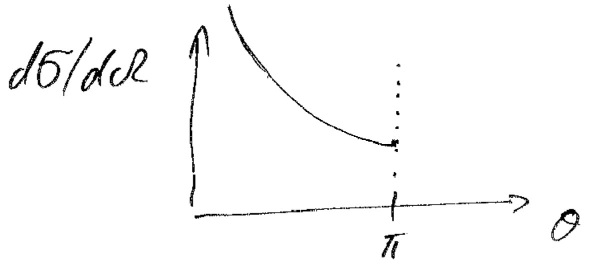
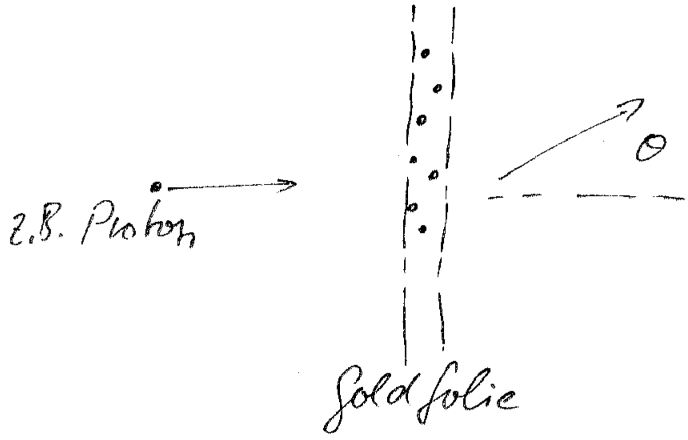
⇒ Die Verteilung der gestreuten Teilchen ist äußerst stark bei $\theta = 0$ "gepeaked":



(Vorzeichen von V ist irrelevant!)

($\sigma_{tot} = \infty$)

<u>experimentell:</u>



Beobachtung der obigen Winkelverteilung

⇒ Atom praktisch "leer", positive Ladung ist in (praktisch punktförmigen) Atomkern vereint, der auch die gesamte Masse trägt.

(Die Elektronen spielen hier wegen der kleinen Masse keine wichtige Rolle.)

(genauere Analyse: – Boost in Schwerpkt.system
– quantenmechanische Behandlung)

$1/\sin^4$ bleibt!

11 Hamilton-Formalismus

11.1 Legendre-Transformation

Betrachte Funktion $f(x)$ mit $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = u$

<u>Ziel:</u> Fasse u als unabhängige Variable auf und gehe zu einer neuen Fkt. von u über, die aber noch die volle in f enthaltene Information bewahren soll.

<u>naiver Versuch:</u>

- $f'(x) = u$ nach x auflösen $\Rightarrow$ $x = x(u)$
- neue Fkt.: $\tilde{g}(u) = f(x(u))$

<u>Problem:</u> sei $f(x) = x^3$ und $f_1(x) = (x+c)^3$

"Leg.-Trf." von f: $f'(x) = 3x^2 = u$, $x = \sqrt{u/3}$

$$\tilde{g}(u) = f(x(u)) = x(u)^3 = (u/3)^{3/2}$$

"Leg-Trf." von f_1: $f_1'(x) = 3(x+c)^2 = u$, $x = \sqrt{u/3} - c$

$$\tilde{g}_1(u) = f_1(x(u)) = (x(u)+c)^3 = (u/3)^{3/2}$$

$\Rightarrow$ Die "Leg.-Trf." von f und f_1 sind gleich. Diese Trf. ist also nicht umkehrbar.

Es ist Information verloren gegangen!

Besser:
$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) = u \quad &\Rightarrow \quad x = x(u) \\ g(u) = f(x(u)) &- u \cdot x(u) \end{aligned}}$$

g ist die Legendre-Transformierte von f.

