2 Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik

2.1 Newtonsche Axiome

Es geht uns jetzt um Dynamik, als um die Ursachen der Bewegungen, die zu beschreiben wir in Kap. 1 gelernt haben. Genauer: Ursachen der Bewegungs<u>änderung</u>.

- Ursache der Bewegungsänderung: Kraft (quantifiziert durch Vektor $\bar{F} = (F^1, F^2, F^3)$)
- Bsp.: Muskelkraft, Federkraft, Kraftfeld

Newtonsche Axiome

(I) $\exists$ Inertialsysteme, also Koord.systeme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft angreift ruht od. sich geradlinig gleichförmig bewegt: $\ddot{\bar{x}} = 0$.

(II) In solchen Systemen gilt: $\bar{F} = m\ddot{\bar{x}}$ $\quad (\bar{F} = m\bar{a})$

(III) Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt: $1 \bullet \underset{\bar{F}_{21}}{\overset{\bar{F}_{12}}{\rightleftarrows}} \bullet 2$

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$

($\bar{F}_{12}$ ist die Kraft auf 1, ausgehend von 2)

Kommentare:

- (I) kann als Spezialfall von (II) angesehen werden
- (II) ist <u>nicht</u> die Def. von $\bar{F}$. $\bar{F}$ muss unabhängig bekannt sein.
  Beispiele dafür:
  - Federkraftmesser
  - Kraftfeld, durch Bewegung eines Probekörpers vermessen
  - durch (III)

- (II) definiert die (träge) Masse eines Körpers
- Die entscheidende phys. Aussage von (II) ist das Auftreten der <u>ZWEITEN</u> Ableitung ($\ddot{\bar{x}}$, und <u>nicht</u> $\dot{\bar{x}}$ oder $\dddot{\bar{x}}$).

- Eine alternative (und in einiger Hinsicht tiefere) Diskussion der obigen "Axiomatik" findet sich in Jose/Saletan, Kap. 1.2. Dort wird insbesondere die Kraft gemäß (II) definiert. Es bleibt aber dabei, dass in vielen Fällen $m\ddot{\bar{x}}$ a priori bekannt ist und also $\ddot{\bar{x}}$ aus (II) folgt.

<u>Entscheidender Zusatz:</u> Kräfte (z.B. zwei unabhängig und gleichzeitig auf eine Punktmasse wirkende Kräfte) addieren sich als Vektoren:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad ; \quad \bar{F} = m\ddot{\bar{x}}.$$

- Um zu verstehen, wie wir von $\bar{F} = m\ddot{\bar{x}}$ (bei gegebenem $\bar{F}$, z.B. in Form eines Kraftfeldes $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x}, t)$) zur Trajektorie $\bar{x}(t)$ kommen, brauchen wir:

<u>M3: Differentialgleichungen</u>

- Wir besprechen nur <u>gewöhnliche</u> Dgl.-en (d.h. es wird nur nach <u>einer</u> reellen Variablen, z.B. $x \in \mathbb{R}$, differenziert.) Zu partiellen Dgl.-en (mit Ableitungen nach versch. Variablen) kommen wir erst viel später).

- <u>Gew. Dgl. 1. Ordnung</u> (nur <u>erste</u> Abl. kommt vor)

$$y'(x) = f(x, y)$$

Lösung: Fkt. $y: x \mapsto y(x)$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$

(für $x \in \underbrace{(a,b)}_{"I"} \subset \mathbb{R}$, also x aus einem gewissen Intervall I)

- Präziser: <u>Anfangswertproblem</u>

  – Dgl. $y'(x) = f(x,y)$

  – Anfangsbedingung: $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

  <u>Gesucht:</u> $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für $x \in I$ (wobei natürlich auch $x_0 \in I$).

- Es gibt eine Reihe von Theoremen, die Existenz (oder Existenz und Eindeutigkeit) von Lösungen des Anf.wertproblems garantieren. Insbesondere sind Existenz u. Eindeutigkeit gesichert, wenn $f(x,y)$ und die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ stetig sind. Wir werden uns nur für Fälle interessieren, in denen Ex. & Eind. gesichert sind.

- <u>Wichtiger Kommentar:</u> Wir benutzen ab sofort auch Fkt.-en mehrer Variablen. z.B. ist $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine solche Fkt.

