3 Erhaltungssätze in der Newtonschen Mechanik

3.1 Impulserhaltung

- Wir behandeln, neben einzelnen Massenpunkten mit Trajektorie $\bar{x}(t)$, ab sofort auch Systeme von Massenpunkten $a, b, \dots \in \{1, \dots, n\}$ mit Trajektorien $\bar{x}_a(t)$ $(a = 1 \cdots n)$.

- Impulserhaltung: Für ein System von Massenpunkten gilt $\bar{F}_{\text{äuß.}} = 0$:

$$\bar{p} \equiv \sum_a \bar{p}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\bar{x}}_a = \text{const.}$$

$\boxed{\sum \text{ über alle } a, b \text{ mit } a \neq b}$

- Begründung: $$\dot{\bar{p}} = \sum_a m_a \ddot{\bar{x}}_a = \sum_a \bar{F}_a = \sum_a \Big(\sum_{\substack{b \\ (\text{mit } b \neq a)}} \bar{F}_{ab} \Big) = \sum_{a \neq b} \bar{F}_{ab}$$
$$= \sum_{a>b} \bar{F}_{ab} + \sum_{a<b} \bar{F}_{ab} = \sum_{a>b} \left(\bar{F}_{ab} + \bar{F}_{ba} \right) = 0$$

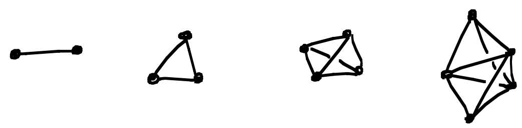
3. Axiom

- Kommentare:
  - Falls äußere Kräfte wirken, gilt
  $$\dot{\bar{p}} = \sum_a \bar{F}_{a,\text{äuß.}} = \bar{F}_{\text{äuß.}}$$
  - Falls die äuß. Kräfte z.B. nicht in x^1-Richtung wirken, gilt immerhin noch $p^1 = \text{const.}$
  - Die beiden obigen Kommentare kann man auch mit Gewinn auf einzelne Massenpunkte anwenden. Der ursprünglich Impulssatz hingegen reduziert sich in diesem Fall einfach auf das 1. Axiom.

3.2 Drehimpulserhaltung

- In vielen Fällen wirken Kräfte zwischen je zwei Massenpunkten parallel zur Verbindungslinie, z.B.
  1) Gravitationskraft
  2) elektrostatische Kräfte

3) "masselose starre Stangen":



2 3 4 5 ... n

(für $n \to \infty$ auch als Modell für starren Körper)

- <u>Drehimpulserhaltung:</u> Für solche Kräfte (und bei $\bar{F}_{\text{äuß.}} = 0$) gilt

$$\bar{L} \equiv \sum_a \bar{L}_a \equiv \sum_a m_a \bar{x}_a \times \dot{\bar{x}}_a \equiv \sum_a \bar{x}_a \times \bar{p}_a = \text{const.}$$

$$\left(\text{Erinnerung: } \bar{L}_a = \bar{x}_a \times \bar{p}_a \;\hat{=}\; L_a^i = \varepsilon^{ijk} x_a^j p_a^k \right)$$

- <u>Begründung:</u> $\dot{\bar{L}} = \sum_a m_a \left(\dot{\bar{x}}_a \times \dot{\bar{x}}_a + \bar{x}_a \times \ddot{\bar{x}}_a \right)$

$$= \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_a = \sum_{a \neq b} \bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} = \sum_{a > b} \left(\bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} + \bar{x}_b \times \bar{F}_{ba} \right)$$

$$= \sum_{a>b} (\bar{x}_a - \bar{x}_b) \times \bar{F}_{ab} = 0 \quad , \text{ da } \bar{F}_{ab} \parallel (\bar{x}_a - \bar{x}_b).$$

- <u>Kommentare:</u>

– Falls äuß. Kräfte wirken, gilt $\dot{\bar{L}} = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_{a,\text{äuß.}} \equiv \bar{M}_{\text{äuß.}}$

Das ist das (von den äuß. Kräften verursachte) <u>Drehmoment</u>.

– Drehimpulserhaltung bleibt also insbes. dann bestehen, wenn alle äuß. Kräfte <u>Zentralkräfte</u> sind (also $\bar{F}_a \parallel \bar{x}_a$).

– Wie wir speziell am letzten Kommentar besonders deutlich sehen, hängt der Drehimpuls entscheidend vom gewählten Koord.ursprung ab.

