TP1: Klass. Mech. & math. Methoden der theor. Physik

→ www.thphys.uni-heidelberg.de/~hebecker/TP1/tp1.html

Vorbemerkungen

- "Klass. Mech.", auch "Theor. Mech." (alternativ: "Analyt. Mech.")
  → riesige Auswahl an Büchern & Skripten (Nutzen Sie das Web!)
- "Klassisch": Keine Quant.-mech. & keine spez. Rel.th.
- Mechanik hat die theor. Physik definiert (lange vor El.dyn., Thermodyn., Quant.mech. etc.)
- "Unser" Plan: $\underbrace{\text{Newt. Mech.}}_{\text{Sem. 1}} + \underbrace{\text{Lagrange/Hamilton-Mech., Thermodyn./Statistik, Mech. d. Kontinua}}_{\text{Sem. 2}}$
- Des Weiteren:

Mech. 1 – Mech. 2/TD/Stat. – ED/SRT – QM – TD/Quantenstatistik
1. 2. 3. 4 5. Sem.

Später z.B.: ART/Cosmo – QFT1 – QFT2 – Masterarbeit
6. $\underbrace{\text{7. \quad 8.}}_{\text{auch 5. + 6. Sem. möglich!}}$ 9./10. Sem.

↑ ebenso "volle" Pläne in anderen Spezialisierungen!

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{+ Th. Teilch.physik, SUSY, Strings, ...}}$

- Deshalb: Theor. Phys. schon ab 1. Sem. wichtig!
- Deshalb: Math. Methoden zentraler Teil von TP1/TP2/TP3 ···
  Trotzdem: lernen Sie Mathematik systematisch und tief von den Mathematikern!

- Detaillierte Inhalte von TP1/2 → Modulhandbuch
- Trotz aller Bemühungen syst. & logisch konsistent vorzugehen, trotz aller "Axiomatik": Physik lebt von Beispielen; Übungen wichtiger als Vorlesung!
- Ungeachtet dessen: Mitschreiben, Nacharbeiten, Jedes Wort & Vorzeichen verstehen!

1. Kinematik des Massepunktes

- Masse(n)punkt od. Punktmasse – selbstevidente aber entscheidende Abstraktion in th. Mech.
- Kinematik: Reine Beschr. d. Bew. – kein Diskussion d. Ursachen (→ Dynamik)

1.1 –"– in einer Dimension

Ort:

Geschw.: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$

Ort aus gegebener Geschw.: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \, v(t')$

M0: Grundbegriffe der Diff. & Integralrechnung (Math. Einschub)

- Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ ($\mathbb{R}$ – reelle Zahlen)
- Differentiation / Ableitung: $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- Bem.: – $dx \approx \Delta x$; $df \approx \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ bei "sehr" kleinem "Zuwachs" Δx.
  – Präziser: df ist der (in dx) lineare Teil des Zuwachses Δf.

- Damit ist $df \equiv f' \cdot dx$ und $\frac{df(x)}{dx}$ ist eigentlich nur eine Schreibweise.
- Es ist trotzdem oft nützlich, dx, df etc. wie oben beschrieben zu benutzen.

- Bem.: $f'(x)$ ist wieder Fkt. $\Rightarrow$ $f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ können analog zu $f'(x)$ definiert werden.
  $(x \mapsto f'(x))$

- Für die Praxis:
  - $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$ (Produkt- od. Leibnizregel)
  - $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Kettenregel)
  - $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ (Diff. d. inversen Fkt.)

- Bem.: $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$; $f^{-1} : x = f(y) \longmapsto y$

- Begründung zum Diff. inv. Fkt.-en:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(f(y))} = \frac{dy}{f'(y)\,dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- Beispiele:
  - $(x^x)' = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x\ln x})' \underset{K.}{=} (e^{x\ln x})(x\ln x)'$
    $\underset{L.}{=} (e^{x\ln x})(\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1).$
  - $\arctan'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(y)}$; $y = \tan^{-1}(x)$

$$\tan'(y) = \left(\sin y \cdot \frac{1}{\cos y}\right)' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y \left(\frac{1}{\cos y}\right)'$$

$$= 1 + \sin y \left(-\frac{1}{\cos^2 y}\right)(-\sin y) = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Integration $\int^y f(x)dx = F(y)$; $F'(y) = f(y)$

oder $\frac{d}{dy}\left(\int^y f(x)\,dx\right) = f(y)$

oder $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

sowie $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$

"Fund./Hauptsatz d. Analysis/ Diff. & Int.rechn."

