

Sei jetzt V spezifiziert als Potential einer im Inneren von Ω_2 (und zwar genau im Ursprung des Koord. systems) befindlichen Masse M :

$$V(\vec{r}) = - \frac{m M G_N}{r}$$

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Wir benötigen $\nabla^2 V$ bzw. $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$:

$$\left(\nabla \left(\frac{1}{r}\right)\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_j x_j^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}} = -\frac{x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nabla \left(\frac{1}{r}\right)\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$= -\left\{ \frac{3}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{3/2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x_i \cdot 2x_i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{5/2}} \right\} = 0$$

Also $I_1 = I_2$ (für 2 beliebige M umgebende Flächen!)

$\nabla^2 V = 0$ für Punktmasse, für Ansammlung
von Punktmassen,

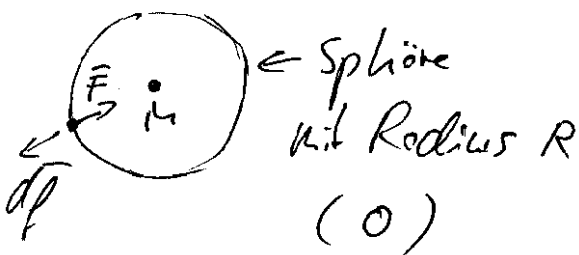
$$(da \nabla^2 V_1 = 0, \nabla^2 V_2 = 0 \Rightarrow \nabla^2 (V_1 + V_2) = 0)$$

für Körper (da er als Summe bzw. Integral
über Punktmassen aufgefasst
werden kann.)

Achtung! $\nabla^2 V = 0$ war von uns nur für
 $r \neq 0$ (also nicht am Ort der
Punktmasse selbst) gezeigt worden.
Also können wir auch für Massen-
verteilungen nur sagen:

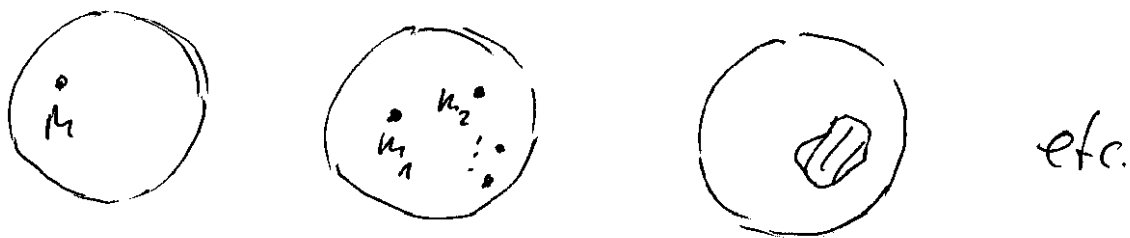
$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{überall dort wo} \\ \rho = 0 \text{ gilt.}$$

Jetzt explizit in einem einfachen Fall:



$$\int_0^R \vec{F} d\vec{f} = - \int_0^R d\vec{f} \cdot |\vec{F}| \\ = -4\pi R^2 \cdot \frac{m_1 \gamma G_N}{R^2} = \underline{\underline{-4\pi G_N m_1 M}}$$

Wegen $\nabla^2 V = 0$ gilt dies auch für



$$\sum m_i = M$$

$$\int \rho \, dV = M$$

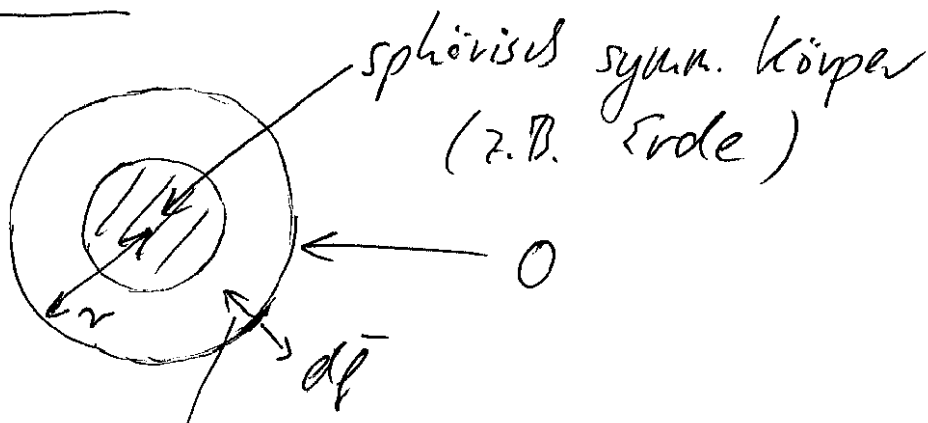
\Rightarrow Wir können mit unserer Probe im allgemeinen
(Testmasse)

die Gesamtmasse eines Systems bestimmen
durch

$$M = - \frac{1}{4\pi G_N m} \int_0 \vec{F} \, d\vec{f}$$

beliebige, M umgebende Fläche

Speziell:



