isotope, $S \rightarrow \pi\pi$, Explosionen ("klassisch"))

$$M, E \longrightarrow m_1, E_1 + m_2, E_2$$

Masse \uparrow innere Energie \uparrow

- Massenerhaltung: $M = m_1 + m_2$ (wird in klass. Mechanik vorausgesetzt)
- Energieerhaltung: $E + \frac{M}{2} \bar{v}^2 = E_1 + \frac{m_1}{2} \bar{v}_1^2 + E_2 + \frac{m_2}{2} \bar{v}_2^2$

- Impulserhaltung: $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$ bzw.
 $M\bar{v} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2$

O.B.d.A. ruhe M vor dem Zerfall: $\bar{p} = 0$ (bzw. $\bar{v} = 0$)

(Dies kann durch Galilei-Boost stets erreicht werden.)

$$\Rightarrow \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0 \quad ; \quad \underbrace{E - E_1 - E_2}_{\Delta E} = \frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2}$$

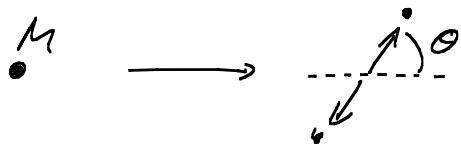
Eliminieren von \bar{p}_2 liefert: $\Delta E = \frac{\bar{p}_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$

$$\text{oder } |\bar{p}_1| = |\bar{p}_2| = \sqrt{\frac{2\Delta E \cdot m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad ; \quad \bar{p}_1 = -\bar{p}_2$$

(auch klar: $|\bar{v}_1|/|\bar{v}_2| = m_2/m_1$)

Diese Beschreibung durch ErhaltungsgröÙen bleibt unvollständig:

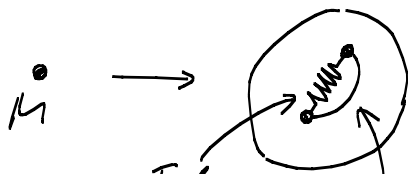
Die Flugrichtung der Produkte bleibt unbekannt.



erfordert ① zusätzliche mikroskop. Information oder

② Annahme einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

zu ① z.B.:



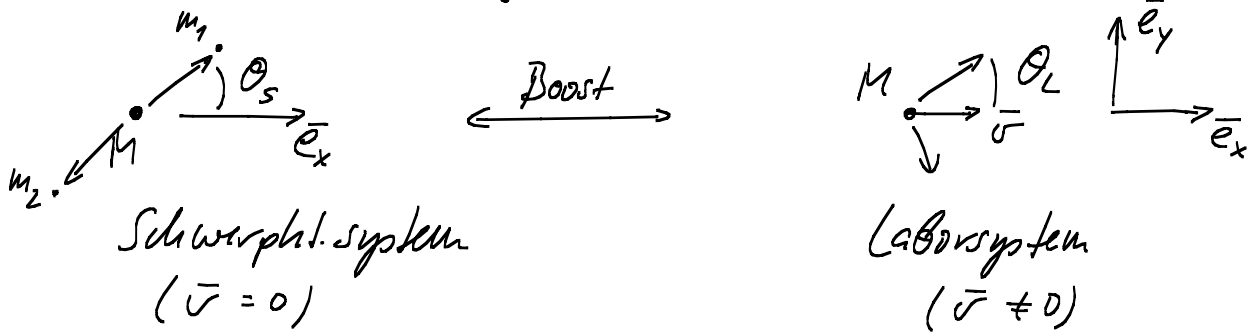
zu durchschneidendes Band

(in "echten" phys. Beispielen spielen oft Spin oder Drehimpuls des zerfallenden Teilchens diese Rolle.)

zu ② z.B.:

- "quantenmechanische" Wahrscheinlichkeit
- Ensemble zufällig "orientierter" Ausgangsteilchen (jede Richtung gleichwahrscheinlich)

Beispielrechnung zum Fallstrahl-Boost



Gegeben ΔE & θ_S , was ist θ_L ?