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

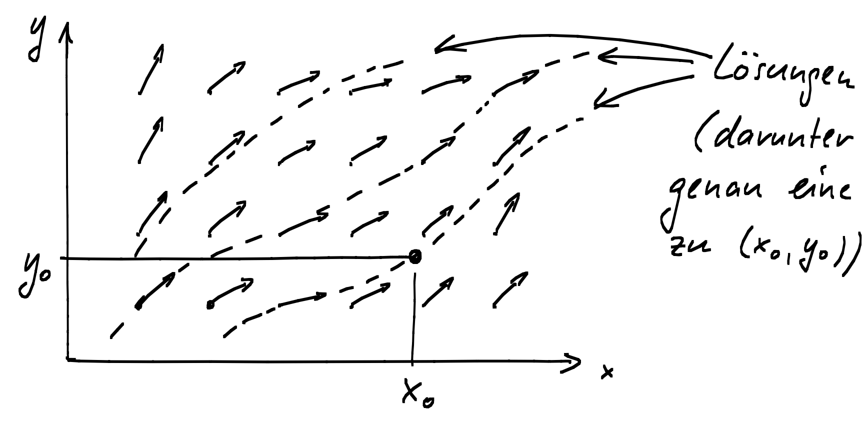
Partielle Ableitungen sind z.B. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$

und berechnen sich genauso wie normale Ableitungen, wobei die "andere(n)" Variablen wie Konstanten zu behandeln sind. Bsp.:

$$f(x,y,z) = x^2 + yz \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = z \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = y .$$

<u>Zur Anschauung:</u>

An jedem Pkt. (x,y) wird ein Vektor der Richtung $(1, f(x,y))$ eingezeichnet:

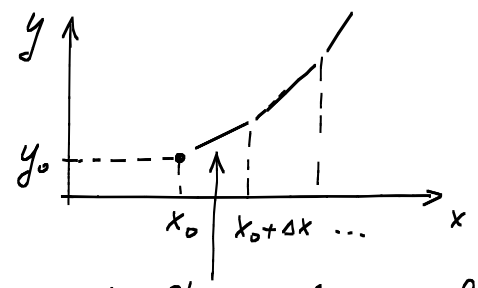


Die Graphen der Lösungen folgen dem "Richtungsfeld" im Bild weil

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(x,y) = \frac{f(x,y)}{1} ,$$

d.h. die Steigung des Graphen entspricht an jedem Pkt. der Richtung des eingezeichneten Vektors. Es ist jetzt anschaulich klar, dass es für hinreichend "glatte" Richtungsfelder eindeutige Lösungen geben wird.

- Man kann sich Existenz & Eindeutigkeit auch vorstellen, indem man an eine "stückchenweise" (numerische) Konstruktion denkt:



1) Steigung bei x_0: $f(x_0, y_0) \Rightarrow$ Näherung f. $y(x_0+\Delta x)$

2) Steigung bei $x_0+\Delta x$: $f(x_0+\Delta x, y(x_0+\Delta x_0))$

$\Rightarrow$ Näherung f. $y(x_0+2\Delta x)$

3) ... etc. ...

- <u>Beispiele</u>: 1) $y'(x) = f(x,y)$ mit $f(x,y) = 3$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int 3\,dx = 3x + C \quad \text{(allg. Lsg.)}$$

Jetzt lösen wir das Anf.wertproblem mit $(x_0, y_0) = (-1, 1)$:

$$y = 3x + C \Rightarrow 1 = 3(-1) + C \Rightarrow C = 4 \Rightarrow \underline{y(x) = 3x+4}$$

2) "Separation der Variablen": $f(x,y) = \frac{x}{y}$, also $y'(x) = \frac{x}{y(x)}$.

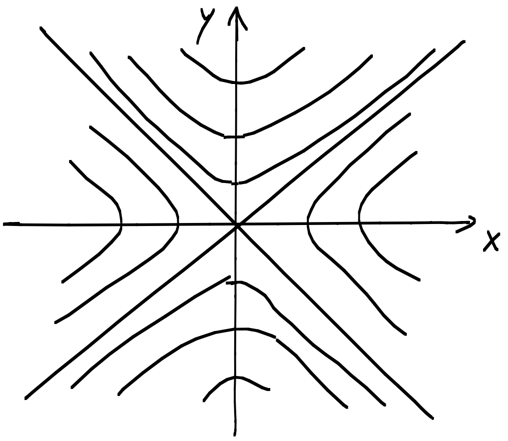
Wir schreiben: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$ (Var. sind getrennt!)