\vec{F} (aus Symm. prüfen $|\vec{F}| = \text{const. auf } 0$
und $\vec{F} \parallel d\vec{f}$ auf 0)

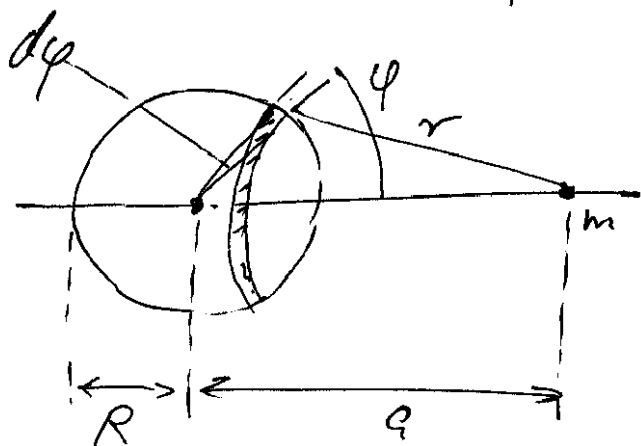
$$-4\pi G_N m M = \int \vec{F} d\vec{p} = -|\vec{F}| 4\pi r^2$$

$$|\vec{F}| = \frac{m M G_N}{r^2}$$

$$\text{bzw. } \vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{G_N m M}{r^2},$$

also exakt wie bei zentraler Punktmasse M .

expliziter Check: für Kugelschale mit
Flächendichte ρ_F (in ^{z.B.} kg/m^2)



$$\begin{aligned} dV &= -G_N \frac{m dM}{r} = -\frac{G_N m}{r} \rho_F dA \\ &= -\frac{G_N m \rho_F}{r} (R d\varphi) \cdot (2\pi R \sin\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(a - R \cos\varphi)^2 + (R \sin\varphi)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos\varphi} \end{aligned}$$

$$V = -G_N m S_F 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{d\varphi \sin\varphi}{\sqrt{A - B\cos\varphi}} \quad \left| \begin{array}{l} A = a^2 + R^2 \\ B = 2aR \end{array} \right.$$

$$\cos\varphi = x, \quad dx = -\sin\varphi d\varphi$$

$$V = -G_N m S_F 2\pi R^2 \int_1^{-1} \frac{-dx}{\sqrt{A - Bx}}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(-B)} \cdot 2 \sqrt{A - Bx} \right]_{-1}^{-1} \\ & = \frac{2}{2aR} \left(\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR} - \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR} \right) \\ & = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

Mit $S_F = 4\pi R^2 \equiv M$ folgt $V = -\frac{G_N m M}{a}$ ✓

Mit der gleichen Methode lässt sich zeigen:

In Inneren einer gleichmäßig schweren ($S_F = \text{const.}$) Kugelschale gibt es keine durch diese Schale erzeugte gravit. Kraft ($V = \text{const.}$)

→ Überlegen

Direkte Verbindung Massen dichte - Potential:

wie wissen: $\int_0 \vec{F} d\vec{r} = - (4\pi G_N m) \cdot M$ ← Gesamtmasse innerhalb von 0

$$\int_{\text{Vol.}} (\nabla \vec{F}) d(\text{Vol.}) = - (4\pi G_N m) \int_{\text{Vol.}} \rho d(\text{Vol.})$$

Da dies für beliebige Volumina (bzw. die entsprechenden Oberflächen 0) gilt, muss es auch "ohne Integralzeichen" richtig sein:

$$\nabla \vec{F} = - (4\pi G_N m) \cdot \rho$$

$$\text{bzw. } \nabla^2 V = (4\pi G_N m) \cdot \rho$$

oder mit $\phi = \frac{1}{m} V$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G_N \rho}$$

("ρ ist Quelle des gravit. potentials φ")