– $\bar{L} = \bar{x} \times \bar{p}$ (sowie jedes andere Kreuzprodukt von Vektoren) ist ein <u>Axial- od. Pseudovektor</u>, weil

(1) Er sich bei Drehungen wie ein Vektor verhält (siehe später)

(2) Er bei Reflexion am Ursprung sein Vorzeichen nicht ändert:

$$\bar{a} \to -\bar{a}, \quad \bar{b} \to -\bar{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}\times\bar{b} \to +\,\bar{a}\times\bar{b}\,.$$

3.3 Konservative Kräfte & Energieerhaltung

- Def.: Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\bar{F}(\bar{x})$ heißt konservativ falls es eine Fkt. $V(\bar{x})$ (das "Potential") gibt, so dass $\bar{F} = -\bar{\nabla} V$.

- Wichtiger Kommentar: $\bar{\nabla} V$ steht für den Vektor $\left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3}\right)$.

Die Schreibweise $\bar{\nabla} V$ ist vor allem deshalb sinnvoll, weil wir $\bar{\nabla}$ als vektorwertigen Differentialoperator auffassen können. Ein einfacher Differentialoperator ist z.B. $\frac{\partial}{\partial x}$ oder auch $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Diese ordnen einer bel. Fkt. deren erste bzw. zweite (partielle) Abl. nach x zu:
$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x,y) \longmapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

$\bar{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ fasst drei solche Operatoren in einen Vektor zusammen. Ihre Anwendung auf eine Fkt. (z.B. $V(x^1,x^2,x^3)$) liefert den oben als $\bar{\nabla} V$ bezeichneten Vektor.

- Energieerhaltung: Für einen Massenpkt. in einem kons. Kraftfeld gilt

$$E \equiv \underset{\substack{\uparrow\\ \text{kin.}}}{T} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{pot. Energie}}}{V} \equiv \frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 + V(\bar{x}(t)) = \text{const.}$$

- Begründung:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^i\dot{x}^i) = \frac{m}{2}\cdot 2\dot{x}^i\ddot{x}^i = m\,\dot{\bar{x}}\cdot\ddot{\bar{x}}$$

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(x^1+\Delta x^1,\dots,x^3+\Delta x^3) - V(x^1,\dots,x^3)}{\Delta t} \qquad \text{mit} \quad \Delta\bar{x} \approx \frac{d\bar{x}}{dt}\cdot\Delta t$$

Wir können den Zähler schreiben als:

$$V(x^1+\Delta x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3)$$
$$+ V(x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3+\Delta x^3)$$
$$+ V(x^1, x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3)$$

$$\approx \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3)\cdot \Delta x^1 + \frac{\partial V}{\partial x^2}(x^1, x^2, x^3+\Delta x^3)\cdot\Delta x^2 + \frac{\partial V}{\partial x^3}(\bar{x})\cdot \Delta x^3$$

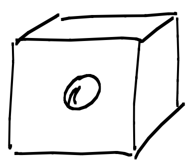
Also: $$\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(\bar{x}(t))\cdot \frac{dx^i}{dt}$$

Dies ist eine entscheidende allgemeingültige Rechenregel, die man auch als
$$\underline{dV = \frac{\partial V}{\partial x^i}\cdot dx^i}$$
schreiben kann.

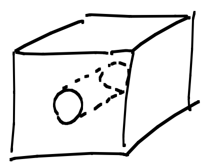
Insgesamt folgt also $\dot{E} = m\dot{\bar{x}}\ddot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i}\cdot \dot{x}^i = \bar{F}\cdot\dot{\bar{x}} + (\bar{\nabla} V)\cdot \dot{\bar{x}} = 0$.

- <u>Kriterium für Konservativität:</u> Für einfach zusammenhängende* Gebiete gilt:
$$\bar{F} \text{ kons.} \iff \bar{\nabla}\times\bar{F} = 0 \quad (\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k = 0).$$

*) D.h. jede geschlossene Kurve kann glatt auf Länge Null "zusammengezogen" werden. z.B.



einf. zush.



<u>nicht</u> einf. zush.