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2+2C}$$

(allg. Lsg.)

Jetzt lösen wir das Anfangswertproblem für (x_0, y_0) (allgemein):

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \Rightarrow 2c = y_0^2 - x_0^2 \Rightarrow y = \sqrt{y_0^2 + (x^2 - x_0^2)}\ , \ y_0 > 0$$
$$y = -\sqrt{y_0^2 + (x^2 - x_0^2)}\ , \ y_0 < 0$$



<u>Bem.:</u> Diese "Sep. d. Var." funktioniert stets, wenn $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$.

<u>Zurück zur allg. Diskussion:</u>

Das oben über allg. Lsg., Anfangswertproblem, Ex. & Eind. gesagte überträgt sich sofort auf <u>Systeme von gew. Dgl.-en 1. Ordn.:</u>

$$\frac{dy^1(x)}{dx} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$
$$\dots$$
$$\frac{dy^n(x)}{dx} = f^n(x, y^1, \dots, y^n)$$

oder, in Vektorschreibweise: $\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y})$.

(beachte: $\bar{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

Die Anfangsbed. ist jetzt $(x_0, \bar{y}_0)$. Dies sind $n+1$ Parameter, von denen aber einer bloß der Verschiebung entlang ein und derselben Lösung entspricht. Somit hat die allg. Lösung $(n+1) - 1 = n$ Param. od. "Integr.konstanten".

- Außerdem können wir auch sofort auf <u>(Systeme von) gewöhnlichen Dgl.-en der Ordnung p verallgemeinern:</u>

$$\bar{y}^{(p)}(x) = \bar{f}(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \dots, \bar{y}^{(p-1)}). \qquad \left(\bar{y}^{(p)} = \frac{d^p \bar{y}(x)}{dx^p}\right)$$

- Als Anf. bed. brauchen wir jetzt $(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}_0', \cdots, \bar{y}_0^{(p-1)})$.

  Dies ist der geforderte Wert von $\bar{y}'(x)$ bei $x = x_0$, etc.

- Wichtige Tatsache: Systeme von Dgl.-en lassen sich auf größere System niedrigerer Ordnung zurückführen. Wir illustrieren das an einem Bsp.:

$\bar{y}'' = f(x, \bar{y}, \bar{y}')$ äquivalent zu: $\bar{z}' = f(x, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{y}' = \bar{z}$

n Gl.-en 2. Ordn. — $2n$ Gl.-en 1. Ord.

(Die ursprüngliche Form folgt sofort, indem man $\bar{z} = \bar{y}'$ in die erste Vektor-Gl. einsetzt.)

- Daraus ergibt sich insbes. die Ex. & Eind. von Lösungen Dgl.-en höh. Ordnung und die Art der Anf. bed. Z.B. kann man mit obiger Methode n Gl.-en der Ordn. p in $(n \cdot p)$ Gl.-en der Ordn. 1 umwandeln. Die allg. Lsg. dazu hat $(n \cdot p)$ Parameter, ebenso das urspr. System der Ordn. p. Z.B. hat eine Gl. vom Grad 2 eine zwei-parametrige Schar von Lösungen, wie wir noch im Detail sehen werden.

M3

2.2 Erste phys. Beispiele

- Der für eine Punktmasse relevante Fall der obigen Dgl.-Diskussion ist ein System von 3 Dgl.-en 2. Ordn.:

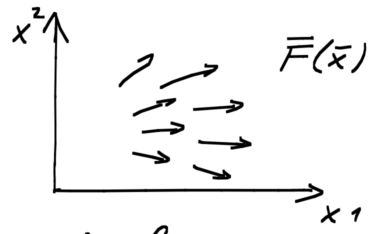
$$\ddot{\bar{x}} = \frac{1}{m} \bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$$

oder das entspr. System von 6 Dgl.-en 1. Ordn.:

$$\dot{\bar{v}} = \frac{1}{m} \bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, t)$$
$$\dot{\bar{x}} = \bar{v}$$

- In vielen interess. Fällen kann man annehmen, dass $\bar{F}$ nicht von $\bar{v}$, t abhängt. Wir sprechen dann von einem (zeitunabh.) <u>Kraftfeld</u> $\bar{F}(\bar{x})$.

