(Klassische) Theoretische Mechanik

→ www.thphys.uni-heidelberg.de/~hebecker

1 Vorbemerkungen

"Klassisch" – hier: ohne spezielle u. allg. Relativitätstheorie; ohne Quantenmechanik

Einige Namen, Jahreszahlen und Themen

Aristoteles	−384 .. −322	Hebel
Archimedes	−287 .. −212	
Galilei	1564 .. 1642	Inertialsysteme, freier Fall,
Kepler	1571 .. 1630	Planetenbewegung
Newton	1643 .. 1727	$F = m\ddot{x}$, Gravitation, Differentialrechnung,
Euler	1707 .. 1783	Kreisel,
Lagrange	1736 .. 1813	Variationsrechnung
Hamilton	1805 .. 1865	
Poincare	1854 .. 1912	Stabilität des Sonnensystems, Chaos

Grundlegende Bedeutung der Mechanik für die Theoretische Physik

- historisch: Mechanik hat die theor. Physik definiert, bevor sich Thermodynamik, E-Dynamik u. Quantenmechanik entwickelt haben

- konzeptionell: das Symmetrieprinzip und die Erhaltungssätze prägen die gesamte Physik

- mathematisch: Differentialrechnung, Variationsrechnung, geometrische Methoden (Koordinatentrf.en) sind mit Mechanik entstanden

- spezielle Methoden:
  - Lagrange- u. Hamilton-Formulierung der klassischen Mechanik

    ⇓

  - Pfadintegral u. Operatorformulierung der Quantenmech., String- und Feldtheorie ein wichtiger prinzipieller Hinweis:

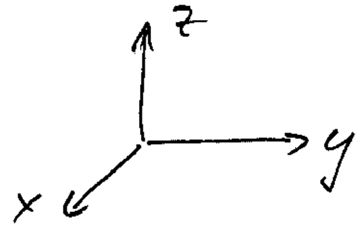
Trotz aller Bemühungen um axiomat. Formulierung und mathem. Eleganz lebt auch die theoret. Physik letztendlich von Beispielen und Intuition beim Umgang mit mathem. Methoden

$\Downarrow$

Das selbständige Rechnen vieler Übungsaufgaben ist für die Beherrschung der Mechanik unerläßlich!

2 Einige Grundbegriffe: Raum, Zeit, Newtonsche Axiome

wähle Koord.system in 3-d Raum:



→ Punkte charakterisiert durch

$$\vec{x} = \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

mathematisch: $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$

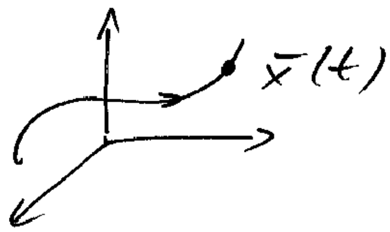
(3-dim. reeller Vektorraum)

Dieser Begriff sollte vollkommen klar sein!

Zeit: $t \in \mathbb{R}$ (gemessen durch synchronisierte Uhren an allen Punkten des Raumes)

Trajektorie (eines Teilchens): $\bar{x} = \bar{x}(t)$

(Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)



Geschwindigkeit: $\bar{v} = \dot{\bar{x}} = \dot{\bar{x}}(t) = \frac{d\bar{x}}{dt}$

$$\dot{\bar{x}} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3) \quad ; \quad \dot{\bar{x}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}$$

Beschleunigung: $\bar{a} = \ddot{\bar{x}} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$

wichtige Idealisierung: <u>Massenpunkt</u>

wichtiger Grundbegriff: <u>Kraft</u> ($\bar{F}$, Vektor)

- man denke an Muskelkraft, Federkraft
- Vektoraddition von Kräften! $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$

<u>Newton:</u>

1) $\exists$ Inertialsysteme, d.h. Systeme in denen ein Körper (Massenpunkt), an dem keine Kräfte angreifen, ruht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt: $\ddot{\bar{x}} = 0$

2) In solchen Systemen gilt $\bar{F} = m\ddot{\bar{x}}$

<u>wichtig</u>: a) Masse als Körpereigenschaft (träge Masse!)

b) Auftreten von $\ddot{\bar{x}}$ (nicht etwa $\dddot{\bar{x}}$ etc.)