Zu zeigen: Diese Trf. ist umkehrbar.
Es geht keine Information verloren.

dazu:
$$dg = f'\,dx - du \cdot x - u\,dx$$
$$= -x \cdot du \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{dg}{du} = -x(u)}}$$

vergleiche: $\frac{df}{dx} = u(x)$

also: Beim Legendre-Transformieren haben im Wesentlichen x und $u = f'$ die Rollen getauscht. Wir können also erwarten, daß wir beim nochmaligen Transformieren die alte Fkt. zurückbekommen.

präziser: die Umkehrtransformation ist
$$g(u) \to h(y) = g(u(y)) + y \cdot u(y) \quad \text{mit} \quad g'(u) = -y$$

$$h(y) = f(x(u(y))) - u(y)\cdot x(u(y)) + y\cdot u(y)$$

Wir wissen aber, daß

$$-x(u) = \frac{dg(u)}{du} = -y \quad \text{oder} \; -x(u(y)) = y$$

also:

$$h(y) = f(y) - u(y)\cdot y + y\cdot u(y) = f(y).$$

Wir haben also die ursprüngliche Fkt. zurückgewonnen!

<u>Wichtige Einschränkung:</u> Damit $f'(x) = u$ nach x aufgelöst werden kann, muß $f''(x) \neq 0$ sein!

<u>Explizites Beispiel:</u> $f(x) = x^3$ (mit $x > 0$)

$$f'(x) = 3x^2 = u \Rightarrow x = \sqrt{u/3}$$

$$g(u) = f(x(u)) - u\cdot x(u) = (u/3)^{3/2} - u\cdot\sqrt{u/3}$$

$$= -2(u/3)^{3/2}$$

Umkehrf.: $g'(u) = -2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}(u/3)^{1/2} = -\sqrt{u/3} = y$

$$u = 3y^2$$

$$h(y) = g(u(y)) + y\cdot u(y) = -2(3y^2/3)^{3/2} - y\cdot 3y^2$$

$= -y^3$ ✓ (Einfach 2x Legendre nacheinander gibt $f(x) \longrightarrow h(y) = f(-y)$)

Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Variablen:

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{Leg.-Trf.}} g(u,v) = f(x,y) - x\cdot u - y\cdot v$$

wobei $x = x(u,v)$ und $y = y(u,v)$ durch $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $v = \frac{\partial f}{\partial y}$ definiert sind.

Kommentare:

- dies gilt selbstverständlich auch für viele Variable: $f(x_1 \cdots x_n) \rightarrow g(u_1 \cdots u_n)$
- man kann auch die Legendre-Trf. bezüglich eines Teils der Variablen behachten, im einfachsten Fall:

$$f(x,y) \longrightarrow g(u,y) = f(x,y) - x\cdot u$$

$$\text{mit } u = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Eine sehr wichtige Anwendung (die hier aber keine Rolle spielen wird) findet sich in der Thermodynamik:

$U = U(S,V)$ – innere Energie U als Fkt. der Entropie S und des Volumens V

$$dU = T dS - P dV \text{, d.h. } T = \frac{\partial U}{\partial S},\; P = \frac{\partial U}{\partial V}.$$

Die freie Energie $F = F(T,V)$ ergibt sich daraus als Legendre-Trf.: $F = U - TS$

(analog: Gibbs'sche freie Energie: $G(T,P)$,
Enthalpie: $H(S,P)$)

11.2 Die Hamilton-Funktion

$L = L(q,\dot{q},t)$ – Lagrange-Fkt. als Fkt. der unabhängigen Variablen q, $\dot{q}$ und t.

$H = H(q,p,t)$ – Hamilton-Fkt.

definiert als – (Legendre-Trf. der Lagrange-Fkt. bzgl. $\dot{q}$)

$$H(q,p,t) = p\cdot\dot{q} - L(q,\dot{q},t) \text{ wobei}$$

$$\dot{q} = \dot{q}(p,q,t)\text{, definiert durch } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

<u>Bsp.:</u> $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ (mit $q = x$ folgt die 1-dim. Bewegung im Potential)

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

Impuls!

$$H = p \cdot \dot{q} - L = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + V(q)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Energie! (als Fkt. von Impuls und Koordinate)

<u>Wieder allgemein:</u> $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ heißt der zu q gehörige "kanonisch konjugierte" oder "kanonische" Impuls.

