Notation:

$\vec{r}\,'$, $\vec{L}\,'$ ... Koordinaten eines Vektors im raumfesten Sgst.

$\vec{r}$, $\vec{L}$ ... - - - - - - körperfesten "

$\vec{v}\,' = B \cdot \vec{v}$ für bel. Vektor. R Drehmatrix.

Drehimpuls: $\vec{L}\,' = \int d^3r\, \varrho(\vec{r}\,')\,[\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}]$

$$\dot{\vec{L}}\,' = \int d^3r\, \varrho(\vec{r}\,')\,[\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}] \equiv \vec{N}\,' \quad \text{(Drehmoment)}.$$

$\vec{\omega}$, $\vec{\omega}\,'$ momentaner Drehvektor.

$$\vec{L} = \Theta\omega \qquad E_{rot} = \frac{1}{2}(\Theta\omega, \omega)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ik=1}^{3} \omega_i \Theta_{ik} \omega_k$$

Euler-Gleichungen.

$$\dot{\vec{L}}\,' = \vec{N}\,'$$

$$(B\vec{L})^{\circ} = B\vec{N}$$

$$\dot{B}\vec{L} + B\dot{\vec{L}} = BN$$

Erinnerung $\dot{B}\vec{L} = B[\vec{\omega} \times \vec{L}]$

(für jeden Vektor

$$B\dot{\vec{L}} = BN - B[\vec{\omega} \times \vec{L}]$$

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{L} \times \vec{\omega}] + \vec{N}$$

Euler'sche Gleichungen.

$\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$ gehe in Hauptachsensystem

zerlege in Komponenten $\Theta = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_3 \end{pmatrix}$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (J_2 - J_1)\,\omega_2\,\omega_3 + N_1 \text{ zyklisch.}$$

Kräftefreie Bewegung: $N = 0$

Strukturelle Überlegung

Energieerhaltung: $2E_{rot} = (\Theta\omega, \omega) =$

$$J_1^2\,\omega_1^2 + J_2^2\,\omega_2^2 + J_3^2\,\omega_3^2 = \frac{L_1^2}{J_1^2} + \frac{L_2^2}{J_2^2} + \frac{L_3^2}{J_3^2}$$

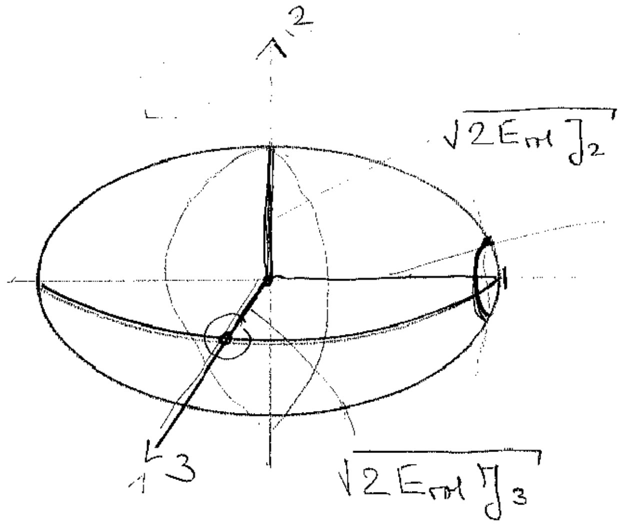
Oberfläche eines Ellipsoids mit Halbachsen a, b, c $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

d.h. Bei gegeb. Energie E_{rot} liegt der Endpunkt von $\vec{L}$ auf einem Ellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{2E_{rot}J_1}$, $\sqrt{2E_{rot}J_2}$, $\sqrt{2E_{rot}J_3}$.

Drehimpulserhaltung

$\vec{L}' = \text{const} = \ell$, $\vec{L}'^2 = \ell^2 = \vec{L}^2$ (B Drehg)

Endpunkte von $\vec{L}$ liegen auf Kugel mit Radius ℓ



mit $J_3 < J_2 < J_1$

$L^2 > 2 E_{rot} J_1$ nicht mögl.