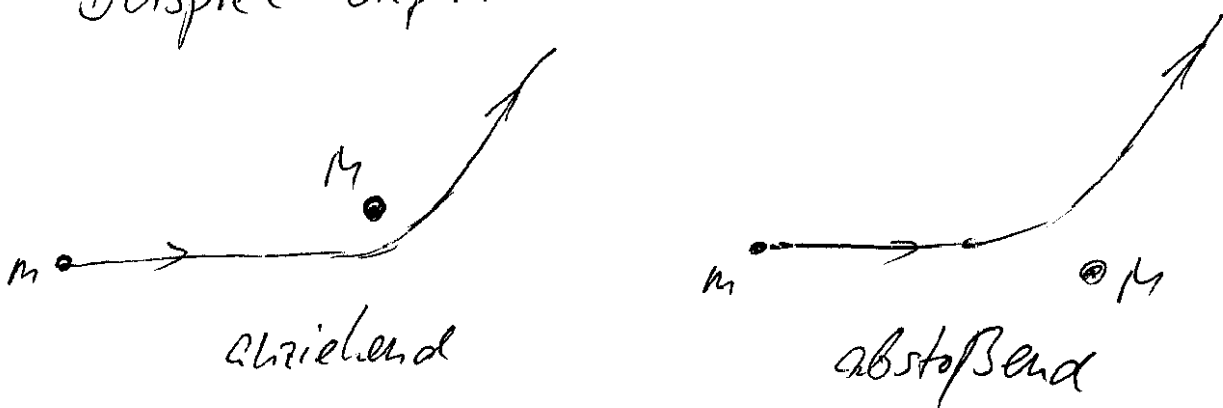
$$\text{zu } \phi: m \ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\nabla V; \quad \phi = \frac{V}{m} \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{x}} = -\nabla \phi}$$

Viel ausführlichere Diskussion dieser Methoden:
in Th. E-Dynamik (Maxwell-Gl.-en)

9. Zerfalls- u. Stoßprozesse

- große Bedeutung in Chemie, Kernphysik, Teilchenphysik (jeweils mit quantenmed. Aspekten, die hier ignoriert werden)
- in Astrophysik (z.B. Vorbeiflug eines schnellen Satelliten an einem entfernten Planeten, "Begegnung" (ohne Kollision!) zweier Himmelskörper etc.) → gutes, kein klassisches Beispiel
- Warum an diesem Ort in der Vorlesung:

da das oben diskutierte Zentralkraftproblem (speziell das Keplerproblem, bzw. bei anderen Vorzeichen, das Stoßproblem zweier gleich geladener Teilchen) ein gutes explizites Beispiel liefert:



9.1 Zerfall von Teilchen

(als eine Art Vorübung)

Teilchen mit Masse M und innerer Energie E
zerfällt in 2 Teilchen mit Massen m_1, m_2
und innerer Energie E_1, E_2 ($M = m_1 + m_2$)

↑
Erhaltung der Masse
(wird in klass. Mechanik
stets vorausgesetzt)

Energieerhaltung:

$$E + \frac{M}{2} \bar{v}^2 = E_1 + \frac{m_1}{2} \bar{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \bar{v}_2^2$$

Impulserhaltung:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$$

$$M\bar{v} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2$$

einfachste Situation: M ruht, $\bar{p} = 0$

also: $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0$

$$E - E_1 - E_2 = \underbrace{\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2}}_{\Delta E}$$

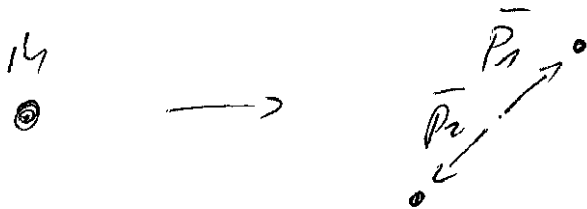
$$\Delta E = \frac{\bar{p}_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$|\bar{p}_1| = |\bar{p}_2| = \sqrt{\frac{2 \Delta E m_1 m_2}{M}}$$