<u>Mit mehreren Variablen:</u>

$$L = L(q_1 \cdots q_n, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n, t)$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Falls $L = T - V$ und T homogen vom Grad 2 in den $\dot{q}_i$ ist H auch im allgemeinen Fall die Energie:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

also nach Satz v. Euler: $\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = 2T$

$\Rightarrow H = 2T - (T-V) = T+V$ ✓

<u>Wichtige Einschränkung:</u>

Um das System $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ nach den $\dot{q}_i$ auflösen zu können, muß

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0 \text{ sein.}$$

(Dies ist die Verallgemeinerung von $f''(x) \neq 0$ oben)

11.3 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ ist Eigenschaft der Legendre-Trf.

(explizit: $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(p \cdot \dot{q} - L) =$

$$= \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} \quad)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial q}$$ (t-Abhängigkeit zur Vereinfachung unterdrückt)

$$= \frac{\partial}{\partial q}\left[p \cdot \dot q(p,q) - L(q, \dot q(p,q))\right]$$

$$= p\,\frac{\partial \dot q}{\partial q} - \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q} - \underbrace{\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q}}_{p} \cdot \frac{\partial \dot q}{\partial q}$$

Lagrange-Gl.

$$= -\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q} \overset{\downarrow}{=} -\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q} = -\dot p$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial p} = \dot q \,,\quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot p}$$

analog mit vielen Variablen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_j p_j \dot q_j - L\right) = \dot q_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot q_j}{\partial q}$$

steht für $q_1 \cdots q_n, \dot q_1 \cdots \dot q_n$

$$- \sum_j \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q_j} \cdot \frac{\partial \dot q_j}{\partial p_i} = \dot q_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_j p_j \dot q_j - L\right) = \sum_j p_j \frac{\partial \dot q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q_i}$$

$$- \sum_j \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q_j} \cdot \frac{\partial \dot q_j}{\partial q_i} = -\dot p_i$$

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$ Hamilton'sche Gleichungen

Zur Interpretation:

- im Lagrange-Formalismus wird ein System durch q_i (Lage im "Konfigurationsraum") und die momentanen Geschwindigkeiten beschrieben. Die Zeitentwicklung ergibt sich aus einem System von n Diff.gleichungen 2. Ordnung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} = 0$$

- im Hamilton-Formalismus wird ein System durch die q_i und p_i (Lage im "Phasenraum") beschrieben. Die Zeitentwicklung ergibt sich aus einem System von $2n$ Diff.gleichungen 1. Ordnung:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \; ; \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}$$

(genauer: $H = H(\underbrace{q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n}_{\text{Lage im Phasenraum}})$)

Simple example: $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

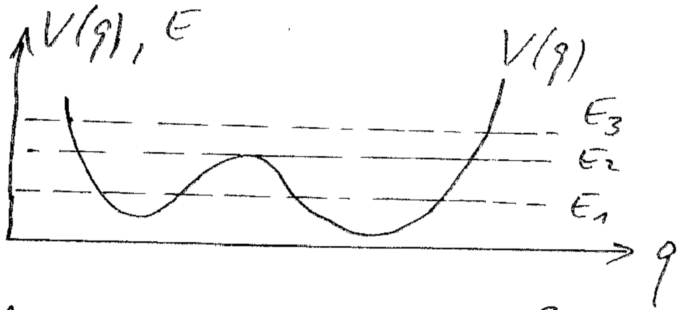
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V'(q)\,, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