$L^2 = 2 E_{rot} J_1 \qquad L_1 = \pm J_1 \omega_1 = \pm\sqrt{2 E_{rot} J_1}$

$L_2 = L_3 = 0$

$L^2 = 2 E_{rot} J_3 \qquad L_3 = \pm\sqrt{2 E_{rot} J_3}$

$L_1 = L_2 = 0$

Stabile Lösungen, denn wenn

$L_1 = \sqrt{2 E_{rot} J_1} - \epsilon$, dann liegen die möglich Werte von $\vec{L}$ auf der Schnittlinie der Kugel mit dem Ellipsoid

$L_3 = \sqrt{2 E_{rot} J_3} + \epsilon \quad \ldots \quad L_1, L_2$ klein

aber instabil für $L_2 = \sqrt{2 E_{rot} J_2}$

kräftefreie Präzision.

Bsp $\quad J_1 = J_2 = J > J_3$

$$J \dot{\omega}_1 = (J - J_3)\,\omega_3 \cdot \omega_2$$
$$J \dot{\omega}_2 = -(J - J_3)\,\omega_3 \cdot \omega_1$$
$$J_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

$$\rightarrow \quad \omega_1 = A \cdot \sin \alpha t \qquad \omega_2 = A \cdot \cos \alpha t$$

<u>Euler-Kreis</u>

$$\alpha = \omega_3 \frac{J_3 - J}{J}$$

Bei Erde $\frac{J_3 - J}{J} \approx \frac{1}{300}$

$\alpha = \frac{2\pi}{300 \text{ Tage}}$ als (theoret.) Periode der Polwand.

~ 10 Monate

Beobachtet ~ 14 Monate

Erde kein starrer Körper!

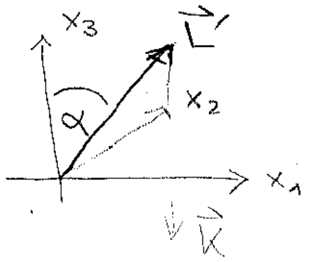
Der Kreisel im Kraftfeld

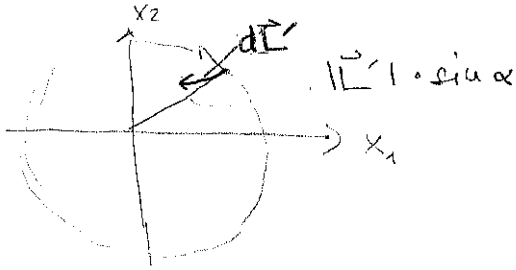
a) Raumfeste Betrachtg.

$$\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'$$

Wir betrachten den Fall, daß $\vec{N}' \perp \vec{L}'$ steht.

<u>Näherungsweise</u> realisiert durch Kreisel im Schwerefeld.





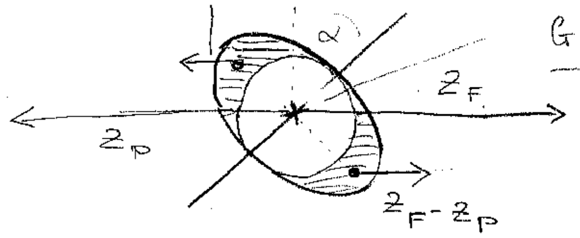
Spitze von $\vec{L}'$ bewegt sich auf Kreis mit Radius $|\vec{L}| \cdot \sin\alpha$.

Geschwindigkeit : $v = \left|\frac{dL'}{dt}\right| = |\vec{N}'|$

also Umlaufperiode

$$T' = \frac{2\pi |\vec{L}'| \sin\alpha}{|\vec{N}'|}$$

<u>Bsp</u> Erzwungene Präzession der Erdachse durch Gezeitenkräfte



$$\frac{G m_♁ m_☉}{R^2} = \frac{m_♁ v^2}{R}$$

($m_♁ \approx$ red. Masse).