- Für die Praxis: • $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ (part. Int.)

oder, in eindeutigerer Notation

$$\int^y f(x)g'(x)dx = f(y)g(y) - \int^y f'(x)g(x)dx$$

bzw. $$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(b)g(b) - f(a)g(a)\right] - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- $$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dy}\,dy = \int f(x(y))\,x'(y)\,dy$$

(Var. subst.)

bzw. $$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy \quad ; \quad y = g(x)$$

- Beispiele: • $\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x(\ln x - 1)$

  • $\int x\cdot e^{x^2}dx = \int e^{x^2}\frac{1}{2}\,d(x^2) \underset{\underset{x^2=y}{\uparrow}}{=} \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$

M0

Wir hatten: $x(t)$; $v(t) = \dot{x}(t)$ [Wir benutzen "$(\cdot\cdot)^{\cdot}$" so wie "$(\cdot\cdot)'$", aber speziell für Abl. nach der Zeit]

Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

Bsp.: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2$; $v(t) = v_0 + a_0 t$; $a(t) = a_0$

- Umkehrung durch Integration: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$.

  (Man prüft leicht, dass $\dot{x}(t) = v(t)$ und dass es keine andere Fkt. $\tilde{x}(t)$ mit $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$ und $\tilde{x}(t_0) = x_0$ gibt.)

- Analog: $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')dt'$

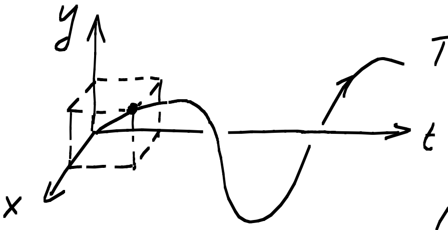
- Bsp.: $a(t) = a_0$; $t_0 = 0$; v_0 und x_0 beliebig

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0\, dt' = v_0 + a_0 t \quad ; \quad x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t')dt'$$

$$= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 .$$

1.2 Kinematik des Massenpunktes in mehreren Dim.en

Zunächst 2 Dim.:

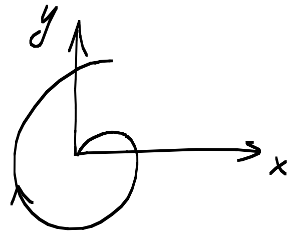


Trajektorie od. Bahnkurve, beschrieben durch $x(t)$, $y(t)$

(z.B.: $x(t) = v_0 t \sin \omega t$

$y(t) = v_0 t \cos \omega t$.)

Darst. in x-y-Ebene:
(Raumkurve)



t wächst

> Mit den Begriffen "Trajektorie", "Bahn-", "Raumkurve" folgen wir Scheck. Diese Begr. sind nicht völlig universell.

Jetzt 3 Dim.: Traj. bestimmt durch $x(t), y(t), z(t)$

oder, äquivalent, $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$

$$x(t) \equiv x^1(t),\quad y(t) \equiv x^2(t),\quad z(t) \equiv x^3(t)$$

Dementsprechend: $v^i(t) = \dot{x}^i(t)$; $a^i(t) = \dot{v}^i(t)$

(für $i = 1,2,3$).

Eine angemessenere math. Beschreibung nutzt <u>Vektoren</u>.

M1: Vektorraum

Def: Menge V, auf der Addition (+) und Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}$ def. ist, so dass:

($+ : V \times V \to V$; Mult.: $\mathbb{R} \times V \to V$; "$V \times V$" – Produktmenge $\equiv$ Menge aller Paare.)