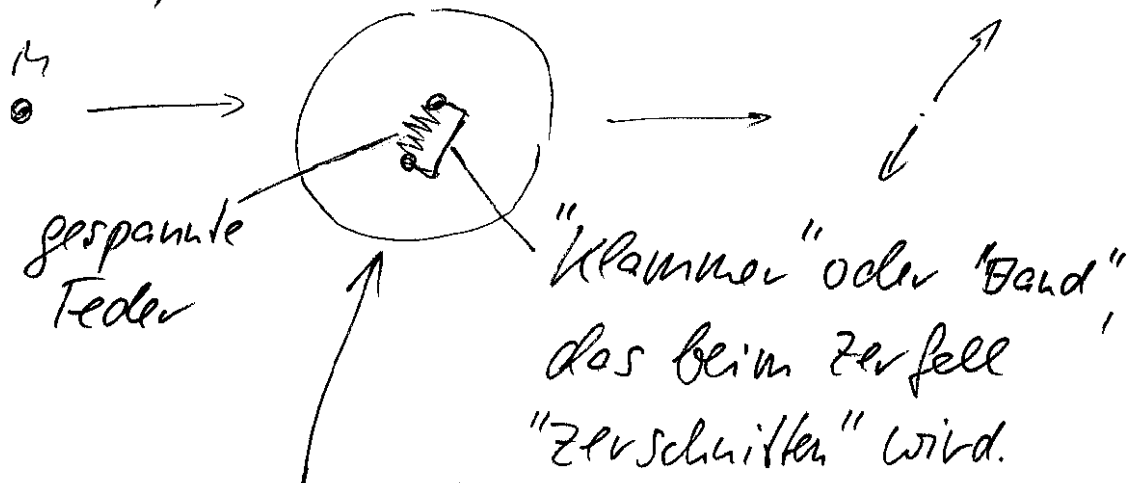
$$\bar{p}_1 = -\bar{p}_2$$

Dies beschreibt die Zerfallsprodukte nicht vollständig: die Flugrichtung der Produkte bleibt unbestimmt.

$\bar{p}_1 / |\bar{p}_1|$ ist frei wählbar



Die Richtung erfordert zusätzliche ("mikroskopische") Information, z.B.



Die Zerfallsrichtung wird durch diesen Mechanismus festgelegt. (In interessanten phys. Beispielen wird diese Rolle von gewissen inneren Freiheitsgraden des zerfallenden Teilchens übernommen,

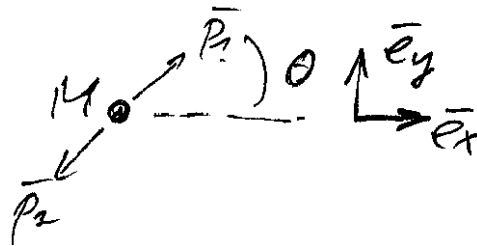
z.B. "Spin", Drehimpuls etc.)

- eine andere Möglichkeit der Beschreibung im Rahmen der klass. Mechanik:

Zerfallsrichtung ist zufällig, z.B.,
für jede Richtung gleichwahrscheinlich.

Allgemeiner Fall:

$\vec{v} \neq 0$ gegeben; z.B. mit $\vec{v}/|\vec{v}| = \vec{e}_x$;
Zerfallsrichtung habe im Ruhesystem von M
Winkel θ relativ zu \vec{e}_x :



Der Übergang vom Ruhesystem von M zum
Laborsystem (wo M mit festem \vec{v} fliegt)
geschieht durch Lorentz-Boost:

Labor (L)

$$\vec{v}_L = \vec{v}$$

$\vec{v}_{1L}, \vec{v}_{2L}$?

Schwerptktsystem

Ruhesystem (S)

$$\vec{v}_S = 0$$

$$|\vec{p}_{1S}| = |\vec{p}_{2S}| = \sqrt{2\Delta E m_1 m_2 / M}$$

$$\vec{p}_{1S} = |\vec{p}_{1S}| (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\vec{p}_{2S} = -\vec{p}_{1S}$$

$$\bar{v}_{1,S} = \bar{p}_{1,S} / (2m_1) ; \bar{v}_{2,S} = \bar{p}_{2,S} / (2m_2)$$

$$\bar{v}_L = \bar{v}_S + \bar{v}$$

$$\bar{v}_{1,L} = \bar{v}_{1,S} + \bar{v} , \quad \bar{v}_{2,L} = \bar{v}_{2,S} + \bar{v}$$

noch expliziter:

z.B. für $\bar{v}_{1,L}$:

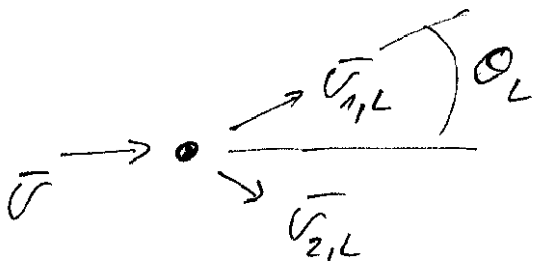
$$\bar{v}_{1,L} = |\bar{v}_{1,S}| (\cos \theta_S, \sin \theta_S) + |\bar{v}| (1, 0)$$

$$= (|\bar{v}_{1,S}| \cos \theta_S + |\bar{v}|, |\bar{v}_{1,S}| \sin \theta_S)$$

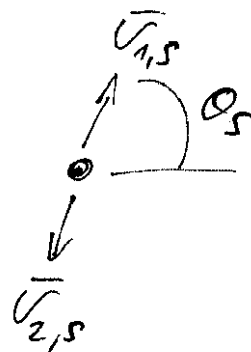
⇒ Flugwinkel des Teilchens 1 im Laborsystem:

$$\tan \theta_L = \frac{|\bar{v}_{1,S}| \sin \theta_S}{|\bar{v}_{1,S}| \cos \theta_S + |\bar{v}|}$$