(Wir haben solche "vektorwertigen Fkt.-en" oben schon benutzt. <u>Hier</u>: Abb.: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wobei insbes. der Zielraum als Vektorraum zu sehen ist. Dies ist ein <u>Vektorfeld</u>. Bildlich, in 2D:

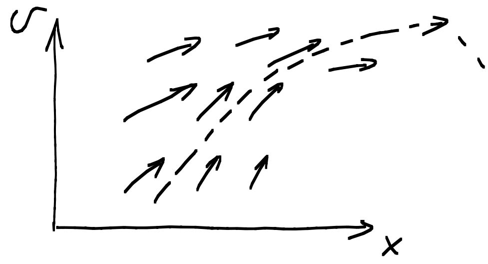


Die Neuerung ist nicht all zu groß, da es im Grunde nur 3 Fkt.-en von je 3 Var. sind: $F^1(x^1, x^2, x^3), \dots, \dots$.)

- Speziell für $D=1$ haben wir im "Kraftfeld-Fall":

$$\dot{v} = F(x)/m$$
$$\dot{x} = v$$

Wir können jetzt den aktuellen Bew.zustand der Pkt.masse in einem v-x-Diagramm darstellen. Die Änderung dieses Zustandes wird durch den 2D-Vektor $\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} F(x)/m \\ v \end{pmatrix}$.



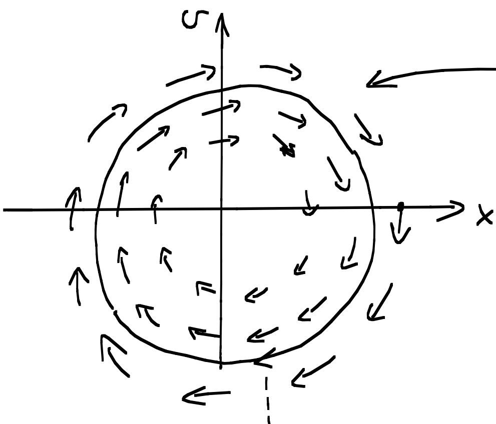
Bei geg. Startpkt. ist eine solche Kurve stets (durch das Vektorfeld!) definiert. Sie beschreibt die Bewegung im "Phasenraum" (v, x) [eigentlich $(p = mv, x)$].

- Das ganze geht völlig analog in 3D, aber die Darstellung des Vektorfeldes $(\bar{F}/m, \bar{v})$ im zugehörigen 6D-Phasenraum $(\bar{v}, \bar{x})$ bzw. $(\bar{p}, \bar{x})$ ist natürlich schwierig.

- Es ändert sich nichts, wenn wir $\bar{v}$-Abh. zulassen: $\bar{F}(\bar{x}) \to \bar{F}(\bar{x}, \bar{v})$. Nur bei t-Abh. wird's schwieriger, da sich das "Vektorfeld" jetzt zeitlich ändert.

- Als konkretes (wieder 1D) Bsp.: <u>Harm. Oszillator</u>

$F(x) = -kx$; Wir setzen $k = m = 1$; $\dot{v} = -x$
$\dot{x} = v$



Feld der Vektoren $(-x, v)$

(<u>Beachte</u>: An jedem Pkt. ist dieser Vektor orthog. zum Vektor (v, x), der diesen Punkt definiert.)

eine Beispiel-Trajektorie

(Die vertrauten Oszillationen in x & v lassen sich sofort ablesen.)

- <u>Nächstes Bsp.</u>: Freier Fall mit Luftwiderstand $F_R = -cv^2$.
  Aufg.: Bestimme zeitl. Entw. der Geschw. wenn Körper im Schwerefeld losgelassen wird.

<u>Lsg.</u>: • Problem eindimensional ; x wachse nach unten, Start bei $t = 0$, $x = 0$ mit $\dot{x} = 0$.

- $F = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; mg - cv^2 = m\dot{v}$

$$\dot{v} = x$$

(2 Gl.-en 1. Ordn.)

