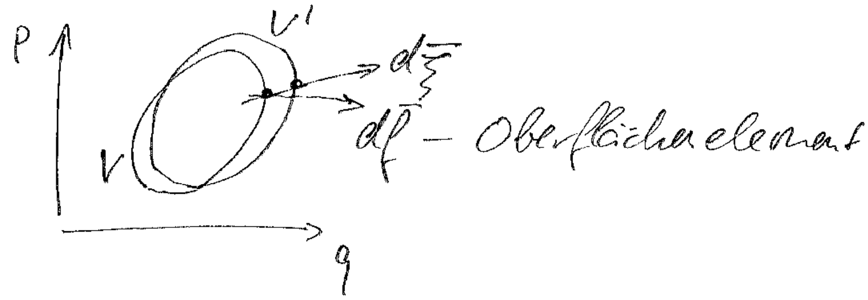
Es gilt:

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \bar{\nabla}_{q,p}\cdot\bar{\omega} = \sum_i\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\omega_{n+i}}{\partial p_i}\right)$$

$$=\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_i}\right)=0$$

$\Rightarrow$ $\bar{\omega}$ beschreibt eine "inkompressible" Strömung.

Betrachte alle Systeme mit Anfangsbedingungen in einem Vol. V des Phasenraums:



Nach Zeit dt geht V über in V' (durch Bewegung jedes der Punkte in V)

$$dV = V' - V = \int_O d\bar{f}\cdot d\bar{\xi}$$

(nur die Projektion von $d\bar{\xi}$ in df-Richtung trägt zur Verschiebung der Oberfläche von V bei.)

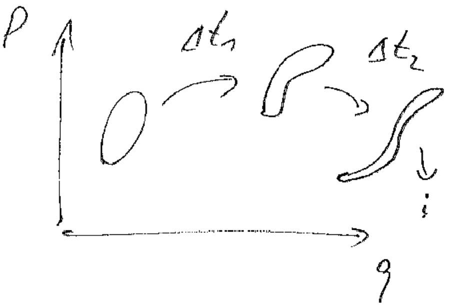
Division durch dt

$\Downarrow$

$$\frac{dV}{dt} = \int_O d\bar{f}\cdot\bar{\omega} \underset{\text{Gauß}}{=} \int_V d(\text{Vol.})\,(\bar{\nabla}\bar{\omega}) = 0$$

⇒ Satz v. Liouville: Die Größen von Teilvolumina des Phasenraumes ändern sich aufgrund der Bewegung nicht:

(Die Form kann sich natürlich ändern!)



Wichtige Anwendungen:
- Teilchenstrahlen im Beschleuniger
- Lichtstrahlen

11.6 Kanonische Transformationen

Vorbemerkungen:

Die Lagrangesche Formulierung der Mechanik ist invariant unter "Punkttransformationen":

$$q \longrightarrow Q(q,t)$$

$$L(q,\dot{q},t) \longrightarrow L'(Q,\dot{Q},t)$$

Es gilt: $L'(Q(q,t),\ \dot{Q}(q,\dot{q},t),\ t) = L(q,\dot{q},t)$

(Wir können dies als Def. des transformierten L auffassen.)

In der Tat, mit dieser Def. gilt

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(Q(q,t), \dot{Q}(q,\dot{q},t), t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t) = S .$$

Also werden S und S' „gleichzeitig" extremal, z.B. für ein gewisses $q(t)$ und $Q(t) = Q(q(t),t)$.

<u>Interessante Übung:</u>

direkter Check der Äquivalenz der beiden Bewegungsgleichungen:

$$Q = Q(q,t) \quad , \quad \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L'(Q(q,t), \dot{Q}(q,\dot{q},t), t)}{\partial q} = \frac{\partial L'}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial \dot{Q}}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial L'}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial^2 Q}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}\frac{\partial^2 Q}{\partial q \partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}\right)\frac{\partial Q}{\partial q} +$$

$$+ \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial q}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L'}{\partial Q}\right) \quad ✓$$

Geometrische Formulierung:

Die q_i parametrisieren einen Raum. Die Lagrange-Mechanik bezieht sich aber auf den Raum selbst (und den durch $\dot{q}_i$ beschrieb. Tangentialraum an jedem Pkt.). Sie ist damit von der Parametrisierung unabhängig.

(Besser: Konzept der Mannigfaltigkeit einführen ...)

