– partielles Ableiten nach den p's liefert:

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial p_k} = \delta^i_k$$

oder, in der oben eingeführten Matrixschreibweise,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial P}\right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right) = \mathbb{1} . \qquad (*)$$

– partielles Ableiten nach den q's liefert:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} + \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial q_j} = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrixmultiplikation!}}}{\cdot} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) = 0 .$$

- Es genügt jetzt also zu zeigen, daß die $n\times n$-Matrix $A = \left(\frac{\partial p}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)$ symmetrisch ist.
- Mit (*) finden wir zunächst

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right) .$$

- Die anfangs vorausgesetzte Tatsache, daß die P's verschwindende Poisson-Klammern haben,

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} = \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial P_j}{\partial q_k},$$

bedeutet in Matrixschreibweise

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T.$$

Daraus folgt $\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{T,-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^{-1}$

und damit für A:

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1,T}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)$$

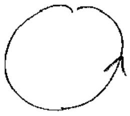
$$A = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)\right]^T = A^T,$$

was zu beweisen war.

Dies schließt die Demonstration des expliziten Überganges zu den neuen kanon. Impulsen P (und den zugehörigen Q) ab.

Ohne Beweis:

Im integrablen Fall findet die allgemeinste kompakte Bewegung auf einem Torus statt:

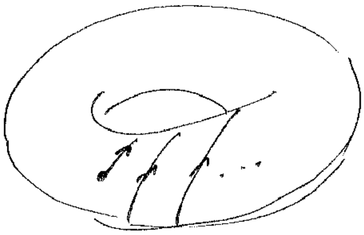
1d:  $Q=\varphi \in [0,2\pi)$

Bewegung: $\varphi = \varphi_0 + t \cdot \text{const.}$

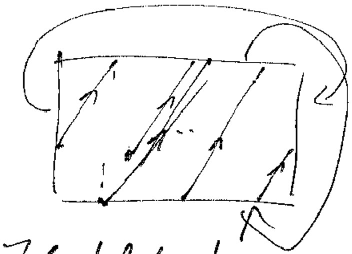
"$Q = \varphi$" ; $P = I$"

Winkel- & -Wirkungsvariablen

2d:



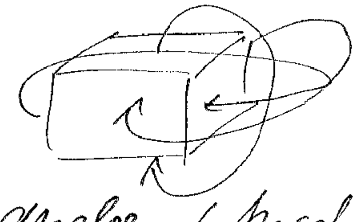
bzw.



Die Trajektorie wird den Torus i.A. dicht überdecken.

Identifikation der gegenüberliegenden Seiten.

(quasiperiodische Bewegung, die Trajektorie ist ergodisch.)

3d:  Identifikation wie oben ...

$d \geq 4$: analog (Anschauung noch schwieriger).

13.2 Chaos

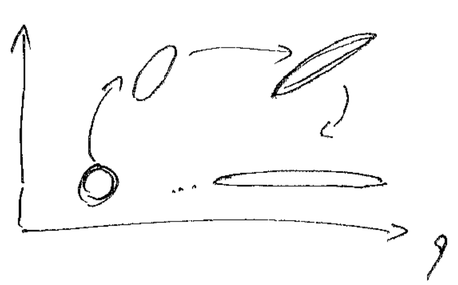
Behandle die "Bewegung" eines kleinen Volumens im Phasenraum:

$$\Delta V(t=0) \sim (\Delta r)^{2n} \quad \text{– Kugel}$$

$$\Delta V(t \neq 0) = \Delta V(t=0) \quad \text{– Ellipsoid mit Halbachsen } \Delta a_i$$

(Dies gilt nur im Limes $\Delta r \to 0$ bei festem t.)

Gesamtbild:



System von Dgl.-en 1. Ordnung
→ schnellstes mögl. Wachstum der einzelnen Halbachsen ist exponentiell, z.B.

$$\Delta a_i(t) \simeq e^{\lambda_i t} \cdot \Delta r \quad \text{(für kleine } \Delta r\text{)}$$

⇒ Definition des "Lyapunov-Exponenten" λ_i:

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\Delta q_i(t)}{\Delta r}\right).$$

Wegen Liouville Satz

$$\prod_{i=1}^{2n} \left(e^{\lambda_i t} \Delta r\right) = (\Delta r)^{2n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 0$$