d.h. es wirkt ein Drehmoment von

$$|\vec{N}| = 2 \cdot R_♁ \cdot |(\vec{Z}_F - \vec{Z}_P)| \sin\alpha$$

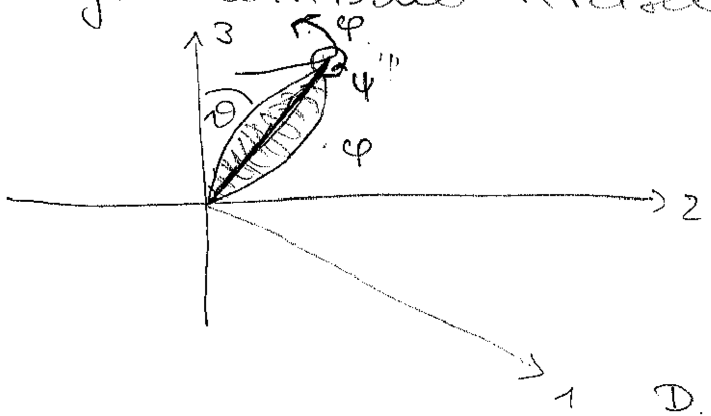
Sonne allein führt zu $T = 96\,000$ a,

Sonne + Mond $T \approx 26\,000$ a.

(Präzession der Äquinoktien)

Der Lagrange'sche Kreisel

Symmetrischer Kreisel im Schwerefeld



Zwei Symmetrien

a) Drehg. um $\underline{\underline{\varphi}}$

b) Drehungen $\underline{\underline{\psi}}$

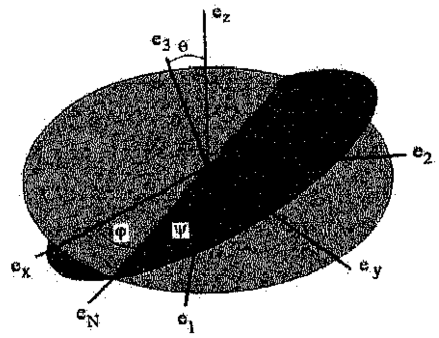
D.h. 2 zyklische Kd.

2 Erhaltungssätze + Energie ok.

vollst. lösbar!!

euler.jpg

Euler'sche Winkel:



Wichtig für aktuelle Lösung:

Nutze Symmetrie ∡ als Lagrange-Kd.

→ zyklische Kd. → Euler-∡
(Modell)

Momentaner Drehvektor:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\psi}\,\vec{e}_3 + \dot{\vartheta}\cdot\vec{e}_N$$

Wähle $\varphi = \psi = 0$, dann

$$\vec{e}_N = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3 \cdot \cos\vartheta + \vec{e}_2 \sin\vartheta$$

Damit

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_1 + \dot{\varphi}(\vec{e}_3 \cos\vartheta + \vec{e}_2 \sin\vartheta) + \dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_1 + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})\vec{e}_3$$

d.h. in Körperfesten Kd:

$$\vec{\omega} = (\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}\sin\vartheta, \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})$$

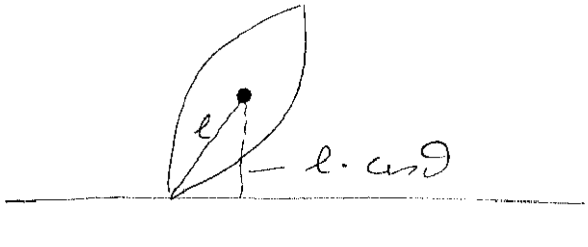
und damit

$$2E_{rot} = J_1 \cdot \dot{\vartheta}^2 + J_2\,\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2$$

Symm. Kreisel $J_1 = J_2 \equiv J$

Potentielle Energie: $m \cdot g \cdot l \cdot \cos\vartheta$, l ist Entfernung des Schwerpunkts von Spitze

m: Masse



damit Lagrangefunktion (zunächst für $\varphi = \psi = 0$)

$$* \quad L = \frac{J}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\vartheta\right) + \frac{J_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2 - m\,g\,l\cos\vartheta$$

aber da φ, ψ System invariant unter Drehungen von φ und ψ ist, hängt L nicht von φ und ψ ab, d.h. * allgemein.