{Ende der "Vorbemerkungen"}

Hamilton-Mechanik – kanonische Trf.-en

- in der Hamilton-Formulierung haben wir mehr "Invarianzen" (Reparametrisierungsmöglichkeiten), da wir q und p haben.
- wir können aber nicht die allgemeinste Form, also
$$Q = Q(q,p,t)\,,\quad P = P(q,p,t)$$
mit beliebigen Fkt-en Q & P zulassen.

(Natürlich ginge $Q = Q(q,t)$ und $P = \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}$ – wie oben diskutiert – aber das genügt uns nicht.)

Wir setzen an: $Q = Q(q,p,t)$, $P = P(q,p,t)$
und suchen Bedingungen an Q & P, die garantieren, daß es ein $H'(Q,P,t)$ gibt mit

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} \quad \& \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}.$$

Dazu sinnvoll festzustellen:

Die Hamilton-Gl.-en folgen aus einem
<u>modifizierten Wirkungsprinzip</u>:

$$\delta S = 0 \quad \text{mit} \quad S = \int \left(\sum p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

wobei q & p variiert werden (und nur q bei t_1 & t_2 fixiert ist).

<u>Beweis</u>: $\delta S = \int \left(\delta p \, \dot{q} + p \frac{d}{dt}(\delta q) - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt$

$$= \int \delta p \underbrace{\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right)} dt + \int \delta q \underbrace{\left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right)} dt + \underbrace{p \, \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}}_{0}$$

muß jeweils verschwinden, wenn δp & δq allgemein sein sollen. ✓

Wenn wir also

$$\Sigma P\dot{Q} - H' = \Sigma p\dot{q} - H - \dot{F} \quad \text{haben,}$$

dann wird die Variation des Integrals wegen

$$\int \dot{F} dt = F \Big|_{t_1}^{t_2} \quad , \quad F = F(q, Q, t)$$

die gleichen Bewegungsgleichungen in $p\,q$ & $P\,Q$ geben. Wir fordern also: (jetzt wieder mit Indizes)

$$dF = \Sigma(p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H)\,dt \quad \text{mit } F = F(q, Q, t)$$

bzw.

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} .$$

F heißt erzeugende Fkt.

Zusammenfassend:

gegeben $H(q, p, t)$ und $F(q, Q, t)$
definieren wir $Q = Q(q, p, t)$ und $P = P(q, p, t)$
durch Auflösen von $\left\| p = \frac{\partial F}{\partial q} \;\&\; P = \frac{\partial F}{\partial Q} \right\|$ nach Q & P.

Behauptung: falls $q(t)$ & $p(t)$ die Ham.-Gl.-en mit H erfüllen, erfüllen die so erhaltenen $Q(t)$ und $P(t)$ die Ham.-Gl.-en mit $H' = H + \partial F / \partial t$.

Allgemeiner:

$F(q,Q,t) \longrightarrow F_1(q,Q,t)$

enthalten die gleiche Information (erzeugen die gleiche kanon. Trf.)
$\left\{ \begin{array}{l} F_2(q,P,t) \\ F_3(p,Q,t) \\ F_4(p,P,t) \end{array} \right\}$

und ergeben sich aus F_1 durch entsprechende Leg.-Trf.-en.

z.B.: $$dF_1 = p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt$$
$$\downarrow$$
$$d(\underbrace{F_1 + PQ}_{= F_2(q,P,t)}) = p\,dq + Q\,dP + (H' - H)\,dt$$

es folgt: $$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = H' - H$$

Wir können eine kanon. Trf. also genausogut durch eine erzeugende Fkt. $F_2 = F_2(q,P,t)$ definieren.

(Analog für F_3, F_4)

Beispiele:

- Die <u>identische Trf.</u> läßt sich in der Form mit $F_2 = F_2(q, P)$ leicht durch $F_2 = q \cdot P$ realisieren:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P \; ; \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q$$

(allgemeiner: $F_2 = \sum_i q_i P_i$)

<u>Achtung:</u> Es gibt in diesem speziellen Fall kein (durch Leg.-Trf. zu erhaltendes) $F_1 = F_1(q, Q)$, da $\frac{\partial^2 F_2}{\partial P^2} = 0$.