- erste Gl. enthält kein x und kann unabh. gelöst werden:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v^2$$

- Sep. d. Var.: $$dt = \frac{dv}{g - \frac{c}{m} v^2}$$; Redef: $t' = t/\hat{t}$; $v' = v/\hat{v}$
  mit $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}$; $\hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$

$$\Rightarrow \quad dt' = \frac{dv'}{1 - v'^2} = \frac{dv'}{2}\left(\frac{1}{1+v'} + \frac{1}{1-v'}\right)$$

$$2t' = \ln(1+v') - \ln(1-v') + \text{const.}$$

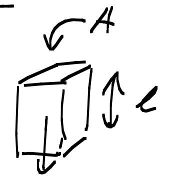
$\left[v' = 0 \text{ bei } t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{const.} = 0 \right]$

Jetzt Auflösen nach v: $\quad e^{2t'} = \frac{1+v'}{1-v'}$; $\quad e^{2t'} - v' e^{2t'} = 1 + v'$

$$v' = \frac{e^{2t'} - 1}{e^{2t'} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1}$$

$$v = \hat{v}\left(1 - \frac{2}{e^{2t/\hat{t}} + 1}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}} \; ; \quad \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

(Man überlegt sich leicht, dass $c \sim \rho_L \cdot A$.



Und zwar a) aus Dim.-gründen, also weil

$[c] = \frac{kg}{m}$ und c nur von ρ_L & A abhängen kann.

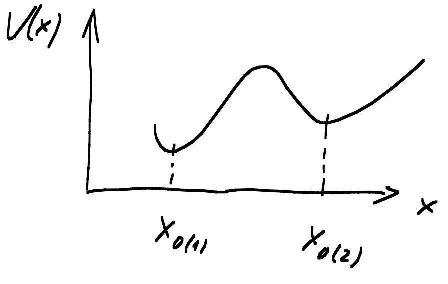
b) weil $F_R \cdot l \sim E_{kin,\,Luft} = \rho_L \cdot l \cdot A \cdot \frac{v^2}{2}$.)

2.3 Harmonischer Oszillator

- Wir beschränken uns zunächst auf $d = 1$ und eine Kraft $F = F(x)$. Wir schreiben $F(x) = -\frac{d}{dx} V(x) = -V'(x)$. [Das somit als Stammfkt. von $-F$ definierte V ist natürlich die "potentielle Energie", aber das brauchen wir jetzt noch nicht.]

- Unser Massenpkt. kann nur an Orten ruhen, an denen $F = 0$ bzw. $V' = 0$. Genauer: Nur an den Minima (Die Maxima sind "instabil").

- Wir wollen jetzt "kleine" Bewegungen in der Nähe eines solchen Minimums von $V(x)$ untersuchen. Dazu brauchen wir eine einfache Beschreibung von $V(x)$ bei $x \approx x_0$. Dazu:



M4: Taylor-Reihe

Sei $x_0 = 0$. Wir wollen also das Verhalten einer bel. (glatten) Fkt. $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ verstehen. Es gilt

$$f(x) = f(0) + \underbrace{\int_0^x dx'\, f'(x')}_{f'(x')(x'-x)\Big|_0^x \;-\; \int_0^x dx'\, f''(x')(x'-x)}$$

$$= f'(0)\cdot x \qquad \underbrace{\int_0^x dx'\, f''(x')(x'-x)}_{-\,f''(x')\frac{(x'-x)^2}{2}\Big|_0^x \;+\; \int_0^x dx'\, f'''(x')\frac{(x'-x)^2}{2}}$$

$$= f''(0)\frac{x^2}{2} \qquad + \qquad \underbrace{\int_0^x dx'\, f'''(x')\frac{(x'-x)^2}{2}}_{\ldots}$$

[usw. (also immer wieder partiell int.-en)

Also:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{m} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \underbrace{\int_0^x dx'\, f^{(m+1)}(x')\frac{(x'-x)^m}{m!}}_{\text{"Restglied"}}$$

Falls Restglied $\to 0$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

oder (nach völlig analoger Rechnung)

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

(Für uns besteht der Sinn natürlich darin, dass oft die ersten Terme eine gute Näherung sind.)

(In vielen Fällen wird das Restglied mit $m \to \infty$ gegen Null gehen. Achtung: Dies gilt nicht für alle glatten Fkt.-en. Z.B. nicht für

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

wie man schon daran sieht, das alle Ableitungen bei Null verschwinden:

$$\frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0 .$$ Die Taylor-Reihe gibt also Null!)

(Die Verallg. auf Fkt.-en vieler Variabler wird uns später mühelos gelingen.)

M4

Unsere Anwendung war $V(x)$ bei x_0 (mit $V'(x_0) = 0$).