L:



SR:



9.2 Elastischer Stoß

$$\begin{array}{ccc} m_1, E_1^i & & m_1, E_1^{i'} \\ m_2, E_2^i & \longrightarrow & m_2, E_2^{i'} \end{array}$$

elastisch: innere Energien ändern sich nicht,
also $E_1^i = E_1^{i'}$, $E_2^i = E_2^{i'}$

(siehe, o.B.d.A., $E_1^i = E_2^i = 0$)

Wir haben also: $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\bar{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2'^2}{2m_2}$$

(innere Energien irrelevant)

Seien \bar{p}_1, \bar{p}_2 gegeben

- gehe ins Schwerpunktsystem S , dort gilt

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p} = 0$$

- man kann sich dann einen zwischenzeitlich entstehenden Zustand ("instabiles Teilchen") vorstellen mit

$$\bar{p} = 0 \text{ und } E = \frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2}$$

- dieser Zwischenzustand zerfällt dann (genau wie im Problem von 9.1)

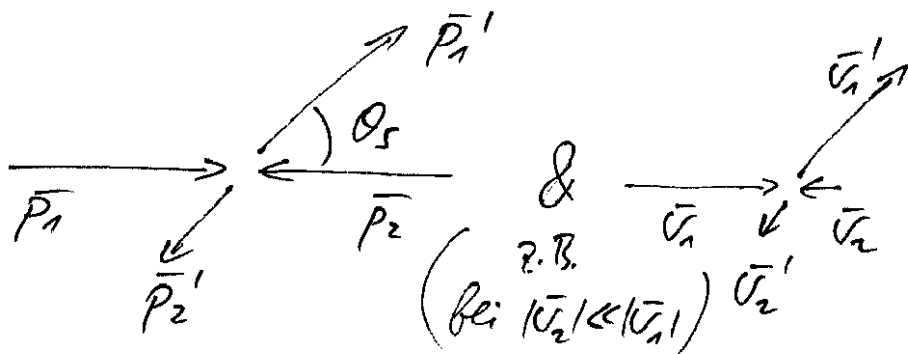
also: $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$

$$|\vec{p}_1'| \equiv p_1' = \sqrt{\frac{2E m_1 m_2}{M}} \quad (= p_1 !)$$

Achtung: Dies gilt nur
Schwerpunktsystem, da
dort

$$E = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2 M}{2m_1 m_2}$$

Bild in S:



$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2 \xrightarrow{\text{Rotation um } \theta_S} \vec{p}_1', \vec{p}_2')$$

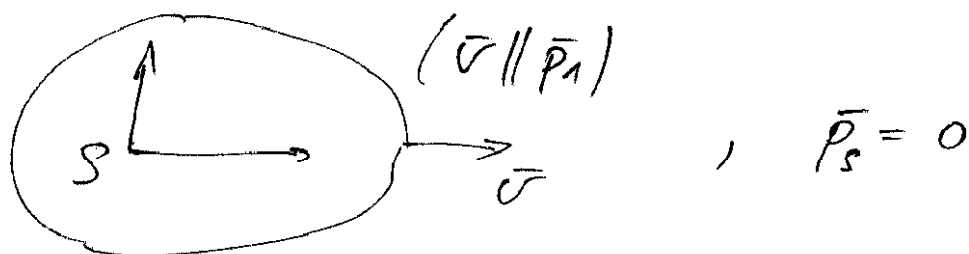
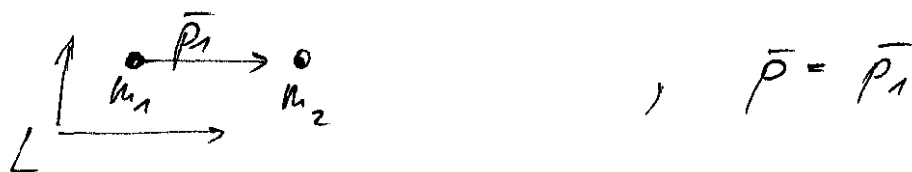
- der Wert von θ_S muß als zusätzl. Information "hineingesteckt" werden
- die so gefundenen Impulse \vec{p}_1', \vec{p}_2' können anschließend, falls erforderlich, ins Laborsystem (mit $\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p} \neq 0$) übersetzt werden $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{p}_{1L}', \vec{p}_{2L}'}}$.