- Mit der Wahl $F_1 = qQ$ erhält man

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q \; ; \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q \, ,$$

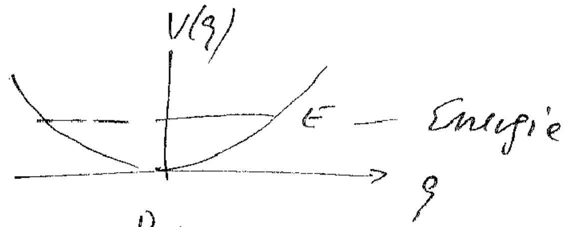
also eine Umbenennung
$$\begin{aligned} p &\to Q \\ q &\to -P \, . \end{aligned}$$

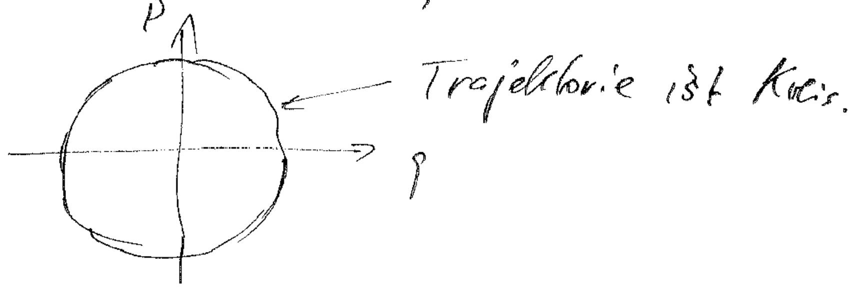
(→ eine "Einteilung" in Koordinaten- und Impulsartige Variable wird von den kanon. Trf.-en <u>nicht</u> respektiert)

• Wenden wir $F_1 = qQ$ speziell auf den harmon. Osz. mit

$$H = \frac{1}{2}(p^2+q^2)^{(*)}$$ (mit allen Parametern = 1 gesetzt)

an:





H ist unter der durch $F_1 = qQ$ generierten kanon. Trf. invariant: $H'(P,Q) = \frac{1}{2}(P^2+Q^2)$.

Die Trajektorie ist es auch, da

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

einfach einer Rotation im Phasenraum um 90° entspricht:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

(*) allg.: $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$; $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$;

$\Downarrow$

$m\ddot{q} + kq = 0$; Lsg. z.B. $q = q_0 \sin\omega t$, $\omega = \sqrt{k/m}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

11.7 Infinitesimale kanon. Trf.-en

Sei $F_2(q,P) = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q,P,t)$

$$\Rightarrow p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \text{bzw.} \quad \Delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \qquad \Delta q_i = \varepsilon \cdot \frac{\partial G}{\partial P_i} \, .$$

Da sich P und p um Terme der Ordnung ε unterscheiden, können wir in der letzten Form G als Fkt. auf dem Phasenraum (q,p) auffassen und $P \to p$ ersetzen:

$$\Delta q = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \; ; \; \Delta p = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q}$$ ("i" unterdrückt)

bzw. $\Delta q = \varepsilon \{q, G\}$; $\Delta p = \varepsilon \{p, G\}$.

Wir sehen sofort: $G = H$ (bzw. $F_2 = qP + \varepsilon H$) generiert eine kanon. Trf., die einer zeitl. Bewegung mit $\Delta t = \varepsilon$ entspricht:

$$\Delta q = \varepsilon \{q, H\} = \varepsilon \dot{q} \, , \; \Delta p = \varepsilon \{p, H\} = \varepsilon \dot{p}$$

$$Q(t) = q(t) + \Delta q = q(t) + \varepsilon \dot{q}(t) = q(t+\varepsilon)$$

(und analog für P)

Wichtige Anwendung:

$\{G, H\} = 0$ $\Updownarrow$

Falls $G(q,p,t)$ eine Erhaltungsgröße ist, dann entspricht $F_2 = qP + \varepsilon G$ der kanon. Trf., die per Noether-Theorem die Symmetrie ist, die zur Erhaltungsgröße G gehört. („Umkehrung" des Noether-Theorems).

Bsp: $P_{ges} = \sum_i p_i$ sei der erhaltene Gesamtimpuls.

$$\Delta p_i = \varepsilon\{p_i, P_{ges.}\} = 0 \; ; \quad \Delta q_i = \varepsilon\{q_i, P_{ges.}\} = \varepsilon$$

ist, wie zu erwarten, eine infinitesimale Translation (die nach Noether-Theorem als Symmetrie den Ursprung der Impulserhaltung darstellt).