Lösung standard

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \dot\varphi\left(J\sin^2\vartheta + J_3\cos^2\vartheta\right) + \dot\psi J_3 \cos\vartheta$$

$$\equiv L_z \quad (\text{konstant})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = J_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta) \equiv L_3 \quad \text{constant}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta}$ was immer herauskommt,

wir benutzen nämlich den Energiesatz,

$$E = \frac{J}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta\right) + \frac{J_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2 + m\,g\,l\cos\vartheta$$

und drücken $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ durch die Konstanten L_z und L_3 aus.

$$\dot\psi + \dot\varphi \cos\vartheta = L_3/J_3$$

$$\dot\varphi \cdot J_1 \cdot \sin^2\vartheta = L_z - L_3\cos\vartheta$$

und damit haben wir

$$** \quad E = \frac{J}{2}\dot\vartheta^2 + U_{eff}(\vartheta)$$

$$U_{eff}(\vartheta) = m\cdot gl\cos\vartheta + \frac{L_3^2}{2J_3} + \frac{(L_z - L_3\cos\vartheta)^2}{2J_1\sin^2\vartheta}$$

wobei L_3 und L_z aus den Anfangsbed. bestimmt sind, ebenso natürlich E.

** Die Gleichg eines Teilchens mit Kd. ϑ und Masse J, das sich im Potential $U_{eff}(\vartheta)$ bewegt (eindimensional)

Lösung der Bewegungsgleichung Standard:

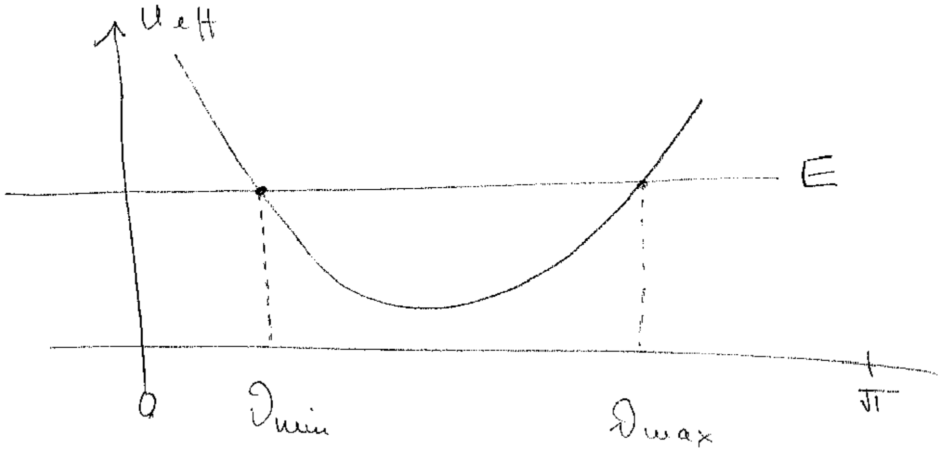
$$\dot\vartheta = \sqrt{\frac{2}{J}U_{eff}(\vartheta)}$$

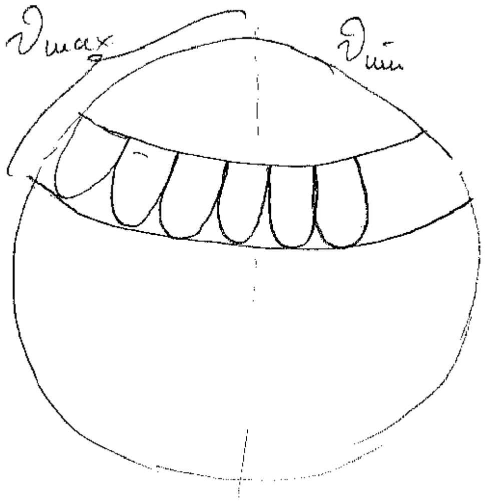
$$t(\vartheta) = \int_{\vartheta_{in}}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\sqrt{\frac{2}{J}U_{eff}(\vartheta')}}$$

(Vorsicht Umkehrpunkte!!)