Lösung: Wir wissen noch: $|\bar{p}_{1,S}| = \sqrt{2\Delta E m_1 m_2 / M}$

$$\bar{p}_{1,S} = |\bar{p}_{1,S}| (\cos \theta_S, \sin \theta_S)$$

$$\bar{v}_{1,S} = \bar{p}_{1,S} / m_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{v}_{1,L} &= \bar{v}_{1,S} + \bar{v} = |\bar{v}_{1,S}| (\cos \theta_S, \sin \theta_S) + |\bar{v}| (1, 0) \\ &= (|\bar{v}_{1,S}| \cos \theta_S + |\bar{v}|, |\bar{v}_{1,S}| \sin \theta_S) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \theta_L = \frac{|\bar{v}_{1,S}| \sin \theta_S}{|\bar{v}_{1,S}| \cos \theta_S + |\bar{v}|} \quad (\text{Nach beliebigen Ausgangs-} \\ \text{stößen einsetzen und vereinfachen ...})$$

Kommentar: Beim Zerfall in mehr als 3 Teilchen (z.B. $M \rightarrow m_1, m_2, m_3$) genügen die Erhaltungssätze i.A. nicht mehr, um die Geschwindigkeiten der Zerfallsprodukte zu bestimmen. Man muß sich dann i.A. mit einer Geschwindigkeitsverteilung zufriedengeben. (z.B. $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$)

9.2 Elastischer Stoß

- allgemeiner Stoß: m_1, E_1 \longrightarrow m_1', E_1'
 ("2 \rightarrow 2 Streuung") m_2, E_2 \longrightarrow m_2', E_2'
- kein Massenaustausch $\rightarrow m_{1,2}' = m_{1,2}$
- elastisch $\rightarrow E = E'$ (mit $E = E_1 + E_2$ & $E' = E_1' + E_2'$)

Also: $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\bar{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2'^2}{2m_2}$$

Eine mögliche prinzipielle Vorgehensweise: (zur Bestimmung von $\bar{p}_{1,2}'$ bei gegebenem $\bar{p}_{1,2}$)

- Gehe ins Schwerpunktsystem S:

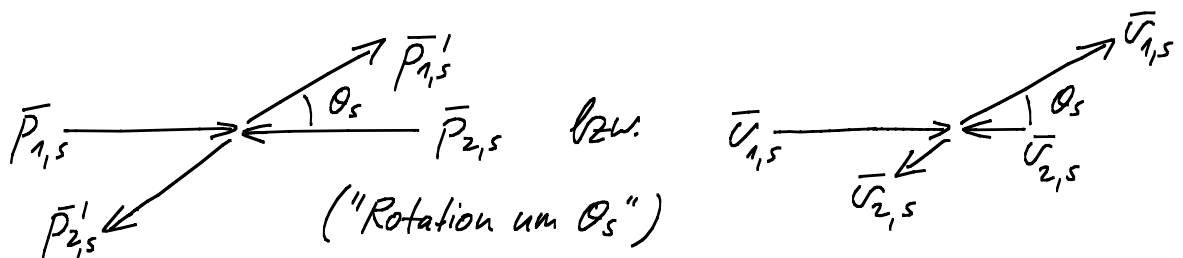
$$\bar{p}_{1,s} + \bar{p}_{2,s} = \bar{p}_s = 0$$

- Man denke sich einen sich einer zwischenzeitlich entstandenen Zustand ("instabiles Teildchen") mit $\bar{p}_s = 0$, welches unter Freisetzung eines Energieüberschusses $\Delta E = \frac{\bar{p}_{1,s}^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_{2,s}^2}{2m_2}$ zerfällt (vgl. 9.1).

- Wie oben: $\bar{p}_{1,s}' = -\bar{p}_{2,s}'$

$$|\bar{p}_{1,s}'| = |\bar{p}_{2,s}'| = \sqrt{\frac{2\Delta E m_1 m_2}{M}} \quad (= |\bar{p}_{1,s}| = |\bar{p}_{2,s}|)$$

$\Rightarrow \bar{p}_{1,s} \rightarrow \bar{p}_{1,s}'$ & $\bar{p}_{2,s} \rightarrow \bar{p}_{2,s}'$ entspricht (in S!) nur einer Drehung (keine Betragänderung!):