- $v+(w+u) = (v+w)+u$; $(u,v,w,\ldots \in V)$ – Assoz.
- $v+w = w+v$ – Kommut.
- $\exists\, 0 \in V$ so dass $v+0 = v$ $\forall v \in V$ – Null
- $\forall v \in V$ $\exists -v \in V$ so dass $v+(-v) = 0$ – Inverses
- $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$; $\alpha,\beta,\ldots \in \mathbb{R}$ – Distr. (der Mult. bzgl. der Add. in V)
- $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ – Distr. (der Mult. bzgl. der Add. in $\mathbb{R}$)
- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ – "Assoz."
- $1 \cdot v = v$ – Mult. mit Eins

Bsp.: • $\mathbb{R}$ mit 0 als "Vektorraum-Null" und gewöhnl. Add.

- Zahlentupel aus n Zahlen: $V = \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n),\ x^i \in \mathbb{R}\}$
  - Bequeme Notation: $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ (auch: $\vec{x}$)

    $\bar{y} = (y^1, \ldots, y^n)$ etc.
  - Naheliegenderweise:

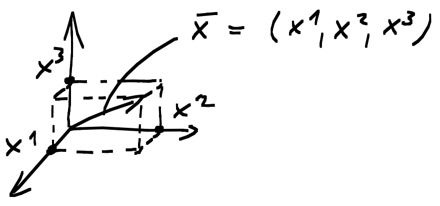
$$\bar{x} + \bar{y} \equiv (x^1+y^1, \ldots, x^n+y^n)$$

$$\bar{0} \equiv (0, \ldots, 0)$$

$$\alpha\bar{x} \equiv (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)$$

  - Axiome leicht zu prüfen.

- Für $n=2$ und 3 kann man die so def. Vektoren offensichtlich mit "Pfeilen" in 2 und 3 Dim. (mit fest geg. rechtwinkligen Koord. Syst.) identifizieren:



M1

Eine Trajektorie ist nun eine Abb $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \bar{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$$

Entsprechend: $\bar{v}(t) = \dot{\bar{x}}(t)$, $\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{\bar{x}}(t)$

- Dies setzt die folgende allgemeinere Def. der Ableitung vektorwertiger Fkt.-en voraus:

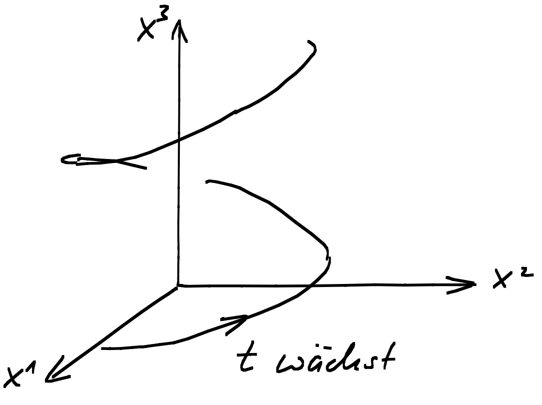
$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\bar{y}(x+\Delta x) - \bar{y}(x)}{\Delta x}$$

(Es folgt leicht dass z.B. $\bar{y}\,'(x) = (y^{1\prime}(x), \cdots, y^{n\prime}(x))$

$\dot{\bar{x}}(t) = (\dot{x}^1(t), \cdots, \dot{x}^3(t))$ etc.)

- Beispiel: $\bar{x}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, v_0 t)$ $\qquad t_0 = 0$

$$\bar{v}(t) = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0)$$
$$\bar{a}(t) = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0) = -R\omega^2\cdot(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$$



- Bem.: $\bar{x}$, $\bar{v}$, $\bar{a}$ leben in verschiedenen Vektorräumen.

(Allein schon aus "Dimensionsgründen": $[x] = m$, $[v] = \frac{m}{s}$, .. . Dies hängt am "Δt" im Grenzwert, welches dimensionsbehaftet ist.)