Besonders wichtiges Beispiel:

Eines der Teilchen ruht zunächst in L

$$m_1, \bar{p}_1 \quad ; \quad m_2, \bar{p}_2 = 0$$

a) Wie können ins System S sehen:



Offensichtlich bewegt sich, von S aus gesehen, m_1, m_2 mit einer zusätzlichen Geschwindigkeitskomponente $|\vec{v}|$ in negative z-Richtung:

$$\begin{aligned} \bar{p}_S &= \bar{p} - M \cdot \vec{v} \quad (M = m_1 + m_2) \\ &= \bar{p}_1 - M \vec{v} \end{aligned}$$

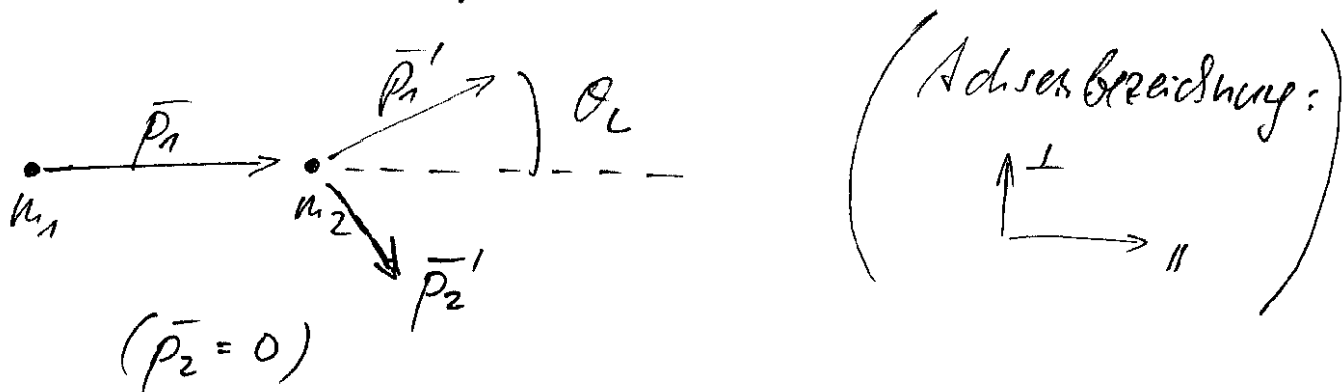
$$\bar{p}_S = 0 \Rightarrow \vec{v} = \bar{p}_1 / M$$

$$\Rightarrow \bar{p}_{1,S} = \bar{p}_1 - \vec{v} m_1 = \bar{p}_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right)$$

$$\bar{p}_{2,S} = \bar{p}_2 - \vec{v} m_2 = -\bar{p}_1 \left(+ \frac{m_2}{M}\right) \quad \text{gleich!}$$

$\bar{p}_{1,s'}$, $\bar{p}_{2,s'}$ ergeben sich jetzt durch Drehung um θ_s (extra Information). Danach zurücksehen zum L-System, falls gewünscht.

b) Direkt im L-System:



$$\bar{p}_1 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2' \Rightarrow p_{1,\parallel} = p_{1,\parallel}' + p_{2,\parallel}'$$

$$p_{1,\perp}' = -p_{2,\perp}'$$

Sei jetzt zur Vereinfachung der Notation $p_{1,2}''' \equiv |\bar{p}_{1,2}'|$.

$$\Rightarrow p_1 = p_1' \cos \theta_L + \sqrt{p_2'^2 - p_{2,\perp}'^2}$$

$$p_1 = p_1' \cos \theta_L + \sqrt{p_2'^2 - p_1'^2 \sin^2 \theta_L}$$

$$(p_1 - p_1' \cos \theta_L)^2 = p_2'^2 - p_1'^2 \sin^2 \theta_L \quad (*)$$

Außerdem gilt Energieerhaltung:

$$p_1^2 / 2m_1 = p_1'^2 / 2m_1 + p_2'^2 / 2m_2$$

$$\Rightarrow p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2)$$

Einsetzen in (*):

$$p_1^2 - 2p_1 p_1' \cos \theta_L + p_1'^2 \cos^2 \theta_L = \frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2) - p_1'^2 \sin^2 \theta_L$$

Teilen durch m_1^2 :

$$v_1^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) - 2v_1 v_1' \cos \theta_L + v_1'^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$v_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1} - \frac{2m_1 v_1 v_1' \cos \theta_L}{m_1} + v_1'^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1}{m_1} v_1 \cos \theta_L \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1} v_1 \cos \theta_L\right)^2 - v_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1}}$$

$$\underline{\underline{v_1' = v_1 \cdot \frac{m_1 \cos \theta_L \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_L}}{m_1}}}$$