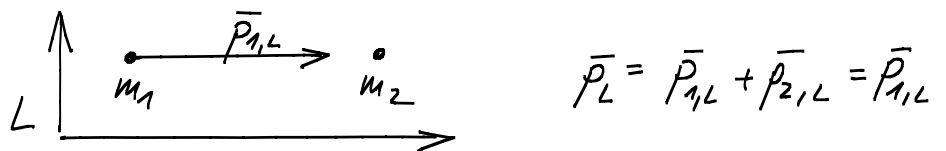


- Der Wert von θ_s muß als zusätzliche Information vorgegeben werden.
- Die so gefundenen Impulse $\bar{p}_{1,s}$, $\bar{p}_{2,s}$ können, falls gewünscht, wieder in das (i. A. von S verschiedene) Laborsystem L übersetzt werden; $\rightarrow \bar{p}_{1,L}$, $\bar{p}_{2,L}$.

9.3 Elastischer Stoß am ruhenden Target (= Ziel)

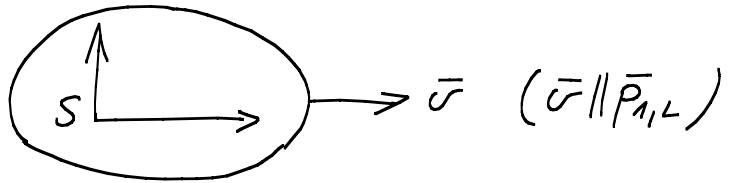
Labor: Projektil: $m_1, \bar{p}_{1,L} \neq 0$; Target: $m_2, \bar{p}_{2,L} = 0$

a) Analyse durch Übergang zu S



Das relativ zu L

bewegte Schwerptl.system:



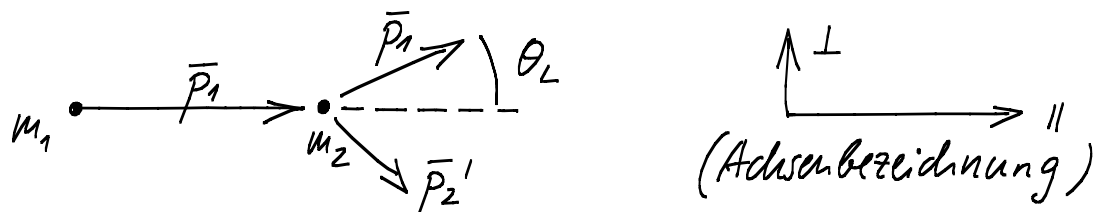
In S gilt: $0 \stackrel{!}{=} \bar{p}_S = \bar{p}_{1,S} + \bar{p}_{2,S} = (\bar{p}_{1,L} - m_1 \vec{\sigma}) + (0 - m_2 \vec{\sigma})$
 Dies definiert S !

$$\Rightarrow \vec{\sigma} = \bar{p}_{1,L} / M \quad (M = m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \bar{p}_{1,S} = -\bar{p}_{2,S} = \frac{m_2}{M} \cdot \bar{p}_{1,L}$$

- $\bar{p}_{1,s}$ & $\bar{p}_{2,s}$ ergeben sich jetzt durch Drehung um θ_s ;
 danach Rücktransformation zu $\bar{p}_{1,L}$ & $\bar{p}_{2,L}$ (falls gewünscht).

b) Analyse direkt in L : (Index L ab jetzt unterdrückt)



– \bar{p}_1 und θ_L seien gegeben und wir fragen nach $|\bar{p}_1'|$ –

- Energieerhaltung: (zur Vereinfachung sei $p_1 = |\bar{p}_1|$ etc.)

$$p_1^2/2m_1 = p_1'^2/2m_1 + p_2'^2/2m_2$$

$$\Rightarrow p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2)$$

- Impulserhaltung: $\bar{p}_1 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2' \leftarrow$ (Deshalb alles in einer Ebene!)

$$\Rightarrow p_{1,\parallel} = p_{1,\parallel}' + p_{2,\parallel}' \quad ; \quad p_{1,\perp}' = -p_{2,\perp}'$$