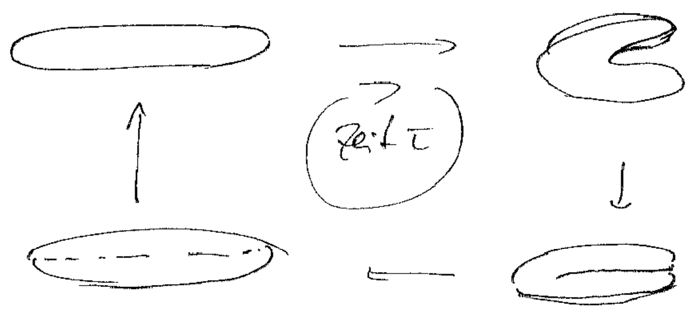
Für integrable Systeme:

- nur linearen Wachstum in jede Richtung (ΔP_i = const., ΔQ_i wachsen höchstens linear, da $\dot{Q}_i$ = const$_{(i)}$)

$\Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$

Chaotische Systeme: Def.: $\exists$ ein $\lambda_i > 0$.

Zur Intuition für entsprechende Phasenraum-bewegung: "Bäckertransformation"



$\lambda_1 = +\frac{\ln 2}{\tau}$

$\lambda_2 = -\frac{\ln 2}{\tau}$

z.B. in horizontaler Richtung:

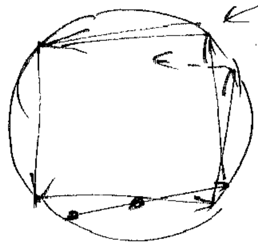
nach N "Perioden": $\Delta a = 2^N \Delta r = 2^{t/\tau} \Delta r$

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{\Delta a}{\Delta r}\right) = \frac{1}{\tau}\ln 2 = \lambda_1$$

($\lim_{t\to\infty}$ trivial)

anderes Beispiel:

Billiard: Kreis

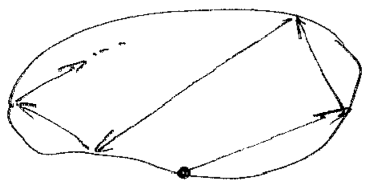


perfekte Reflexion angenommen.

Bewegung nicht periodisch aber auch nicht chaotisch.

(Erhaltungsgrößen: H und L (bzgl. Zentrum)).

allgemeiner Fall:



- keine zweite Erhaltungsgröße
- Chaos!

14 Schwingungen, Kontinua

14.1 Kleine Schwingungen

- Harmonischer Oszillator: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$

  $(\Rightarrow \omega = \sqrt{k/m})$

- allgemeinerer Fall: $L = f(q)\cdot\dot{q}^2 - V(q)$,

  Ruhelage bei $V'(q) = 0$.

Dazu: definiere q_0 so daß $V'(q_0) = 0$,
führe neue Koordinate $\tilde{q} = q - q_0$ ein,
führe Umbenennung $\tilde{q} \to q$ durch.

$$\Rightarrow L = f(q_0+q)\cdot\dot{q}^2 - V(q_0+q)$$

Sei q klein. Entwickle bis $O(q^2)$:

$$L = \underset{\uparrow \atop \text{sei} \neq 0}{f(q_0)}\cdot\dot{q}^2 - \underbrace{V(q_0)}_{\substack{\text{irrelevante} \\ \text{Konstante}}} - \underbrace{V'(q_0)}_{=0}\cdot q - \frac{1}{2}V''(q_0)\cdot q^2$$

$\Rightarrow$ äquivalent: $L = f(q_0)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}V''(q_0)\cdot q^2$

(harmonischer Oszillator!)

14.2 Schwingungen in Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

$$L = f_{ij}(q)\,\dot q_i \dot q_j - V(q) \quad , \quad q \mathrel{\hat=} q_1 \cdots q_n$$

- Ruhelage: $\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{\sim \dot q = 0} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$ für alle i

  bei $q = q_0$

  $(q_0 \mathrel{\hat=} q_{0,1} \cdots q_{0,n})$

- Wie oben: $q \to q_0 + q$, q sei klein

$$\Rightarrow L = f_{ij}(q_0)\,\dot q_i \dot q_j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_0)\cdot q_i q_j$$

oder

$$L = A_{ij}\,\dot q_i \dot q_j - B_{ij}\, q_i q_j \quad \text{mit } A, B \text{ symmetrisch}$$

- Definiere $q_i = R_{ij} q'_j$ mit $R \in SO(n)$.

$$\Rightarrow L = \dot q'^T \underbrace{R^T A R}_{\equiv A_D} \dot q' - q'^T \underbrace{R^T B R}_{\equiv B'} q'$$

Wähle R so daß $A_D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ diagonal ist.