12. Hamilton-Jacobi-Theorie

Ziel: Suche kanon. Trf., die zu besonders einfachem $H'(P,Q,t)$ führt. z.B.: $H'=0$

Benutze die Darstellung mit $F_2 = F_2(q,P,t)$.

also: gesucht $F_2(q,P,t)$ mit $H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$

(und $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$)

$$\Rightarrow \boxed{H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

ist durch geeignetes F_2 ~~zu~~ zu lösen.

Hamilton-Jacobi-Diff.gleichung

Dies ist eine partielle Dgl. 1. Ordnung in n Variablen.

(für $q \to q_1 \cdots q_n$)

Die allg. Lösung einer solchen Dgl. hängt von einer (oder mehreren) unbestimmten Funktionen ab.

Wir brauchen nur eine vollst. Lösung, die von n beliebigen Parametern abhängt.

Beispiel zu part. Dgl.-en

$f = f(x,y)$, Dgl.: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

allg. Lösung: $f(x,y) = g(x-y)$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x-y) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = -g'(x-y) \; \checkmark \right)$

vollst. Lösung: $f(x,y) = a(x-y) + b(x-y)^2$

(es gibt selbstverständlich auch andere vollst. Lösungen.)

Besonderheit dieser speziellen Dgl.:

f selbst tritt nicht auf (nur $\frac{\partial f}{\partial x}$ & $\frac{\partial f}{\partial y}$ kommen vor).

$\Rightarrow$ Wir können zu einer Lösung immer einfach eine Konstante addieren:

$$f(x,y) = a(x-y) + b(x-y)^2 + c$$

Die Hamilton-Jacobi-Dgl. ist auch von diesem speziellen Typ.

Wir machen also den Ansatz

$$F_2 = S(q_1 \cdots q_n, t, \underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{n \text{ freie Parameter}}) + \alpha_{n+1}$$

So eine Fkt. S existiert immer!

Wir haben aber allgemein

$$F_2 = F_2(q, P, t) \text{ bzw. } F_2(q_1 \cdots q_n, P_1 \cdots P_n, t).$$

Gegeben unsere Lösung

$$F_2(q, \alpha, t) \text{ bzw. } F_2(q_1 \cdots q_n, \alpha_1 \cdots \alpha_n, t),$$

können wir also die α_i & P_i identifizieren:

$$\alpha_i \equiv P_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

(Wir erklären die Konstanten α_i zu den neuen kanonischen Impulsen.)

Dann gilt: $$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \; ; \; Q_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$$

und $H' = 0$

$$\left(\text{mit } H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right)$$

Bei der Bewegung gilt $\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0$

$\Rightarrow$ Die Q_i sind Konstanten: $Q_i \equiv \beta_i$.

Jetzt: Löse $\beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$ nach den q_i auf.

$$\Rightarrow \underline{\underline{q_i = q_i(t, \alpha, \beta)}}$$

Das Bewegungsproblem ist gelöst!

(2n Konstanten $\leftrightarrow$ Anfangsbedingungen)

Sehr einfaches explizites Beispiel:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

Hamilton-Jacobi: $H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Ansatz mit Separation der Variablen:

$$F_2(q,t) = W(q) + f(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right)^2}_{t\text{-unabhängig}} + \frac{\partial f(t)}{\partial t} = 0$$

t-unabhängig $\Rightarrow$ muß auch t-unabhängig sein

$$\Rightarrow f(t) = -Et$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W(q)}{\partial q}\right)^2 = E \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE}$$

Lösung: $W(q) = \sqrt{2mE} \cdot q + \alpha_2$

Konstante α_1 ($\alpha_1 = E$)

die vorher erwähnte "extra" Konstante ("α_{n+1}")

$$\Rightarrow F_2(q,\alpha,t) = \sqrt{2mE}\, q - Et + \alpha_2$$

$$\left(\text{oder } S(q,\alpha,t) = \sqrt{2mE}\, q - Et\right)$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}}\, q - t$$

nach q auflösen: $q = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,(t+\beta_1) = \underline{\underline{v_0 t + q_0}}$

(E hat die Bedeutung der Energie: $E = \frac{m}{2} v_0^2$.)