3) für Wechselwirkung zweier Massenpunkte:

$$\bullet \longleftrightarrow \bullet$$

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$

Kommentare:

- 1) kann als Spezialfall von 2) gesehen werden
- für 2) ist es natürlich entscheidend, $\bar{F}$ zu kennen. Dies geschieht u.a. durch
    - Anwendung von 3)
    - Betrachtung von "Kraftfeldern":

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{x}, t, \dot{\bar{x}}, \cdots)$$

z.B. bei Reibung

evtl. spezielle Eigenschaften des Körpers

(Ist so ein Kraftfeld einmal ausgemessen, ergeben sich dann für andere Körper echte Vorhersagen.)

- es ergibt sich sofort die Notwendigkeit, Differentialgleichungen zu lösen:

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{1}{m} \bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$$

(System von 3 Dgl.-en 2. Ordnung)

gewöhnl. (aber: vgl. Feldtheorie u. Kontinuumsmechanik)

Von zentraler Bedeutung ist der Existenz- u. Eindeutigkeitssatz für Lösungen solcher Gleichungen. Derartige Sätze werden meist für Systeme 1. Ordnung diskutiert, was aber keine Einschränkung darstellt:

etwa: $\ddot{\bar{x}} = f(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t)$

$$\downarrow \quad \dot{\bar{x}} = \bar{y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\bar{y}} &= f(\bar{y}, \bar{x}, t) \\ \dot{\bar{x}} &= y \end{aligned}}$$

6 Dgl.-en 1. Ordnung

Man kann also <u>immer</u> an Systeme der Form

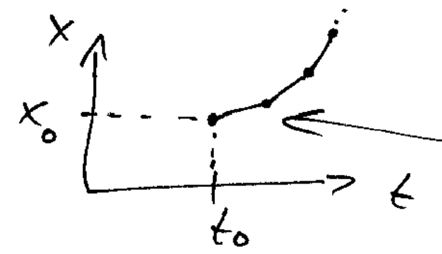
$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t) \qquad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n > 3 \text{ i.A. !})$$

denken. Dann gilt:

> Gegeben $(t_0, \bar{x}_0)$ $\exists$ ein Intervall $(a, b) \ni t_0$ und darauf eine (eindeutige) Lösung $\bar{x}(t)$ mit $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$.

Es folgt sofort, daß man für "unsere" 3 Dgl.-en 2. Ordnung 6 Anfangsbedingungen ($\bar{x}_0$ & $\dot{\bar{x}}_0$ bei t_0) braucht.

Nochmals "intuitiv": ($n=1$, also $\dot{x} = f(x,t)$)

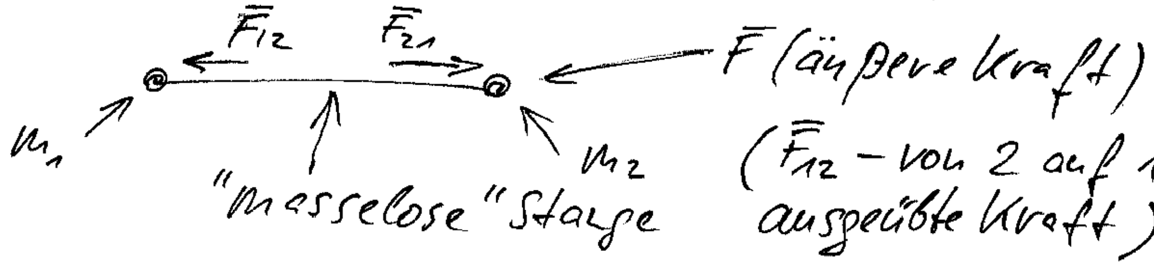


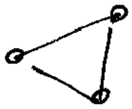
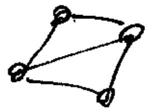
Da die "Steigung" lokal bekannt ist, kann man die Kurve "offensichtlich" stückchenweise (beliebig genau) konstruieren.