- <u>Begründung:</u>

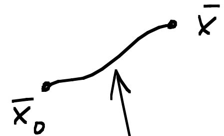
$\Rightarrow$ $\bar{F} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow F_i = -\partial_i V$; $\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k = -\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k V$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Antisymm. von } \varepsilon}}{=} -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k V + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\,\partial_j\partial_k V \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Umbenennung } k\leftrightarrow j \text{ im 2. Term}}}{=} -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k V + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\partial_k\partial_j V \underset{\substack{\uparrow\\ \text{wegen } \partial_j\partial_k = \partial_k\partial_j}}{=} 0.$$

($\Leftarrow$) Wähle beliebiges $\bar{x}_0$ innerhalb unseres "Gebiets" und def.:

$$V(\bar{x}) = \underbrace{- \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} d\bar{s} \cdot \bar{F}(s)}$$

– "Arbeit am Massenpkt.", falls dieser sich auf obiger Kurve bewegt.



Kurve parametrisiert durch Bogenlänge s.

$$\left[\; d\bar{s} \equiv d\bar{x}(s) = \left(\frac{dx^1}{ds}, .., \frac{dx^3}{ds}\right) \cdot ds \right.$$

$$\left. \text{also } \bar{F} \cdot d\bar{s} = F^i \left(\frac{dx^i}{ds}\right) \cdot ds \;\right]$$

Für einen bel. kleinen Vektor $\bar{\ell}$ gilt:

$$\bar{\ell} \cdot \bar{F}(\bar{x}) \simeq - \left(- \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{\ell}} d\bar{s} \cdot \bar{F} \right) = - \left(- \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}+\bar{\ell}} d\bar{s} \cdot \bar{F} + \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} d\bar{s} \cdot \bar{F} \right) =$$

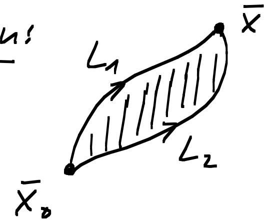
$$= - \left(V(\bar{x}+\bar{\ell}) - V(\bar{x}) \right)$$

$$= - \frac{\partial V}{\partial x^i} \cdot \ell^i = - \bar{\ell} \cdot \bar{\nabla} V \quad \Rightarrow \quad \bar{\ell} \cdot (\bar{F} + \bar{\nabla} V) = 0$$

$\Rightarrow$ da $\bar{\ell}$ beliebig, $\bar{F} + \bar{\nabla} V = 0$ ✓

- Entscheidende potentielle Lücke: <u>Eindeutigkeit unserer Def. von V</u>

<u>Dazu:</u>



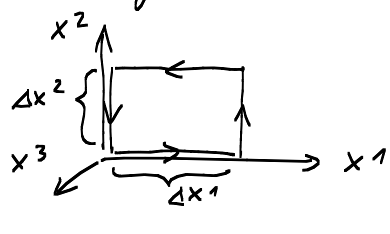
$$\int_{L_2} d\bar{s} \cdot \bar{F} - \int_{L_1} d\bar{s} \cdot \bar{F} = \oint d\bar{s} \cdot \bar{F} = \int \underbrace{d\bar{f}}_{\text{umschlossene Fläche}} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}) = 0$$

"Stokes"

hier braucht man einf. zush., sonst gibt es die Fläche nicht!

<u>M6 Satz von Stokes:</u>

- Wir beschränken uns zunächst auf eine (kleine) rechteckige Fläche in der x^1-x^2 Ebene:



$$\oint d\bar{s}\cdot\bar{F} = \int_0^{\Delta x^1} ds\, F^1(s,0) + \int_0^{\Delta x^2} ds\, F^2(\Delta x^1, s) - \int_0^{\Delta x^1} ds\, F^1(s,\Delta x^2)$$

weil $d\bar{s} = ds\cdot(-1,0)$

$$- \int_0^{\Delta x^2} ds\, F^2(0,s)$$

$$= \int_0^{\Delta x^1} ds\left(F^1(s,0) - F^1(s,\Delta x^2)\right) + \int_0^{\Delta x^2} ds\left(F^2(\Delta x^1,s) - F^2(0,s)\right)$$

$$\approx \int_0^{\Delta x^1} ds\left(-\frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)\Delta x^2 + \int_0^{\Delta x^2} ds\,\frac{\partial F^2}{\partial x^1}\cdot\Delta x^1 + \text{"}O(\Delta^3)\text{"}$$

$$\approx \Delta x^1\cdot\Delta x^2\cdot\left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) + O(\Delta^3)$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einheitsvektor in } x^3\text{-Richtung}}}{\left(\Delta x^1\cdot\Delta x^2\cdot\hat{e}_3\right)}\cdot\left(\bar\nabla\times\bar F\right)$$