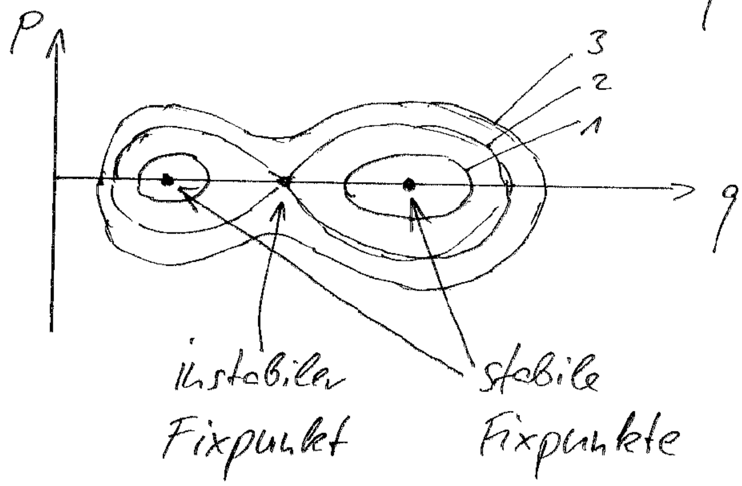
$$\downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$m\ddot{q} = -V'(q) \quad \leftarrow \quad p = m\dot{q}\,,\ \dot{p} = m\ddot{q}$$

wohlbekanntes
Newtonsches Grundgesetz

Zur Veranschaulichung des Phasenraumbegriffs an diesem Beispiel: (eindim. Bewegung)





$$\frac{p^2}{2m} + V(q) = E = \text{const.}$$

bzw.

$$p = \pm\sqrt{2m(E-V)}$$

$$\Downarrow$$

$$p = p(q)$$

Trajektorie im Phasenraum

11.4 Poissonklammern

betrachte Hamiltonsches System: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

betrachte (irgendeine) Funktion von q, p, t

$F(q, p, t)$ alle q_i alle p_i

totale Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt} F(q,p,t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

Definition: $$\{F, G\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

heißt die "Poissonklammer"

der Funktionen $F(q,p,t)$ & $G(q,p,t)$

also: $$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

speziell: $$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \left(= \sum_j \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$\underbrace{\dot{q}_i = \{q_i, H\}}_{\text{elegante Schreibweise der Hamilton-Gleichungen}}$$

$\{F, F\} = 0$ für jedes F

(da $\{F,F\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) = 0$)

- <u>speziell:</u> $\{H, H\} = 0$, also: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

  $\Rightarrow$ Energie ist erhalten, falls H nicht explizit von t abhängt.

- <u>wieder allgemeiner:</u> Falls eine Größe F erhalten ist ($\dot{F} = 0$) und nicht explizit von t abhängt, gilt $\{F, H\} = 0$

- Für die zueinander kanonisch konjugierten Variablen q_i und p_i gilt:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

(weil $\frac{\partial q_i}{\partial p_l} = 0$) (weil $\frac{\partial p_i}{\partial q_l} = 0$)

(weil $\sum_l \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_j}{\partial q_l} \right) = \sum_l \left(\delta_{il}\delta_{jl} - 0 \right) = \delta_{ij}$)

- Sei V der Raum der Fkt.-en auf dem Phasenraum (Fkt.-en, die nicht explizit von t abhängen). V ist ein Vektorraum.

  z. B. $F \in V$ heißt $F: p, q \longrightarrow \mathbb{R}$

  (oder $F = F(q,p)$)

- Die Poissonklammer definiert eine Abb.:

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ F\, ,\, G &\longmapsto \{F,G\} \end{aligned}$$