Methoden zum Lösen von Dgl.-en werden im Verlauf der Vorlesung (und besonders in den Übungen) diskutiert werden. <u>Beachte:</u> Es ist keineswegs immer sinnvoll, auf ein System 1. Ordnung zu reduzieren.

<u>Einige einfache Folgen der Newtonschen Axiome:</u>

- <u>starre Körper</u> können als Kombination vieler <u>starr</u> verbundener Massenpunkte aufgefaßt werden. Einfaches Beispiel:



- Das 3. Axiom und die Beibehaltung konstanter Distanz sind für die Berechnung der Bewegung entscheidend.
- Analog:  ,  , etc.

  (im Prinzip "Kontinuumslimes" möglich)

- <u>Impulssatz:</u>

  Für einen Satz von Massenpunkten (nicht unbedingt starr verbunden) gilt bei $\bar{F}_{äuß.} = 0$:

$$\bar{P} \equiv \sum_a \bar{p}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\bar{x}}_a = \mathrm{const.}$$

$$\Big(\dot{\bar{P}} = \sum_a m_a \ddot{\bar{x}}_a = \sum_a \bar{F}_a = \sum_{ab} \bar{F}_{ab}$$

$$= \sum_{a>b} \bar{F}_{ab} + \sum_{a<b} \bar{F}_{ab} = \sum_{a>b} \left(\bar{F}_{ba} + \bar{F}_{ab} \right) = 0 \Big)$$

- <u>Drehimpulssatz:</u>

  Falls die Kräfte zwischen den Massenpunkten parallel zur Verbindungslinie wirken (jeder starre Körper kann so vorgestellt werden) gilt außerdem:

$$\bar{L} \equiv \sum_a m_a \bar{x}_a \times \dot{\bar{x}}_a \quad \left(= m_a \bar{r}_a \times \bar{v}_a \right) = \text{const.}$$

<u>Einschub:</u> $(\bar{a} \times \bar{b})_i \equiv \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

wobei ε_{ijk} total antisymm. & $\varepsilon_{123} \equiv 1$;

$\bar{a} \times \bar{b}$ ist (was Drehungen betrifft) ein Vektor, da ε_{ijk} ein "invarianter Tensor" ist ;

<u>genauer:</u> $\bar{a} \times \bar{b}$ ist ein Axial- oder Pseudo-Vektor, da bei Reflexionen:

$$\begin{aligned} \bar{a} &\to -\bar{a} \\ \bar{b} &\to -\bar{b} \\ \bar{a} \times \bar{b} &\to +\bar{a} \times \bar{b} \end{aligned}$$

gilt

$$\Big(\dot{\bar{L}} = \sum_a \left(\bar{x}_a \times \ddot{\bar{x}}_a + \dot{\bar{x}}_a \times \dot{\bar{x}}_a \right) m_a = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_a =$$

$$= \sum_{ab} \bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} = \sum_{a>b} \left(\bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} + \bar{x}_b \times \bar{F}_{ba} \right) =$$

$$= \sum_{a>b} (\bar{x}_a - \bar{x}_b) \times \bar{F}_{ab} = 0 \Big)$$

- **Energieerhaltung**

Ein zeitunabh. Kraftfeld $\bar{F}(\bar{x})$ heißt konservativ falls $\bar{F} = -\bar{\nabla} V$ für ein gewisses Potential $V(\bar{x})$. Für einen Massenpunkt gilt

$$E \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kinet.}}}{T} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potent. Energie}}}{V} \equiv \frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 + V(\bar{x}(t)) = \text{const.}$$

$$\left(\frac{dE}{dt} = m\,\dot{\bar{x}}\cdot\ddot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i}\cdot\frac{dx^i}{dt} = \bar{F}\cdot\dot{\bar{x}} + (\bar{\nabla}V)\cdot\dot{\bar{x}} = 0 \right)$$

Dies gilt auch für ein System wechselwirkender Teilchen falls $\bar{F}_{ab} = -\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$, wobei

$$E \equiv \sum_a T_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a>b} V_{ab}$$