Also:

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2$$

bzw.

$$F(x) \approx -V''(x_0) \cdot (x-x_0)$$

Mit $x - x_0 \equiv y$ und entspr. Redefinition von F folgt

$$F(y) = -ky \qquad (k \equiv V''(x_0))$$

Newton: $m\ddot{y} = -ky$; $\underline{\underline{\ddot{y} = -\omega^2 y}}$ $\left(\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

Dies ist also von enormer Allgemeinheit! (Alle "kleinen" Bew.-en um stabile Ruhelage). (Wir werden sehen, dass dies auch in mehreren Dim.-en noch analog gilt, solange es zum F ein V gibt. Letzteres ist bei $D > 1$ nicht mehr automatisch.)

- Wir prüfen leicht nach, dass $\sin(\omega t)$ & $\cos(\omega t)$ diese Gl. lösen. Also ist
$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$
(wegen der Linearität der Gl.) die allg. Lösung.

- Wichtige Verallgemeinerungen sind ein geschw.-abhängiger Reibungsterm ($\sim \dot{y}$) und eine "treibende" Kraft ($\sim f(t)$).

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = -\omega^2 y - c\dot{y} + f(t).$$

Auch das ist noch allg. lösbar (→ Exp.phys.).

Wir lassen es dabei und sagen stattdessen noch etwas allgemeines zu..

M5 Lineare Dgl.-en

- Eine lineare Dgl. n-ter Ordn. hat die allg. Form

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_0(x)\, y(x) = f(x)$$

(Linear bezieht sich hier <u>nur</u> auf y)

Sie heißt <u>homogen</u> falls $f(x) \equiv 0$. (Weil dann $y(x) \to \alpha y(x)$ die Gl. invariant lässt.)

- Wir hatten oben den Spezialfall $n=2$ <u>mit konstanten Koeffizienten</u>. (Außerdem war unser Bsp. homogen solange es kein treibende Kraft gab.)

- Hier diskutieren wir zunächst den Fall $n=1$ mit $f(x)=0$:

$$y' + a(x)\, y = 0.$$

- Das ist separabel und wir finden $\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\, dx$

$$\left\| y = C e^{-A(x)} \right\| \quad \Leftarrow \quad \ln y = -A(x)$$

(mit A Stammfkt. zu a)

$\uparrow$ <u>eine</u> Int. konstante ($A(x)$ sei fest gewählt).

- Um den inhomogenen Fall zu lösen, machen wir den Ansatz

$y = C(x)\, e^{-A(x)}$ ("Variation d. Konstanten"):

Wir finden: $(Ce^{-A})' + aCe^{-A} = f$

$$C'e^{-A} \underbrace{- CA'e^{-A} + Cae^{-A}}_{=0} = f$$

$$C' = f \cdot e^{A}$$

$C(x) = \int dx\, f(x) e^{A(x)}$, also: $\underline{\underline{y(x) = \left[\int^x dx' f(x') e^{A(x')} \right] e^{-A(x)}}}$

Wir sehen, dass die frei wählbare additive Konstante im unbestimmten dx'-Integral (also $C(x) \to C(x) + \alpha$) der Addition einer Lsg. der homogenen Gl. entspricht:

$$y(x) \to y(x) + \alpha e^{-A(x)}.$$

- Wir fassen zusammen und verallgemeinern:

  - Wenn wir n lin. unabh. Lösungen einer hom. lin. Dgl. n-ter Ordn. haben, dann haben wir die allg. Lsg: $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$.

    (Fakt: Die allg. Lsg. ist stets von dieser Form, d.h. es gibt immer n $\underbrace{\text{lin. unabhängige}}$ Lösungen.)

    d.h. jede Linearkombination bei der nicht alle Koeff. Null sind ist nicht Null.

  - Wenn wir außerdem <u>eine</u> "partikuläre" Lsg. der entsp. inhom. Gl. haben, dann haben wir wiederum auch die <u>allg.</u> Lsg. der inhom. Gl.:

$$y(x) = \underbrace{y_{\text{hom.}}(x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Gl.}} + y_{\text{part.}}(x).$$

    (Man sieht dies sofort indem man $y = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}}$ in $y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + f_0 y = f$ einsetzt.)

  - Zum Finden der part. Lsg. der inhom. Gl. kann man auch, wie oben, die Konstanten variieren ($c_i \to c_i(x)$). Aber wir führen das hier nicht durch.

M5