Beachte: $(\bar\nabla\times\bar F)_3 = \varepsilon_{3ij}\,\partial_i F_j = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$

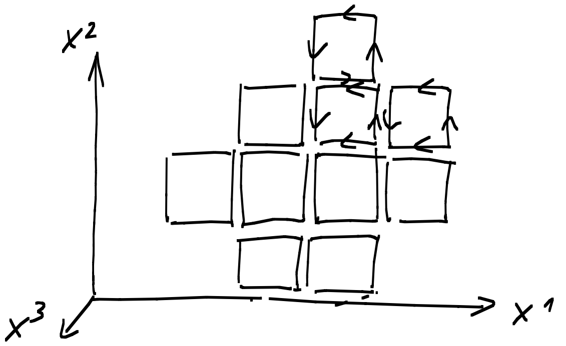
$$= \underbrace{\Delta\bar{f}}\cdot\left(\bar\nabla\times\bar F\right)$$

Wir ordnen ab sofort jeder kleinen ($\Delta\bar{f}$) oder infinitesimalen ($d\bar{f}$) Fläche einen Vektor zu, dessen Länge der Größe der Fläche entspricht. Die Richtung definiert die Orientierung der Fläche ("oben sei da wo der Pfeil hinzeigt"). Die Randkurve wird dann so definiert, dass man im math. pos. Drehsinn umläuft ("linksherum") umläuft, wenn man "von oben schaut". Das passt gerade zu den Pfeilen im Bild.

Also: $\oint d\bar{s}\cdot\bar{F} = \int d\bar{f}\cdot(\bar\nabla\times\bar{F}) + O(\Delta^3)$ für kleine Rechtecke.

(Die spezielle Lage, beim Ursprung und in der x^1-x^2-Ebene war für die Herleitung nicht wesentlich sondern diente nur der Vereinfachung der Rechnung.)

Jetzt:



$$\sum_{\text{Rechtecke}} \oint d\bar{s}\cdot\bar{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int d\bar{f}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{F}) + \underbrace{N\cdot O(\Delta^3)}$$

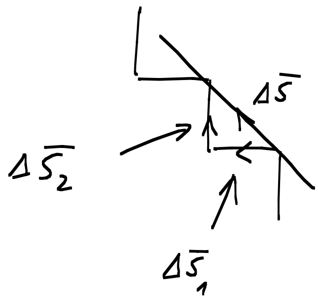
$\sim O(\Delta)$, weil

$$\Rightarrow \qquad \underset{\text{"eckiger" Rand}}{\oint d\bar{s}\cdot\bar{F}} = \underset{\text{Gesamtfläche}}{\int d\bar{f}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{F})}$$

$N \sim \frac{1}{\Delta^2}$ bei fester Fläche und $\Delta \to 0$

(Die "inneren" Ränder heben sich paarweise weg.)

- Schließlich "glätten" wir noch den Rand:



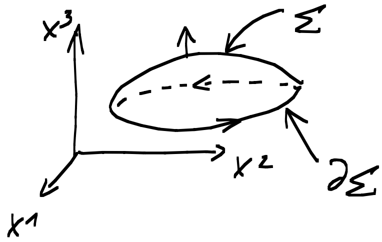
Offensichtlich: $\Delta\bar{s} = \Delta\bar{s}_1 + \Delta\bar{s}_2$

Also: $\bar{F}_1\cdot\Delta\bar{s}_1 + \bar{F}_2\cdot\Delta\bar{s}_2 \approx \bar{F}\cdot\Delta\bar{s}$,

(weil wir $\bar{F}_1 \approx \bar{F}_2 \approx \bar{F}$ setzen können, wenn $\Delta \to 0$. Der Fehler ist $\sim \Delta\cdot|\Delta\bar{s}| \sim O(\Delta^2)$, und wird selbst nach Summation über alle Randelemente klein bleiben)

- Jetzt müssen wir uns nur noch klarmachen, dass wir auch eine gekrümmte, beliebig im 3d-Raum liegende Fläche durch kleine Rechtecke (oder Quadrate) annähern können. Damit haben wir:

Satz von Stokes:



$$\oint_{\partial\Sigma} d\bar{s}\cdot\bar{F} = \int_{\Sigma} d\bar{f}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{F})$$

für beliebige glatte $\bar{F}(\bar{x})$.