Viel anschaulicher und instruktiver:

Schaue Potential an. Generelle Form





Variation in ϑ: <u>Nutation</u>

oft sehr klein (→ Bsp.).

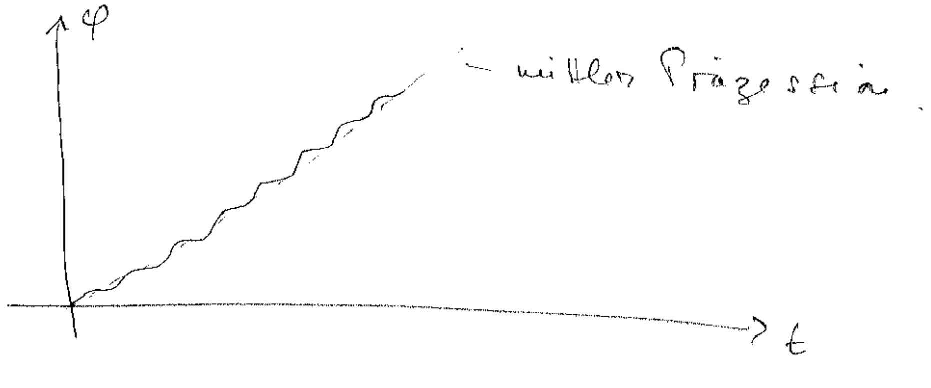
Variation in φ:

Präzession

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_3 \cos\vartheta}{J_1 \cdot \sin^2\vartheta}$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit ist Null für

$\vartheta = \vartheta_{min}$, maximal für $\vartheta = \vartheta_{max}$



10

Parameter :

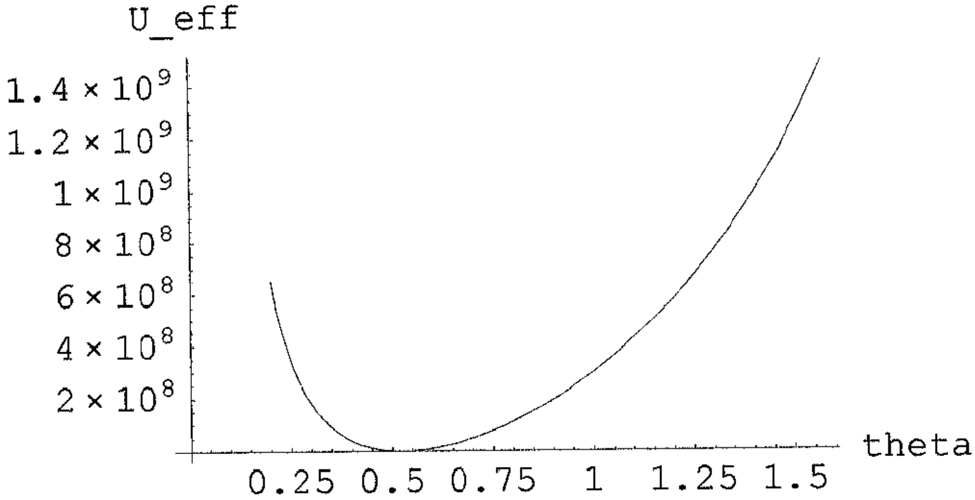
$J_1 = 1\, g\, \mathrm{cm}^2$; $J_3 = 100\, g\, \mathrm{cm}^2$; $m = 1\, g$; $l = 5\, \mathrm{cm}$;
$g = 981\, g\, \mathrm{cm}\, s^{-2}$