- <u>Es gilt:</u> (1) $\{F,G\} = -\{G,F\}$ ✓

  (2) $\{\lambda F + \nu G, J\} = \lambda\{F,J\} + \nu\{G,J\}$ ✓

  (3) $\{F,\{G,J\}\} = \{\{F,G\},J\} + \{G,\{F,J\}\}$

  Jacobi-Identität (in "Derivationsform")

andere Schreibweise für (3):

$$\underbrace{\{F,\{G,J\}\} + \{G,\{J,F\}\} + \{J,\{F,G\}\}}_{\text{Summe über zyklische Permutationen}} = 0$$

zum Beweis von (3):

$$\{H, \{G, J\}\} = -\frac{d}{dt}\{G, J\} =$$

$$\overset{(*)}{=} \left\{-\frac{d}{dt}G, J\right\} + \left\{G, -\frac{d}{dt}J\right\} =$$

siehe unten

$$= \{\{H, G\}, J\} + \{G, \{H, J\}\} \quad \text{"}\checkmark\text{"}$$

Nun könnte aber eine beliebige dritte Fkt., z.B. F, zur Hamilton-Fkt. auf V erklärt werden. Dies würde eine entsprechende Dynamik und damit ein "$\frac{d}{dt}$" für alle weiteren Fkt.-en definieren. Dann gilt obige Herleitung und die Jacobi-Identität ganz allgemein. ✓

Erhaltungsgrößen: Energieerhaltung $\rightarrow \{H, H\} = 0$

Impulserhaltung $\rightarrow \{\vec{P}, H\} = 0$

3 Komponenten des Gesamtimpulses: $\{P_1, H\} = 0$, $\{P_2, H\} = 0$, $\{P_3, H\} = 0$

Drehimpulserhaltung $\rightarrow \{\vec{L}, H\} = 0$

Ein Vektorraum V mit einer Abbildung

$$V \times V \to V$$

und den Eigenschaften (1) – (3) oben heißt Lie-Algebra. Dies ist ein in Mathematik und theor. Physik zentraler Begriff. Um hier mehr Einsicht zu erlangen, betrachten wir den Drehimpuls genauer:

ein Teilchen: $q_i \to x_i$ $(i = 1..3)$, $L_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j p_k$

$$\{L_1, L_2\} = \{x_2 p_3 - x_3 p_2 \,,\, x_3 p_1 - x_1 p_3\}$$

Zur Berechnung: weitere Eigenschaft der Poisson-Klammer:

$$\{F, GJ\} = \{F, G\} J + G\{F, J\}$$

Beweis durch explizites Ausrechnen oder:

$$\{F, G\} = \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)}_{} \cdot G$$

Dies ist ein Differentialoperator auf dem Phasenraum und die obige "Derivationseigenschaft" folgt damit einfach aus der Leibnizregel.

<u>also:</u> $\{x_2 p_3 - x_3 p_2 , x_3 p_1 - x_1 p_3\}$

$= \{x_2 p_3, x_3 p_1\} - \{x_2 p_3, x_1 p_3\} - \{x_3 p_2, x_3 p_1\}$
$+ \{x_3 p_2, x_1 p_3\}$

z.B. erster Term:

$$\{x_2 p_3, x_3 p_1\} = \{x_2 p_3, x_3\} p_1 + x_3 \{x_2 p_3, p_1\}$$

$$= \{x_2, x_3\} p_3 p_1 + x_2 \{p_3, x_3\} p_1 + x_3 \{x_2, p_1\} p_3 + x_3 x_2 \{p_3, p_1\}$$

$$= - x_2 p_1$$

$$= - x_2 p_1 - 0 - 0 + p_2 x_1 = x_1 p_2 - x_2 p_1 = L_3$$

analog für die anderen L_i. Insgesamt:

$$\{L_1, L_2\} = L_3 , \quad \{L_2, L_3\} = L_1 , \quad \{L_3, L_1\} = L_2$$

$\Rightarrow$ • Drehimpuls bildet geschlossenes System unter Poisson Klammer

• L_1, L_2 erhalten $\Rightarrow$ L_3 erhalten (wegen Jacobi-Identität)

<u>allgemeiner:</u> Erhaltungsgrößen bilden Lie-Algebra.