(siehe auch graphische Interpretation in vielen Lehrbüchern)

- $v_1' < 0$ nicht akzeptabel (in diesen Fällen nur eine Lösung für v_1')
- Zum Verständnis von zwei Lösungen, betrachte z.B. $m_1 = m_2$, $\theta_L = 0$

Lösung 1: $v_1' = v_1$ - kein echter Stoß

Lösung 2: $v_1' = 0$ - vollst. Energie & Impulsübertrag (wie bei einem zentralen Stoß beim Billiard.)

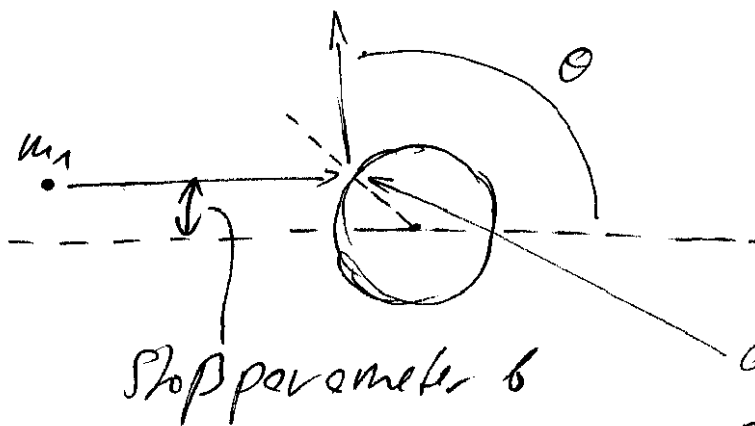
9.3 Der Streuwinkel

Um den Streuwinkel zu bestimmen brauchen wir:

- die konkrete Wechselwirkung
- den Stoßparameter ("impact-parameter")

z.B. Teilchen 1: Punktmasse

Teilchen 2: Kugel, fest im Laborsystem verankert

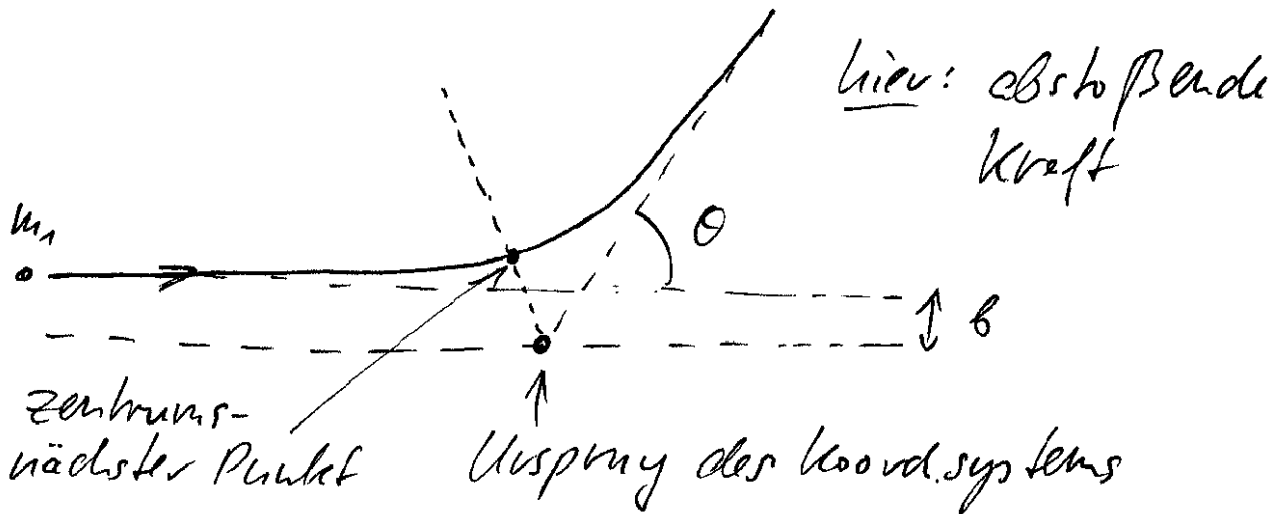


an diesen Oberflächenpunkt soll eine perfekte Reflexion von v_1 stattfinden.

Offensichtlich definiert dies eine Fkt. $\Theta = \Theta(b)$.
(Übung!)