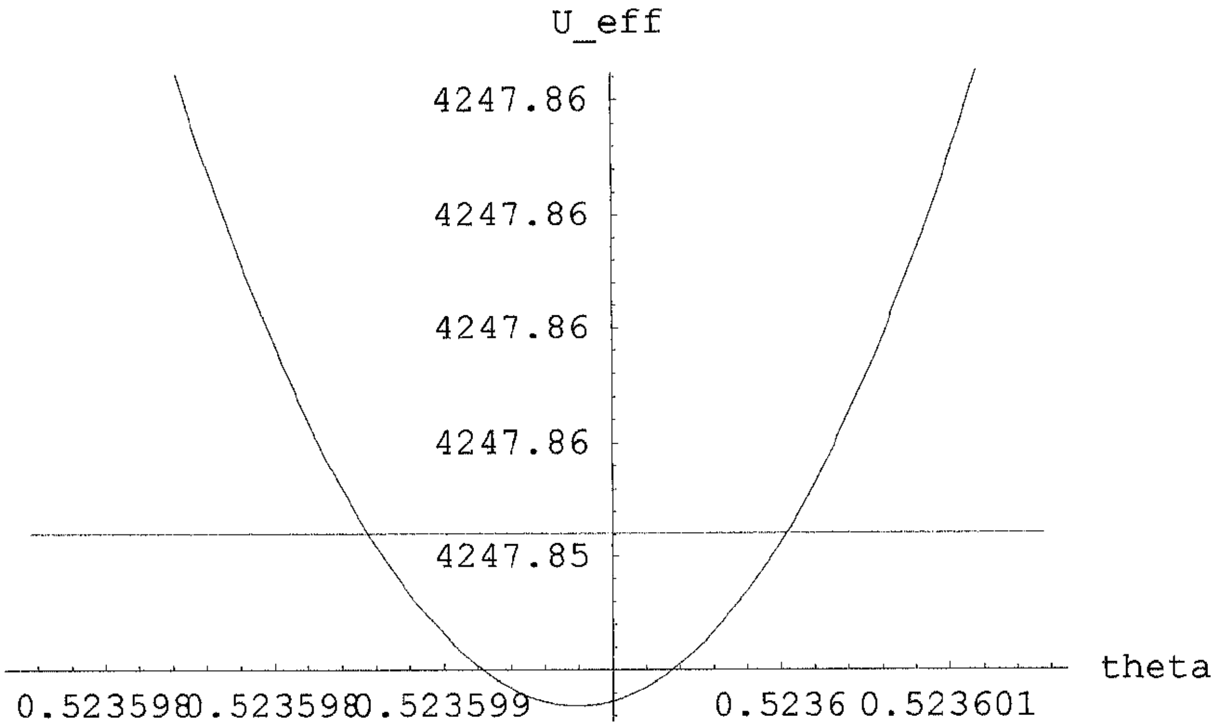
Anfangsbedingungen :

$\theta_0 = \pi/6$; $(\phi^{\cdot})_0 = 0$; $(\psi^{\cdot})_0 = 200\,\pi\, s^{-1}$; $(\theta^{\cdot})_0 = 0$;

Erhaltungsgroessen :

$L_z = 54650.4\, g\, \mathrm{cm}^2\, s^{-1}$; $L_3 = 63103.9\, g\, \mathrm{cm}^2\, s^{-1}$;
$E = 4247.85\, g\, \mathrm{cm}^2\, s^{-2}$