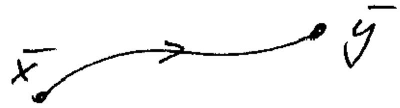
$$(V_{ab} = V_{ba})$$

$$\left(\frac{dE}{dt} = \sum_a \dot{\bar{x}}_a\cdot\bar{F}_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\left(\dot{\bar{x}}_a\cdot\bar{\nabla}_a V_{ab} + \dot{\bar{x}}_b\cdot\bar{\nabla}_b V_{ab}\right) = \right.$$

$$\left. = \sum_{a,b}\dot{\bar{x}}_a \bar{F}_{ab} + \frac{1}{2}\sum_{a,b}\left(\dot{\bar{x}}_a\cdot(-\bar{F}_{ab}) + \dot{\bar{x}}_b(-\bar{F}_{ba})\right) = 0 \right)$$

- zurück zu <u>einem</u> Teilchen:

Betrachte Bewegung von $\bar{x}$ nach $\bar{y}$ in konserv. Kraftfeld:



$$V(\bar{y}) - V(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{y}} d\bar{s} \cdot \nabla V(\bar{s}) = - \int_{\bar{x}}^{\bar{y}} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

$$= T_{\bar{x}} - T_{\bar{y}} \quad \text{(wegen Energieerhaltung)}$$

$\uparrow \quad \uparrow$ kinet. Energien des Teilchens bei $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$

($\Rightarrow$ bekannte Tatsache, daß Kraft Arbeit leistet – $\bar{F} \cdot d\bar{s}$ – und dadurch die kinet. Energie des Teilchens um $dT = \bar{F} \cdot d\bar{s}$ ändert)

<u>math. präziser:</u> („Begründung")

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{y}} d\bar{s} \cdot \nabla V(\bar{s}) \equiv \underbrace{\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right) \cdot \bar{\nabla} V(\bar{s}(\tau))}_{\text{unabhängig von der Parametrisierung}} =$$

unabhängig von der Parametrisierung der Kurve $\bar{s}(\tau)$; $\bar{s}(\tau_0) = \bar{x}$, $\bar{s}(\tau_1) = \bar{y}$ muß gelten und $\bar{s}(\tau)$ muß obige Kurve durchlaufen

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} V(\bar{s}(\tau)) = V(\bar{y}) - V(\bar{x})$$

Für einfach zush. Gebiete gilt:

$\bar F$ konservativ $\Leftrightarrow$ $\bar\nabla \times \bar F = 0$ $\quad (\varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k = 0)$

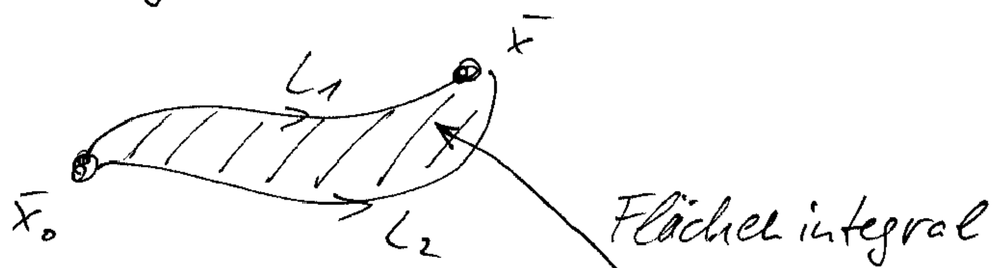
$(\Rightarrow)$ $\quad \bar F = -\bar\nabla V \; , \quad F_i = -\partial_i V \; ;$

$$\varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k V = 0$$

$(\Leftarrow)$ Definiere $\quad V(\bar x) = -\int_{\bar x_0}^{\bar x} d\bar s \cdot \bar F(\bar s)$

($\bar x_0$ beliebig gewählt.)