Interessanterer Fall:

Streuung an einem Zentralpotential $V(r)$:



Potenitielle Energie des Teilchens 1: $V(r)$

(Die oben besprochene starre Kugel ist ein

Spezialfall: $V(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ \infty, & r \leq R \end{cases}$)

Allgemeine Bestimmung des Streuwinkels:

(für Potentiale mit $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$)

Aus Kapitel 8.1:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}}$$

$$E = \frac{m_1}{2} v_{\infty}^2, \quad L = m_1 v_{\infty} b$$

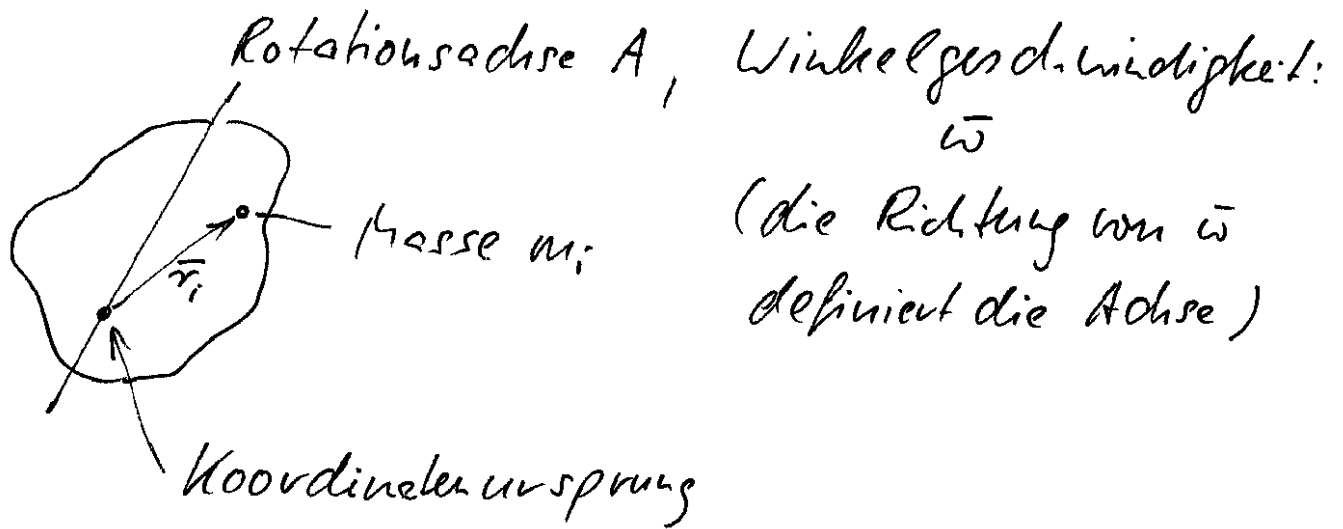
Integriere über den Bereich von
 "∞" bis zum zentrumsnächsten Punkt:

$$\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b \, dr / r^2}{\sqrt{1 - V(r)/E - b^2/r^2}}$$

- $\Theta = \pi - 2\Delta\varphi$ (= $\Theta(b)$) - die gesuchte Wert!
- r_{\min} ist zu berechnen als der Punkt an dem $1 - V(r)/E - b^2/r^2$ verschwindet
 ("Umkehrpunkt" des äquivalenten 1-dim. Problems,
 siehe Kapitel 8.1)

10. Der starre Körper

10.1 Rotation um eine Achse

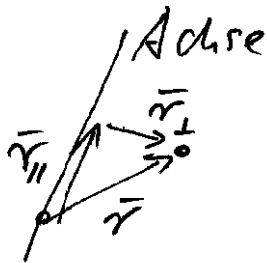


$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\bar{r}}_a^2, \quad \dot{\bar{r}}_a = \bar{\omega} \times \bar{r}_a$$

(siehe Kapitel 4)

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \varepsilon_{ijk} \omega_j (\bar{r}_a)_k \varepsilon_{ij'k'} \omega_{j'} (\bar{r}_a)_{k'}$$

$$= \sum_a \frac{1}{2} m_a (\bar{\omega}^2 \bar{r}_a^2 - (\bar{\omega} \bar{r}_a)^2)$$



$$\bar{\omega}^2 \bar{r}_a^2 = \bar{\omega}^2 (\bar{r}_{a,\parallel}^2 + \bar{r}_{a,\perp}^2)$$

$$(\bar{\omega} \bar{r}_a)^2 = \bar{\omega}^2 (\bar{r}_{a,\parallel})^2$$

$$\Rightarrow T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \bar{\omega}^2 \bar{r}_{a,\perp}^2$$