<u>Kommentare:</u>

- Der obige Separationsansatz $F_2 = W(q) - Et$ funktioniert immer, wenn H nicht explizit von t abhängt.
- S heißt "Hamiltonsche Wirkungsfunktion":

<u>in der Tat:</u>

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = -H + p_i \dot{q}_i = L$$

(konsistent mit $S = \int L\, dt$)

13 Integrable & Nicht-integrable Systeme, Chaos

(*) unabhängige!

13.1 Integrabilität

Ein System mit n Freiheitsgraden heißt <u>integrabel</u>, wenn es n (*) Erhaltungsgrößen f_i gibt, deren Poissonklammern verschwinden ($\{f_i, f_j\} = 0$).

- Dann läßt sich eine kanon. Trf. finden, so daß $f_i = P_i$ (die neuen kanon. Impulse).
- $\{f_i, f_j\}$ war notwendig, da offensichtlich $\{P_i, P_j\} = 0$ in den neuen Variablen und die infinites. kanon. Trf-en die Poisson-klammern respektieren (siehe oben).
- $\dot{P}_i = 0 = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$ impliziert, daß der neue Hamiltonian von den Q_i <u>unabhängig</u> ist.
- Die Bewegung ist jetzt sehr einfach:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H(P)}{\partial P_i} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow Q_i = Q_i^0 + t \cdot \frac{\partial H(P)}{\partial P_i}$$

Beispiele:

- 1-dim. Bewegung: $n = 1$, Erhaltungsgröße: H
- 2-Körper-Problem: $n = 6$, Erhaltungsgrößen:

  $H, \vec{P}, L_z, \vec{L}^2$

(L_x, L_y nützen hier nichts, da $\{L_x, L_z\} \neq 0$ etc.)

Explizite Durchführung des Überganges zu den neuen Variablen $P_i = f_i$:

gegeben: $H(q,p)$ (mit $q, p \hat{=} q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n$)

und Erhaltungsgrößen $f_i(q,p)$ $(i = 1 \ldots n)$.

Definiere $P_i = f_i(q,p)$ $(i = 1 \ldots n)$ und löse dieses Gleichungssystem nach den p_i auf:

$$\Rightarrow \quad p_i = p_i(q, P) \qquad (\text{mit } P \hat{=} P_1 \ldots P_n).$$

Bezeichne mit $\{q_i\}$ einen Punkt im n-dimensionalen Konfigurationsraum und definiere

$$F_2 = F_2(q, P) = \int_{\{q_i^0\}}^{\{q_i\}} \sum_j dq_j' \cdot p_j(q', P)$$

als "Linienintegral" im n-dimensionalen Konfigurationsraum.

<u>Behauptung:</u> Dieses Integral hängt nicht vom Integrationsweg ab (vgl. Def. des Potentials zur konservativen Kraft auf S. 13).

(Beweis folgt weiter unten.)

Dann kann, für gegebenes $k \in \{1 \dots n\}$, der Weg so gewählt werden, daß das letzte Stück parallel zur q_k-Achse verläuft. Dann sind alle dq_i' (mit $i \neq k$) Null und es folgt

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \int^{q_k} dq_k' \, p_k (q_1 \dots q_k' \dots q_n, P) = p_k$$

(wie gewünscht!)

$F_2(q, P)$ erzeugt also die zu neuen kanon. Variablen Q, P führende kanon. Trf.
(Die Qs sind durch $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$ definiert.)

Es bleibt nur noch, obige "Behauptung" der Wegunabhängigkeit zu prüfen:

Dazu:

- Für $n=3$ (in 3 Dimensionen) ist obiges Linienintegral wegunabhängig, falls $\mathrm{rot}_q \bar{p}$ (mit $\bar{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ verschwindet, also

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0 \qquad (i,j \in \{1,2,3\}).$$

- Man macht sich leicht klar (etwa am Beispiel eines aus achsenparallelen geraden Stücken zusammengesetzten Weges), daß die Verallgemeinerung dieser Bedingung für $n>3$ durch die gleiche Formel (aber mit $i,j \in \{1 \cdots n\}$) gegeben ist.
- Wir müssen also nur zeigen, daß die $n{\times}n$-Matrix

$$\text{"}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)\text{"} = \left\{\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\right\}_{i,j=1\cdots n}$$

symmetrisch ist.

- Dazu setzen wir zunächst $P_i = P_i(q, p)$ in $p_j = p_j(q, P)$ ein:

$$p_j\left(q_1 \cdots q_n, P_1(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n) \cdots P_n(q_1 \cdots, \cdots p_n)\right) = p_j$$