Nach Umbenennung $q' \to q$, $B' \to B$ folgt:

$$L = \sum_i a_i \dot{q}_i^2 - q^T B q.$$

- Definiere $q_i = q_i' / \sqrt{2a}$, $B_{ij}' = \dfrac{B_{ij}}{2a_i a_j}$.

Nach erneuter Umbenennung $q' \to q$, $B' \to B$ folgt:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} - q^T B q$$

- Definiere $q_i = R_{ij} q_j'$ mit $R \in SO(n)$.

Wähle R so daß $R^T B R = B_D$ diagonal ist,

$$B_D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}.$$

Nach Umbenennung $q' \to q$ folgt

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} - q^T B_D q = \underbrace{\sum_i \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - b_i q_i^2 \right)}$$

Summe von Lagr.-Fkt.-en harmonischer Oszillatoren mit $\omega_i = \sqrt{b_i}$.

(Dies ist ein sehr wichtiges Resultat von großer Allgemeinheit. Es beinhaltet z.B. die Schwingungseigenschaften sehr komplexer Moleküle oder eines ganzen Kristalls.)

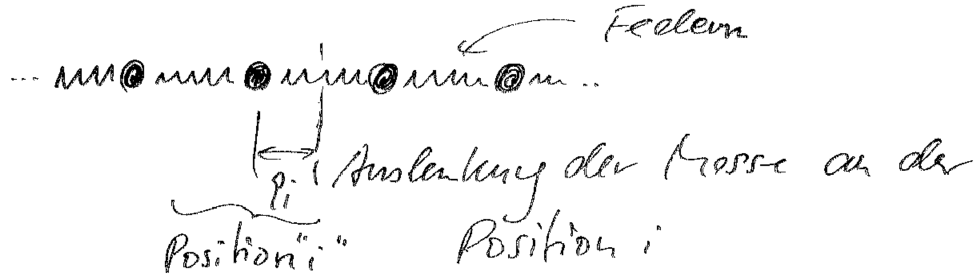
Nebenbemerkung:

Falls gewisse ω_i verschwinden $\Rightarrow$ die zugehörigen q_i sind zyklische Koordinaten; die entsprechende Bewegung ist dann eine einfache Translation:

$$q_i(t) = q_i^0 + t \cdot v_i \quad (\text{für alle } i \text{ mit } \omega_i = 0).$$

Dies trifft z.B. auf die Schwerpunktskoordinaten eines Systems wechselwirkender Teilchen zu.

14.3 Lineare Kette, Übergang zu Kontinua



$$L = \frac{m}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i - \underbrace{\frac{1}{2} k \cdot (q_i - q_j)^2}$$

im allgemeinen Fall stünde hier (in quadrat. Ordnung)

$$\frac{1}{2} \Phi_{ij} q_i q_j$$

Jetzt nehmen wir an, daß q_i als Fkt. von i langsam variiert. In diesem Fall kann eine Kontinuumsbeschreibung eingeführt werden. Dazu:

Sei $q = q(x)$ eine glatte Funktion mit $q(x_i) = q_i$

[x sei die Ortskoordinate in Richtung der linearen Kette, x_i sei der Ort (der Ruhelage) der Masse i]

Aufgrund der von uns angenommenen langsamen Variation von q_i gilt

$$q_i - q_j \simeq q'(x_i) \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{Abstand zwischen } i \text{ und } j.}$$

Also:

$$L = \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot{q}(x_i)^2 - \frac{k}{2} q'(x_i)^2 \cdot \Delta x^2 \right)$$

Kontinuumslimes: $\sum_i \longrightarrow \frac{1}{\Delta x} \cdot \int dx$

(dabei: $k \cdot \Delta x \xrightarrow[\text{für } \Delta x \to 0]{} \sigma$; $\frac{m}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \rho$)

$$\Rightarrow L = \int dx \underbrace{\left(\frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{\sigma}{2} q'^2 \right)}_{\text{Dies ist ein (einfacher!) "Feldtheorie-Lagrangian".}}$$

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen:

$$0 = \delta S = \int dt\, \delta L$$

$$= \int dt\, dx \left(\frac{\rho}{2} \delta(\dot{q}^2) - \frac{\sigma}{2} \delta(q'^2) \right)$$

$$= \int dt\, dx \left(\rho \dot{q}\, \delta\dot{q} - \sigma q'\, \delta q' \right)$$

$$= \int dt\, dx \left(-\rho \ddot{q} + \sigma q'' \right) \cdot \delta q \; + \text{Randterme}$$

(die bei der partiellen Integration auftreten)

Mit $c^2 \equiv \sigma/\rho$ folgt

$$\boxed{\ddot{q} - c^2 q'' = 0}.$$

Dies ist eine Wellengleichung, die durch

$$q = A \cos[k(x-ct)] + B \sin[k(x-ct)]$$

gelöst wird. c ist die "Schallgeschwindigkeit" in diesem einfachen Modell.