Daraus ergibt sich

$$p_1 = p_{1,\parallel} = p_1' \cos \theta_L + \sqrt{(p_2')^2 - (p_{2,\perp}')^2}$$

$$p_1 = p_1' \cos \theta_L + \sqrt{(p_2')^2 - (p_{1,\perp}')^2} \quad \leftarrow \text{aus Energieerhaltung}$$

$$= p_1' \cos \theta_L + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2) - (p_1')^2 \sin^2 \theta_L}$$

Jetzt: So umformen, daß Wurzel rechts allein steht;
beide Seiten quadrieren; nach p_1' auflösen

$$\Rightarrow p_1' = p_1 \frac{m_1 \cos \theta_L \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_L}}{M}$$

& analog für v_1', v_1 ; vgl. auch die schöne graphische Interpretation in vielen Büchern, z.B. Landau/Lifschitz.

- Falls beide Wurzeln nicht-negativ, gibt es wirklich zwei mögliche p_1' bei gleichem θ_L !
- Um dies besser zu verstehen, analysiere man den besonders einfachen Fall $\theta_L = 0$ & $m_1 = m_2$:

- => Lösung 1: $p_1' = p_1$ - kein echter Stoß
 Lösung 2: $p_1' = 0$ - vollst. Energieübertrag (wie bei einem zentralen Stoß beim Billiard)

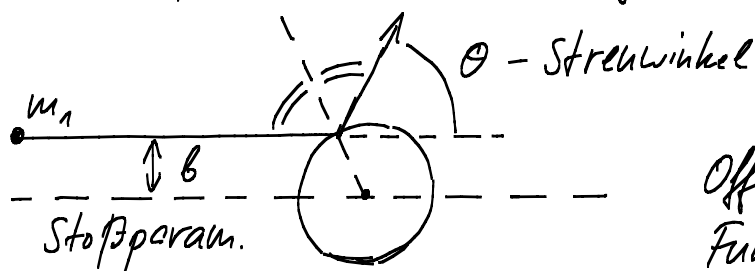
- In weniger trivialen Fällen ($\Theta_L \neq 0$) ist die Situation analog: Ein fest vorgegebenes Θ_L kann durch einen "starken" oder einen "schwachen" Stoß realisiert werden.
- Falls eine der Wurzeln neg. ist, gibt es wirklich nur ein phys. mögliches p_1' zum gegebenen Θ_L .

9.4 Stoßparameter und Streuwinkel

(impact parameter)

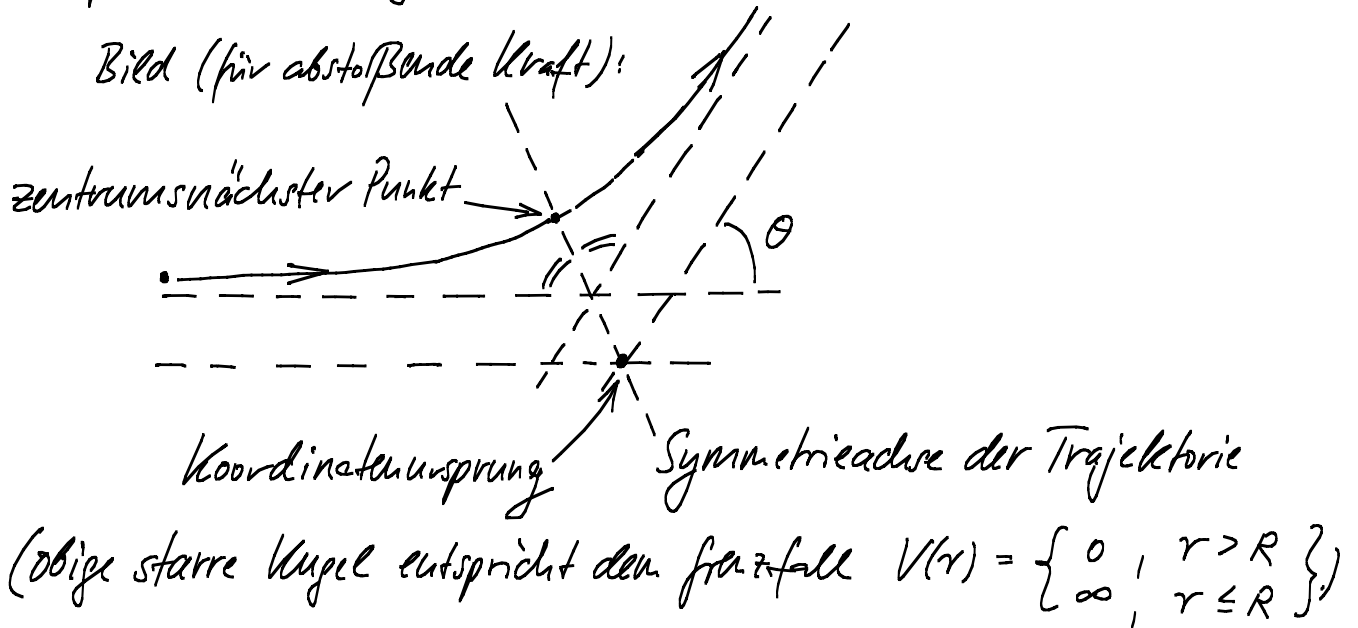
- In vielen einfachen mech. Systemen folgt der Streuwinkel eindeutig aus dem Stoßparameter:

Beispiel 1: Streuung eines Massenpunktes an einer perfekt reflektierenden (unbeweglichen) Kugel:



Offensichtlich läßt sich die Funktion $\Theta = \Theta(b)$ (bei vorgegebenem Radius R) durch elementare Geometrie ermitteln
 → Übungen.

Beispiel 2: Streuung an Zentralpotential $V(r)$



- Für ein allg. Potential (mit $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$) bestimmt sich der Streuwinkel mit Hilfe von

$$\varphi = \int \frac{(L/r^2) dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} \quad (\text{vgl. 7.2}),$$

wobei $E = \frac{m}{2} v_\infty^2$ & $L = m v_\infty b$.
 \uparrow Streuparameter

- Integriere über den Bahnabschnitt von " ∞ " bis zum zentrumsnächsten Punkt:

$$\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr / r^2}{\sqrt{1 - V(r)/E - b^2/r^2}}$$

- r_{\min} ist die Lösung zu $1 - V(r)/E - b^2/r^2 = 0$.

(= Umkehrpunkt des äquiv. 1-dimensionalen Problems,
 = Punkt an dem $d\varphi \neq 0$ obwohl $dr = 0$) vgl. Kap. 8,

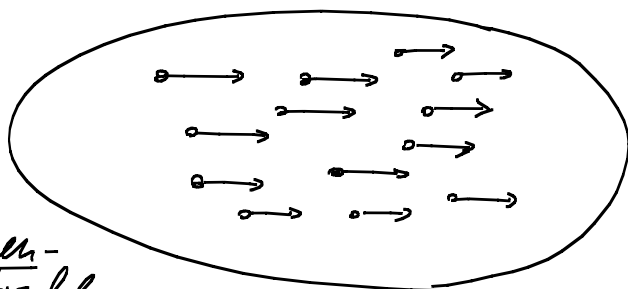
- Die genaue Def. $\theta = \theta(b)$ folgt jetzt aus $\theta = \pi - 2\Delta\varphi$ (vgl. Skizze).

Beispiel 3: Beispiel 2 mit $V(r) = -\frac{G_N m M}{r}$

[Nebenrechnung auf S. 75.1] $\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v^2 b}{MG_N}\right)^2}}$

$$\theta(b) = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + (v^2 b / MG_N)^2}}$$

9.5 Der Wirkungsquerschnitt



Streuzentrum (fix)
↑

[Dies dient nur zur Vereinfachung; prinzipiell kann und muß natürlich der "Rückstoß" des Targets berücksichtigt werden.]

Teilchenstrahl

- sei homogen & zeitunabhängig
- Geschwindigkeit \vec{v} für jedes Teilchen gleich
- charakterisiert durch Teilchenfluß (dichte) oder Teilchenstrahldichte

$$n = \frac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Fläche} \cdot \text{zeit}} \quad \left([n] = \text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \right)$$

↑
senkrecht zum Strahl
stehende gedachte Fläche

←
Zahl der durch diese
Fläche hindurch-
befindenden Teilchen

- Für ein Target mit Querschnittsfläche σ ergibt sich die Zahl der pro Zeit gestreuten Teilchen als

$$N = n \cdot \sigma_{\text{tot}} \quad ([N] = \text{s}^{-1})$$

Nebentechnung:

Aus Kapitel 7.6 wissen wir $\cos \varphi = -\frac{1}{e}$.