<u>Zu (*) auf S. 155:</u>

Es gilt a) $\frac{d}{dt}\{q,p\} = \{\frac{d}{dt}q,p\} + \{q,\frac{d}{dt}p\}$

b) $\frac{d}{dt}\{p,p\} = \{\frac{d}{dt}p,p\} + \{p,\frac{d}{dt}p\}$

c) wie b) nur mit $p \to q$.

Mit Linearität und Derivationseigenschaft (siehe S. 156 unten) folgt daraus für alle analytischen Fkt.-en $G(p,q)$ und $J(p,q)$ die auf S. 155 mit (*) bezeichnete Gleichheit.

<u>Nachrechnen von a):</u> $\frac{d}{dt}\{q,p\} = \frac{d}{dt}1 = 0$

$$\{\frac{d}{dt}q,p\} + \{q,\frac{d}{dt}p\} = \{\frac{\partial H}{\partial p},p\} - \{q,\frac{\partial H}{\partial q}\}$$

$$= \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 0$$

<u>Nachrechnen von b), c):</u> Evident wegen Antisymm. von $\{\cdot\cdot,\cdot\cdot\}$.

Die Verallgemeinerung auf viele Variable q_i, p_i ist ohne Weiteres möglich.

- Eine weitere wichtige Art von Lie-Algebren ergibt sich wie folgt:

  Sei V der Vektorraum der $N\times N$ Matrizen und $V\times V \longrightarrow V$ definiert durch

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ \Psi \quad \Psi & & \\ A \quad B & \longmapsto & [A,B] \equiv A\cdot B - B\cdot A \end{array}$$

(Kommutator)

(Die Lie-Alg.-Eigenschaften (1) – (3) auf S. 154 sind leicht nachzuprüfen.)

- Speziell sind (kleine) Drehungen $R \in SO(3)$ darstellbar als $R = 1\!\!1 + \varphi^i T^i$

  mit $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

– leicht nachzuprüfen: $[T^1, T^2] = T^3$ etc.

(mit 1,2,3 zyklisch vertauscht)

– Dies ist exakt die oben durch Poissonklammern realisierte "Drehimpulsalgebra" der drei Fkt.-en L_1, L_2, L_3. Das ist kein Zufall! Der tiefere Zusammenhang zwischen beiden Strukturen führt über das Noether-Theorem: Symmetrie → erhaltene Größe.

Kommentar:

Die Beschreibung der Hamilton-Mechanik durch Poisson-Klammern nimmt vieles von der Quantenmechanik vorweg. Insbesondere:

Mechanik: Fkt. $F(q,p)$ $\qquad \dot{F} = \{F, H\}$

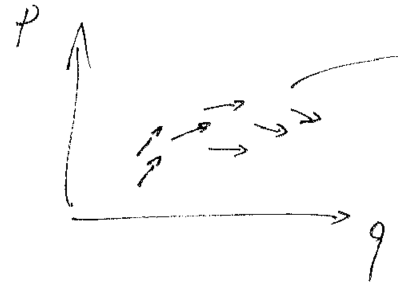
QM: Matrix F (evtl. ∞-dimensional) $\qquad \dot{F} = \frac{1}{i\hbar}[F, H]$

11.5 Satz v. Liouville

Sei $\bar{\xi}(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ ein Pkt. im $2n$-dim. Phasenraum. Die Zeitabhängigkeit ($\bar{\xi} = \bar{\xi}(t)$) beschreibt eine Trajektorie im Phasenraum. Der Geschwindigkeitsvektor

$$\bar{\omega}(t) = \frac{d\bar{\xi}(t)}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1} \ldots -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

ist offensichtlich für jeden Pkt. im Phasenraum zeitunabhängig, falls H nicht explizit von t abhängt.



Geschwindigkeitsfeld $\bar{\omega} = \bar{\omega}(q,p)$ (oder $\bar{\omega} = \bar{\omega}(q,p,t)$, falls $H = H(q,p,t)$)