Zeige Eindeutigkeit:



$$\int_{L_2} d\bar s \cdot \bar F - \int_{L_1} d\bar s \cdot \bar F = \oint d\bar s \cdot \bar F \underset{\uparrow \atop \text{"Stokes"}}{=} \int d\bar f \cdot (\bar\nabla \times \bar F) = 0$$

Zeige Konservativität:

$$\bar e \cdot F \underset{\uparrow \atop \text{kleine } \bar e}{\approx} -\left(-\int_{\bar x}^{\bar x + \bar e} d\bar s \cdot \bar F\right) = -\left(\bar V(\bar x + \bar e) - \bar V(\bar x)\right) =$$

$$= -\bar{\ell}\cdot\bar{\nabla}V(\bar{x}).$$

Da $\bar{\ell}$ beliebig (aber klein) war, folgt $\bar{F}=-\bar{\nabla}V$.

<u>Einschub:</u> Der Stokes'sche Satz ist Teil eines wichtigen allgemeineren Systems:

1-dimensional: $$\int_{\text{Kurve}} d\bar{s}\cdot\bar{\nabla}g = g\Big|_{\text{Endpkt.}} - g\Big|_{\text{Anf.pkt.}}$$

2-dim.: $$\int_{\text{Oberfläche}} d\bar{f}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{v}) = \int_{\text{Rand (Kurve)}} d\bar{s}\cdot\bar{v}$$

3-dim.: $$\int_{\text{Volumen}} dV\,(\bar{\nabla}\cdot\bar{w}) = \int_{\text{Rand (Fläche)}} d\bar{f}\cdot\bar{w}$$

$\vdots$

p-dim.: $$\int_{V_p} d\omega_{p-1} = \int_{\partial V_p} \underbrace{\omega_{p-1}}_{(p-1)\text{-Form}}$$

äußere Ableitung

Rand von V_p

3) Symmetrien der Raum-Zeit, Galilei-Transformationen

Wir haben den uns umgebenden phys. Raum bisher als 3-dim. reellen Vektorraum $V(\mathbb{R}^3)$ beschrieben. Tatsächlich haben wir etwas mehr Struktur: Skalarprodukt: $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$
(posit. definit)

(und damit auch Norm: $|\bar{v}| \equiv \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$).

Wir sprechen in diesem Zush. von einem euklidischen Raum.

Der $\mathbb{R}^3$ mit (üblichem) Skalarprodukt hat Symmetrien: S - Abb. $V \longrightarrow V$

$(\bar{v} \longmapsto \bar{v}')$,

die "die Struktur des Raumes respektiert."

"Struktur" ist hier: 1) lineare Struktur

2) Skalarprodukt

Diese Bedingungen erfüllen insbesondere die Drehungen. Sei R eine Drehung:

$$R(\bar{v}+\bar{w}) = R(\bar{v}) + R(\bar{w}) \quad \checkmark$$

$$R(\bar{v}\cdot\bar{w}) = R(\bar{v})\cdot R(\bar{w}) \quad \checkmark$$

Genauer:

- allg. Vektor im 3-d Raum: x^i $(i = 1..3)$
  (die Verallgemeinerung zum N-dimensionalen Raum ist offensichtlich)
- allg. lineare Transformation:

$$x^i \longrightarrow x'^i = R^{ij} x^j \left(\equiv \sum_j R^{ij} x^j\right)$$

oder in Matrixschreibweise:

$$x \longrightarrow x' = \underset{\substack{\uparrow \\ 3\times 3\text{-Matrix}}}{R}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3-elementiger Spaltenvektor}}}{x}$$

- Invarianz des Skalarproduktes
  (d.h. der Abbildung $x, y \longmapsto x'y' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transponierter Vektor}}}{x^T} y$)

bedeutet $x^T y = x'^T y'$

$$x^T y = (Rx)^T R y = x^T R^T R y$$

für alle $x, y \implies \underline{\underline{R^T R = \mathbb{1}}}$

Dies bedeutet, daß R eine <u>orthogonale Matrix</u> ist:

$$R \in O(3) \quad (\text{oder allgemeiner } R \in O(N)).$$

<u>Einschub</u>: Symmetrien werden i.A. durch <u>Gruppen</u> beschrieben (nicht immer durch so einfache Matrixgruppen wie hier). Der Gruppenbegriff ist deshalb in der theoret. Physik zentral.