Für den Streuwinkel θ folgt aus elementarer Geometrie

$$\theta = \pi - 2(\pi - \varphi)$$

$$\sin(\theta/2) = \sin(\pi/2 - (\pi - \varphi))$$

$$= \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} \quad ; \quad \frac{2EL^2}{m\alpha^2} = \frac{2 \frac{m}{2} v^2 (mbv)^2}{m\alpha^2} = \frac{v^4 b^2}{M_{GN}^2}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v^2 b}{M_{GN}}\right)^2}}$$

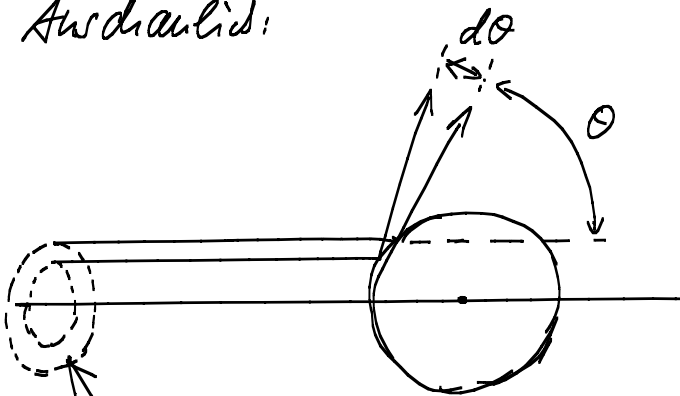
- Allgemeiner: (ohne geometrische Anschauung, die in modernen Anwendungen oft keinen Sinn hat)

Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} ist definiert als Proport. Faktor zwischen Streurate N und Strahldichte n :

$$\underline{\underline{N = n \cdot \sigma_{\text{tot}}}}$$

- Noch allgemeiner: Der differentielle Wirkungsquerschnitt charakterisiert die Rate dN mit der Teilchen in einem kleinen Winkelbereich $d\theta$ gestreut werden:

Ausdrücklich:



$$\underline{\underline{dN = n \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) \right) \cdot d\theta}}$$

Dies ist im Moment nur ein Symbol für den diff. Wirkungsquerschnitt (keine Ableitung).

Fläche $d\sigma$, die dem Winkelbereich $d\theta$ entspricht

- Der diff. Wirkungsquerschnitt ("differential cross section") kann aus der Fkt. $\theta = \theta(b)$ berechnet werden:

- Der obige Ring hat die Fläche $2\pi b \cdot |db| = d\sigma$

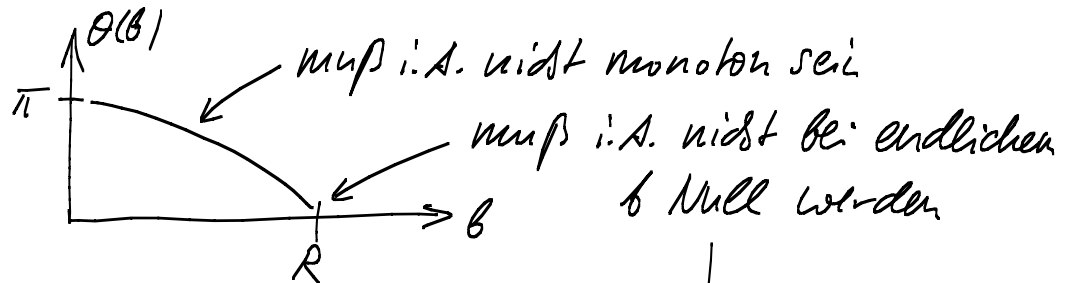
- Der zugehörige Winkelbereich ist $|d\theta| = \left| \frac{d\theta(b)}{db} \right| \cdot |db|$

(Wir setzen überall Betragstriche, um Minuszeichen zu umgehen, die auftreten, da $(d\theta/db) < 0$.)