<u>Für echten Festkörper (3d-Fall):</u>

- $\int dx \frac{\rho}{2} \dot{q}^2 \longrightarrow \int d^3x \frac{\rho}{2} \left(\sum_a \dot{q}_a^2 \right)$

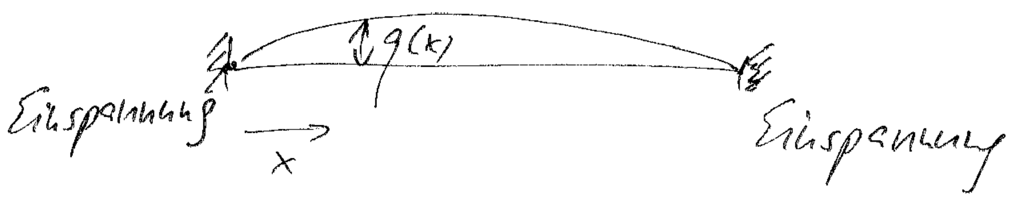
  $q_a = q_a(\bar{x})$ für $a = 1,2,3$ beschreibt die Auslenkungen in x, y, z-Richtung

• $\int dx \, \frac{B}{2} q'^2 \longrightarrow \int d^3x \, \underbrace{\frac{1}{2} B_{ab,cd}}_{\text{elastische Konstanten}} (\partial_a q_b)(\partial_c q_d)$

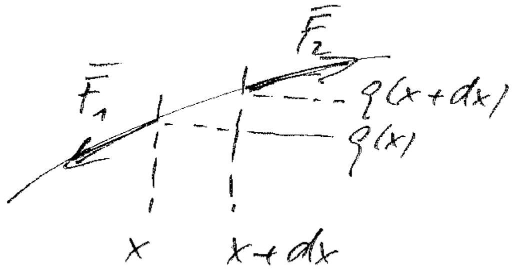
$\Rightarrow$ verschiedene Wellen möglich
(Kompression, Scherung, Verdrillung, ...)

14.4 Schwingende Saite

Im Gegensatz zum unter 14.3 hauptsächlich diskutierten 1-dim. Fall, geschieht hier die Auslenkung orthogonal zur x-Richtung:



Kräftebilanz für kleines Stück der Saite:



Die Spannung in der Saite ist überall in etwa gleich: $|\vec F_1| = |\vec F_2| = F$

$$\ddot{q} \cdot dm = F_\perp \quad , \quad F_\perp = F \cdot \frac{dq}{dx}\Big|_{x+dx} - F \cdot \frac{dq}{dx}\Big|_{x}$$

$$= F \cdot \frac{\frac{dq}{dx}(x+dx) - \frac{dq}{dx}(x)}{dx} \cdot dx$$

$$= F \cdot q'' \cdot dx$$

Mit $dm = \varrho\, dx$ folgt $\varrho \ddot{q} = F q''$

bzw. $\ddot{q} - c^2 q'' = 0$ mit $c = \sqrt{\frac{F}{\varrho}}$

(Wellengleichung, analog zu 14.3)

<u>Alternative Herleitung:</u> $L = T - V$

$$T = \int dx \, \frac{\varrho}{2} \dot{q}^2$$

$$V = F \cdot \Delta x = F \int \sqrt{dx^2 + dq^2} - \text{const.}$$

$\uparrow$ Längenänderung der Saite

$$V = F \int dx \sqrt{1 + q'^2} - \text{const.} = \int F \, \frac{1}{2} q'^2 \, dx$$

$+$ const.!

$$\Rightarrow L = \int dx \left(\frac{\varrho}{2} \dot{q}^2 - \frac{F}{2} q'^2 \right)$$

wie bei 14.3 $\Rightarrow$ $\varrho \ddot{q} - F q'' = 0$.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit
und viel Erfolg bei der Prüfung!

<u>Noch ein Hinweis in eigener Sache:</u>

Für die zukünftigen Teilchen-Theoretiker
ist es (nach Theorie II, III & IV) sehr
wichtig, möglichst bald

- Quantenfeldtheorie I, II
- Allg. Relativitätstheorie
- Kosmologie
- Gruppentheorie
- Differentialgeometrie

} auch schon vor den anderen Theorie-Kursen möglich

zu hören (oder selbst zu lernen)
und sich frühzeitig um Kontakt zu
einem zukünftigen potentiellen Diplom-
Betreuer zu bemühen.