<u>Axiome</u> (nur zur Erinnerung)

Menge mit Produktoperation $(G \times G \to G)$

- assoziativ: $(a b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\exists$ "Eins" e: $\quad a \cdot e = e \cdot a = a$ für jedes a
- zu jedem a $\exists$ Inverses a^{-1} mit

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

$O(3)$: $\underbrace{\text{Drehungen}}_{SO(3)}$ und $\underbrace{\text{(mit Drehungen kombinierte) Reflexionen}}_{-\mathbb{1} \cdot SO(3)}$

$((-\mathbb{1}) \cdot x = -x$; Reflexion am Ursprung$)$

Die "eigentlichen" Drehungen $SO(3)$ erfüllen

$$\det R = 1 \quad \text{für } R \in SO(3).$$

So wie sich Vektoren durch

$$x^i \to R^{ij} x^j$$

transformieren, kann man auch Objekte mit mehr Indizes ("Tensoren") definieren, die sich wie

$$t^{i_1 \dots i_n} \to R^{i_1 j_1} \dots R^{i_n j_n} t^{j_1 \dots j_n}$$

transformieren.

<u>Beispiele:</u> • $t^{ij} \equiv x^i \cdot y^j$ (x, y - Vektoren)

• $t^{ij} \equiv \delta^{ij}$ ("Kronecker-Delta")

<u>Wichtig:</u> δ^{ij} ist ein sogenannter <u>invarianter Tensor</u>,

d.h. er
- transformiert wie ein Tensor
- bleibt stets gleich (per Definition ist $\delta^{ij} = (\mathbb{1})^{ij}$)

also:

$$\delta'^{ij} = R^{ii'} R^{jj'} \delta^{i'j'} = R^{ii'} R^{ji'}$$

$$= R^{ii'} (R^T)^{i'j} = (R R^T)^{ij} = \delta^{ij}$$

(im Gegensatz zu $x'^i = R^{ij} x^j \neq x^i$)

Dies erklärt auch die Invarianz des Skalarproduktes, welches man als $\bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i = x^i y^j \delta^{ij}$ schreiben kann.

<u>Noch wichtiger:</u> Für $R \in SO(3)$ ist ε^{ijk} auch ein invarianter Tensor:

$$(\varepsilon')^{ijk} = \underbrace{R^{ii'} R^{jj'} R^{kk'} \varepsilon^{i'j'k'}}_{\text{total antisymm. in } i,j,k}$$

$$\Downarrow$$

$$= c \cdot \varepsilon^{ijk}$$

Man betrachte den Spezialfall $i,j,k = 1,2,3$:

$$R^{1i'} R^{2j'} R^{3k'} \varepsilon^{i'j'k'} = c$$

$$c = \det R = 1$$

$$\Rightarrow (\varepsilon')^{ijk} = \varepsilon^{ijk} \quad \checkmark$$

Damit ist klar, daß $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

(Indizes oben oder unten ist im Moment egal. <u>Achtung!</u>: In der spez. Rel.theorie und vielen späteren Anwendungen wird sich dies ändern.)

sich unter $SO(3)$ wie ein Vektor transformiert. Für $R \in O(3)$ gilt dies offensichtlich nicht mehr ($\to$ Pseudovektor od. Axialvektor).

Damit haben wir den (euklidischen) Raum $\mathbb{R}^3$ fürs erste hinreichend verstanden. Aber:

|| Bei genauerem Hinsehen ist dies gar nicht die angemessene Struktur, um den Raum der klass. Mechanik zu beschreiben.

Denn: In der realen Welt gibt es (im Gegensatz zum $\mathbb{R}^3$) keinen Null-Vektor $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$.

Neues Konzept: Affiner Raum

Gegeben sei eine Menge A und ein Vektorraum V sowie eine Abb. $A \times A \to V$

$$(P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ}$$

so daß

- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
- zu jedem $P \in A$ & $\bar{v} \in V$
  $\exists$ eindeutig ein $Q \in A$ mit $\bar{v} = \overrightarrow{PQ}$.

|| Das Paar (A, V) heißt affiner Raum. ||

Intuitiv: A ergibt sich aus V durch "Wegnahme" der besonderen Rolle des Ursprungs $\bar{0}$.