- dN folgt jetzt aus der Formel für totale Streurate, angewandt auf unseren differentiellen Ring:

$$dN = n \cdot d\sigma = n \cdot 2\pi b \cdot |db| = n \cdot 2\pi b \underbrace{\left| \frac{d\sigma}{db} \right|^{-1}}_{= \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right)} |d\theta|$$

- Zurück zum Beispiel der harten Kugel:



Da dies im Fall der harten Kugel aber geschieht, kann man σ_{tot} besonders einfach berechnen:

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right) = \int_0^\pi d\theta \cdot 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \int_0^R db \cdot 2\pi b = \pi R^2$$

(wie naive erwartet)

(In vielen Fällen wird $\theta(b)$ nicht bei endlichem b Null und σ_{tot} ist nicht definiert; " $\sigma_{tot} = \infty$ ".)

Kommentar:

Man kann eine Fkt. $\sigma(\theta)$ definieren als den:

"minus den Wirkungsquerschnitt für Streuung mit Streuwinkel größer als θ ". Es ist dann $\sigma(\pi) = 0$ & $\sigma(\theta < \pi) < 0$.

Dann kann man unseren obigen diff. Wirkungsquerschnitt als echte Ableitung auffassen:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (\sigma(\theta)).$$

Aber dies ist nicht notwendig und nicht üblich.

9.6 Rutherford-Streuung

(Berühmtes Beispiel: Streuung am Coulomb-Feld;
völlig analog zum Kepler-Problem, aber mit abstoßender
oder anziehender Kraft.)

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad \left(\alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \right)$$

Technisch: Kepler-Problem mit $GmM \rightarrow \alpha$.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v^2 b}{GM}\right)^2}} \quad \rightarrow \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv^2 b}{\alpha}\right)^2}}$$

↑ Vorzeichen irrelevant!

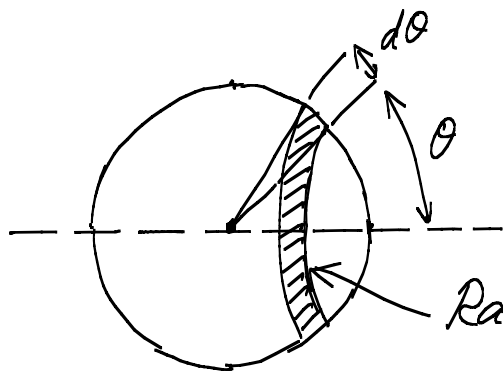
$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = 2\pi \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| x \frac{dx}{d\theta} \right| \quad \text{mit } x = \frac{mv^2 b}{\alpha}$$

$$\text{Jetzt: } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\frac{1/2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \left| x \frac{dx}{d\theta} \right| = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \pi \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

Nützliche Umschreibung: $d\theta \rightarrow d\Omega$ ("Raumwinkel element")



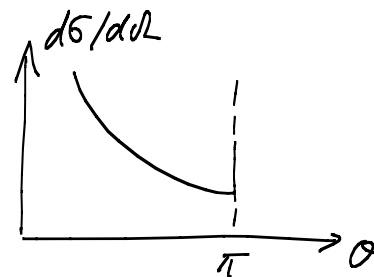
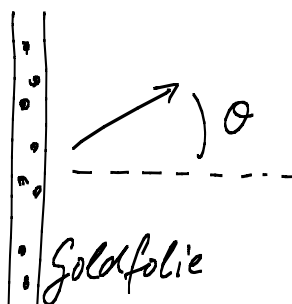
Raumwinkelbereich = Fläche auf
Einheitssphäre

$$d\Omega = d\theta \cdot 2\pi \sin \theta = d\theta \cdot 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z}{2mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}$$

Rutherford-Formel

- "äußerst stark konzentriert bei $\theta = 0$:
- $\sigma_{\text{tot}} = \infty$
- experimentell :

z.B. Proton \rightarrow 

Beobachtete Winkelverteilung \Rightarrow Atome praktisch "leer",
 pos. Ladung und gesamte Masse
 im Atomkern konzentriert, der
 praktisch punktförmig ist.

(Elektronenhülle wegen kleiner Masse
 unwichtig.)

[Obwohl prinzipiell quantenmed. Korrekturen und der
 Boost ins Schwerpt. system hinzukommen, beschreibt
 obige einfache Rechnung das historische Experiment gut.]