- Wie auch in einer Dim., können wir aus $\bar{a}(t)$ auf $\bar{v}(t)$ & $\bar{x}(t)$ schließen:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \int_{t_0}^{t} dt'\bar{a}(t')$$
$$= \left(v_0^1 + \int_{t_0}^{t} dt' a^1(t), .., ..\right)$$

- Wir nehmen obiges Beispiel mit $t_0 = 0$ und somit $\bar{v}_0 = (0, R\omega, v_0)$.

$$\bar{v}(t) = (0, R\omega, v_0) + \int_0^t dt'(-R\omega^2)\cdot(\cos\omega t', \sin\omega t', 0)$$
$$= (0, R\omega, v_0) - R\omega^2\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t', -\frac{1}{\omega}\cos\omega t', 0\right)\Big|_0^t$$

$$= (0, R\omega, v_0) - R\omega \left\{ (\sin\omega t, -\cos\omega t, 0) - (0, -1, 0) \right\}$$

$$= \left(0 - R\omega \sin\omega t \,,\ R\omega + R\omega\cos\omega t - R\omega \,,\ v_0 - 0 + 0 \right)$$

$$= (-R\omega\sin\omega t \,,\ R\omega\cos\omega t \,,\ v_0) \quad \checkmark$$

- Analog folgt $\bar{x}(t)$ aus $\bar{v}(t)$ (mit $\bar{x}_0 = (R, 0, 0)$).
- Bem.: Man kann sich Integrale über Vektoren auch direkt als Riem. Summen denken:

$$\int_{t_0}^{t} \bar{v}(t)dt = \lim_{N\to\infty} \left[\bar{v}(t_0)\Delta t + \bar{v}(t_0+\Delta t)\Delta t + \dots + \bar{v}(t-\Delta t)\Delta t \right]$$

$$\text{mit } \Delta t = \frac{t-t_0}{N}$$

- Bem.: Zur Interpretation ist es wünschenswert, wieder zu nicht-vektoriellen („skalaren") Größen zurückzukehren zu können, deshalb:

M2 Skalarprodukt

Eine Abb. $\begin{array}{l} V\times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \longmapsto v\cdot w \end{array}$ mit $\begin{array}{l} v\cdot w = w\cdot v \quad \& \\ (\alpha u + \beta v)\cdot w = \alpha\, u\cdot w + \beta\, v\cdot w \end{array}$

heißt <u>symmetrische Bilinearform</u>. Sie heißt positiv-semidefinit falls $v\cdot v \geq 0$. Sie heißt pos. definit falls außerdem

$$v\cdot v = 0 \implies v = 0 .$$

„Skalarprodukt" wird oft synonym mit „pos. def. symm. Bilinearform" benutzt (manchmal auch mit etwas schwächeren Forderungen).

Wir definieren die Norm (Länge) eines Vektors als $|v| = \sqrt{v\cdot v} = \sqrt{v^2}$

Wir brauchen im Moment nur $\mathbb{R}^n$ mit $\bar{x}\cdot\bar{y} \equiv x^1y^1 + \dots + x^ny^n$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^iy^i \equiv \underbrace{x^iy^i}. \quad \text{Außerdem: } |\bar{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Die hier implizite Summation über den zweimal auftretenden Index „i" nennt man „Einsteinsche Summenkonvention".

[Anderes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\bar{x}\cdot\bar{y} \equiv 7x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n$.
Andere Bilin.form (nicht pos. def.) auf $\mathbb{R}^2$: $\bar{x}\cdot\bar{y} = x^1y^1 - x^2y^2$.]

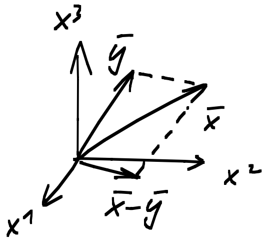
M2

- Der anschauliche "Abstand" zwischen zwei Raumpunkten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ist

$$|\bar{x}-\bar{y}| \equiv \sqrt{(\bar{x}-\bar{y})\cdot(\bar{x}-\bar{y})} = \sqrt{(\bar{x}-\bar{y})^2} = \sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+(x^3-y^3)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i-y^i)^2} = \sqrt{(x^i-y^i)(x^i-y^i)} = \sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2-2\bar{x}\cdot\bar{y}}$$

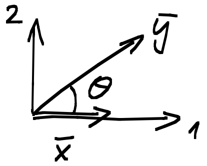
$$= \sqrt{|\bar{x}|^2+|\bar{y}|^2-2|x||y|\cos\theta}$$



(wichtig: Der Pfeil fängt stets bei 0 an.)