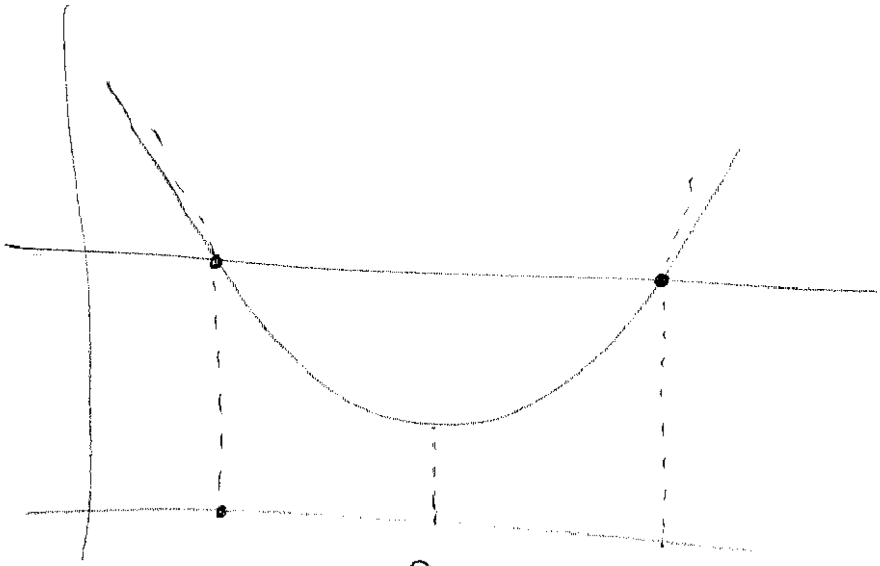




Quantitative Analyse

$$U_{eff} = U_{eff}(\vartheta_{min}) + \frac{1}{2}(\vartheta - \vartheta_{min})^2 \, U''_{eff}(\vartheta_{min}) + \dots$$

d.h. ϑ führt harmon. Schwingung um ϑ_{min} aus



$U_{eff}(\bar{\vartheta}) = E - J/2\,\dot{\vartheta}_0^2$ $\quad \vartheta_{min} \quad$ $U_{eff}(\underline{\vartheta}) = E - J/2\,\dot{\vartheta}_0^2$

$$J\,\ddot{\vartheta} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \vartheta} \approx -(\vartheta - \vartheta_{min})\, U''_{eff}(\vartheta_{min})$$

(auch direkt aus E.L.)

d.h. Harmonischer Oszillator

$x = \vartheta - \vartheta_{min} \qquad J\,\ddot{x} = -U'_{eff}(\vartheta_{min}) \cdot x$

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

$\omega = \sqrt{U'_{eff}(\vartheta_{min})/J}$ $\qquad$ Nutationskreisfreq.

$$A = (\underline{\vartheta} - \bar{\vartheta})/2$$

δ aus $\dot{\vartheta}_0 = -A\omega \sin\delta$

$$\vartheta = \vartheta_{min} + A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_2 - L_3\cos(A\cos(\omega t+\delta) + \vartheta_{min})}{J\cdot\sin^2(A\cos(\omega t+\delta))}$$ nicht konstant,

oszilliert um Mittelwert.

Unser Beispiel.

$\bar{\vartheta} = \vartheta_0 = \pi/6$

$\vartheta_{min} = \pi/6 + 0.00025$

$\rightarrow \quad \omega = 4930$

$\dot{\varphi}/\vartheta_{min} = 1.56198$

Raumfeste Überlegung

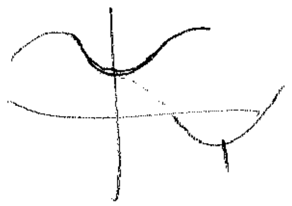
$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{|\vec{N}'|}{\cancel{2\pi}|\vec{L}'|\cdot\sin\alpha} \approx 1.56131$$

Der schlafende Kreisel

Sei zu Beginn $\vartheta = 0$, dann gilt

$$L_z = L_3 = J_3 \dot{\psi}_0$$

$$U_{eff} = \frac{(L_z - L_3 \cos\vartheta)^2}{2 J \sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta$$



kann in ϑ entwickelt werden

$$\cos\vartheta = 1 - \tfrac{1}{2}\vartheta^2 + \Theta(\vartheta^4)$$

$$\Rightarrow \quad U_{eff} = \frac{(J_3 \dot{\psi}_0)^2 \frac{1}{4}\vartheta^4}{2 J \vartheta^2} + mgl\left(1 - \vartheta^2/2\right) + O(\vartheta^4)$$

$$= mgl + \underbrace{\left(\frac{J_3^2 \dot{\psi}_0^2}{8 J} - \frac{mgl}{2} \right)}_{A} \vartheta^2$$

falls $A > 0$ ist $\vartheta = 0$ eine stabile Gleichgewichtsposition.

Falls durch die Reibung $\dot{\psi}$ kleiner wird, wird $\vartheta = 0$ instabil, der Kreisel "wacht auf" und 'präcediert' im durch U_{eff} gegebenen ϑ Bereich.