Hier haben wir ausgenutzt, dass $\bar{x}\cdot\bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}|\cos\theta$, was man auch als Def. des Skalarproduktes von (geometrisch definierten) Vektoren nehmen könnte. In unserem Zugang ist das beweisbedürftig.

Wir beschränken uns auf den Spezialfall $\bar{x} = (x^1, 0, 0)$, $\bar{y} = (y^1, y^2, 0)$



$$\bar{x}\cdot\bar{y} = x^1y^1 \quad ; \quad \cos\theta = y_1/|\bar{y}| \quad ; \quad |\bar{x}| = x^1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}\cdot\bar{y} = |\bar{x}||\bar{y}|\cos\theta \,.$$

(Dass dies auch für beliebige Vektoren $\bar{x}, \bar{y}$ gilt wird später klar werden, falls es nicht jetzt schon offensichtlich ist.)

- Für uns ist speziell der infinitesimale Abstand $|d\bar{x}|$, der zu einem kleinen Zeitintervall dt gehört interessant:

$$d\bar{x} = (dx^1, dx^2, dx^3) = \left(\frac{dx^1}{dt}dt, \dots, \dots\right) = (v^1dt, \dots)$$

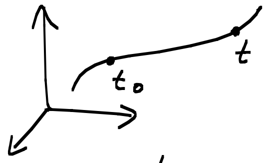
$$= (v^1, v^2, v^3)dt = \bar{v}\,dt$$

(Oder, viel knapper: $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}$ nach Def.)

$$d\bar{x}^2 = |d\bar{x}|^2 = |\bar{v}|^2 dt^2 \quad ; \quad |d\bar{x}| = |\bar{v}| dt \, .$$

1.3 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

- Wir können $|d\bar{x}|$ entlang $\bar{x}(t)$ "aufaddieren" und so die Länge eines Teils der Trajektorie bestimmen ("Bogenlänge"):

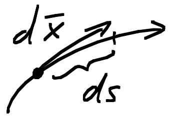


$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |d\bar{x}| = \int_{t_0}^{t} dt' \left| \frac{d\bar{x}}{dt'} \right| = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{\dot{\bar{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{\bar{v}(t)^2}$$

- $\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = |\bar{v}|$

- Zumindest im Prinzip können $s(t) = s$ nach t auflösen, also $t = t(s)$ schreiben, und somit $\bar{x}(s) \equiv \bar{x}(t(s))$. Diese Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge s ist oft nützlich.

- z.B. ist $\bar{T}(s) = \frac{d\bar{x}(s)}{ds}$ der Tangentenvektor. $(\bar{T} \parallel \bar{v})$



$$|\bar{T}| = \left| \frac{\bar{v}\, dt}{|\bar{v}| dt} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \cdot \bar{T} = 1$$

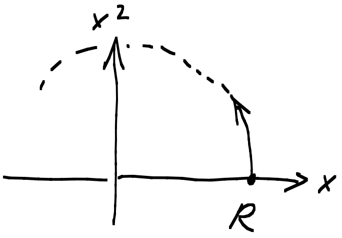
$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d}{ds}(\bar{T} \cdot \bar{T}) \underset{\uparrow}{=} \frac{d\bar{T}}{ds} \cdot \bar{T} + \bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} = 2\, \bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds}$$

prüfen Sie dies anhand von $\bar{T}\bar{T} = T^1T^1 + \dots + T^3T^3$ nach!

- $\rho = \frac{1}{\left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|}$ heißt Krümmungsradius der Bahn

und $\bar{N} = \dfrac{(d\bar{T}/ds)}{|d\bar{T}/ds|} = \rho \cdot \dfrac{d\bar{T}}{ds}$ heißt Normalenvektor.
(auch Hauptnormalenvektor)

- Beispiel: (in 2 Dim.) $\bar{x}(t) = R\,(\cos\omega t, \sin\omega t)$



$$\bar{v}(t) = R\omega\,(-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(R\omega)^2\,(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = R\omega$$

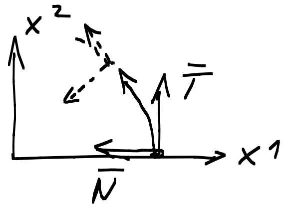
$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} dt'\,|\bar{v}| = R\omega t$$

$$t(s) = s/R\omega$$

$$\bar{x}(s) = R\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right) \quad ; \quad \bar{T} = \frac{d\bar{x}}{ds} = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right)$$

$$\rho = R \quad ; \quad \bar{N} = -\left(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}\right)$$



Bem: I.A. variiert ρ natürlich entlang der Bahn.

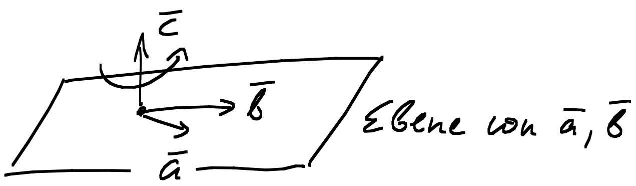
Bem: Speziell in 3 Dim.-en, existiert auch eine Abb. $V \times V \to V$,
$(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$,
die man Vektorprodukt od. Spatprodukt od. Kreuzprodukt nennt.
Sie ist definiert durch

$$c_i = (\bar{a} \times \bar{b})_i = \sum_{j=1..3} \sum_{k=1..3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k \quad \text{mit}$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1,$$

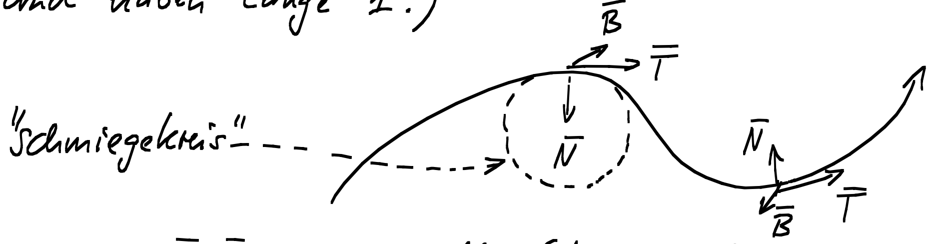
sonst Null (also $\varepsilon_{ijk} = 0$ falls zwei Indizes gleich).

Alternativ ist $\bar{c}$ definiert durch $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\theta$, wobei die Richtung von $\bar{c}$ durch $\bar{c} \perp \bar{a}$ & $\bar{c} \perp \bar{b}$ (also $\bar{a}\cdot\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c} = 0$) definiert ist. Zusätzlich wird gefordert, dass $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ein "Rechtssystem" bilden:



$\bar c$ zeigt in die Bewegungsrichtung einer Rechtsschraube, die der Drehung von $\bar a$ nach $\bar b$ entspricht.

Man nennt $\bar B = \bar T \times \bar N$ den Binormalenvektor und $\bar T, \bar N, \bar B$ das begleitende Dreibein. (Diese drei Vektoren sind orthogonal und haben Länge 1.)



$\bar T, \bar N$ spannen die Schmiegeebene auf.

Zur Info:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar T}{ds} &= \frac{1}{\rho}\bar N \\ \frac{d\bar B}{ds} &= -\frac{1}{\sigma}\bar N \\ \frac{d\bar N}{ds} &= \frac{1}{\sigma}\bar B - \frac{1}{\rho}\bar T \end{aligned}\right\}$$

"Frenet'sche Formeln"

(σ ist der durch die 2. Gl. definierte Torsionsradius, $\frac{1}{\sigma}$ die Torsion, $\frac{1}{\rho}$ die Krümmung)

Mehr dazu in Scheck, 1.2 ...

(Die tiefere math. Bedeutung von ε_{ijk} ("Levi-Civita-Symbol") und des Vektorproduktes wird später noch ausführlich diskutiert.)

Nachtrag: Ideen zur Berechnung von Grenzwerten:

1) "$\frac{0}{0}$" ⇒ L'Hospital: Falls $\lim_{x\to x_0} f, g = 0$ & $\lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$ existiert,

gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'}{g'}$

2) "$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt (\& mon. wachs.)}} = 0$", z.B. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

3) "Kürzen": $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+x}{3x^3+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x+1/x^2}{3+1/x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$.