M6

Damit haben wir den Beweis für $\left(\bar{F} \text{ kons.} \Leftrightarrow \bar{\nabla}\times\bar{F} = 0\right)$ vervollständigt, wenn wir glauben, dass in einf. zush. Gebieten jede geschl. Kurve der Rand einer Fläche ist.

3.4 Energieerhaltung für ein System von Massenpunkten

- Die Massenpunkte seien durch $\bar{x}_a$ $(a = 1 \cdots n)$ beschrieben und die Kräfte zwischen ihnen sollen jeweils parallel zum Vektor $\bar{x}_a - \bar{x}_b$ wirken (Zentralkräfte).

- Solche Kräfte kann man stets durch $\bar{F}_{ab} = -\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$ beschreiben, wobei $V_{ab} = V_{ba}$.

$$\bar{\nabla}_a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_a^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_a^3}\right);$$

(hier keine Summation über a, b!)

Kommentare:

- Die "Zentralkraftbedingung" ersetzt unsere obige Forderung der Konservativität.

- $$-\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) = -\underbrace{\left(\bar{\nabla}_a |\bar{x}_a - \bar{x}_b|\right)}\cdot V'_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$$

$$= \bar{\nabla}_a \sqrt{(\bar{x}_a - \bar{x}_b)^2} = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b}{|\bar{x}_a - \bar{x}_b|} \quad \text{(siehe Üb.)}$$

  Wir können also eine beliebige Zentralkraft (ein beliebiges V') wählen und das passende V als Stammfkt. konstruieren.

- $$-\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) = +\bar{\nabla}_b V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) = +\bar{\nabla}_b V_{ba}(|\bar{x}_b - \bar{x}_a|)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{F}_{ab} = -\bar{F}_{ba}\,,$$ wie es sein soll.

<u>Energieerhaltung:</u> $E \equiv \sum_a T_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a<b} V_{ab}$ $= const.$

<u>Begründung:</u> $\dot{T} = \sum_a \frac{m_a}{2}\left(\dot{\bar{x}}_a^2\right)^\cdot = \sum_a m_a \dot{\bar{x}}_a \cdot \ddot{\bar{x}}_a$

$$\Rightarrow \dot{E} = \sum_a \dot{\bar{x}}_a \bar{F}_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\left(\left(\bar{\nabla}_a V_{ab}\right)\dot{\bar{x}}_a + \left(\bar{\nabla}_b V_{ab}\right)\dot{\bar{x}}_b\right)$$

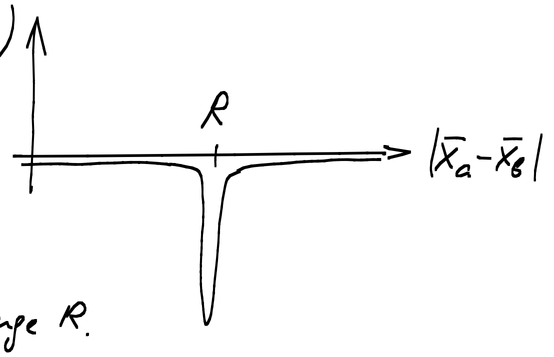
(Erinnerung: $\frac{d}{dt} f(\bar{x}(t)) = (\bar{\nabla} f)\cdot \dot{\bar{x}}$)

$$= \sum_{a\neq b} \dot{\bar{x}}_a \cdot \bar{F}_{ab} + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\Big(-\bar{F}_{ab}\cdot\dot{\bar{x}}_a - \underbrace{\bar{F}_{ba}\cdot\dot{\bar{x}}_b}\Big) = 0 \quad \checkmark$$

Umbenennung
$a \leftrightarrow b$ in dieser Summe

$$\Rightarrow \; -\bar{F}_{ab}\cdot\dot{\bar{x}}_a$$

<u>Kommentar:</u> Sei $V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$



Dies beschreibt unsere
"masselose starre Stange" von Länge R.
Damit haben wir Energieerhaltung für den starren Körper gezeigt.

<u>3.5 Eindimensionale Bewegung:</u>

- Mittels Energiesatz lässt sich die 1-dim. Bewegung allgemein lösen.
- Da jedes 1-dim. zeitunabh. Kraftfeld konservativ ist, haben wir ganz allgemein

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = const.$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

- Jetzt: – Integral lösen
  – Int. konstante und E so wählen, dass die Anfangsbed.-en erfüllt werden
  – $t = t(x)$ auflösen $\Rightarrow$ $x = x(t)$.

(Dies ist zwar immer noch schwierig, aber viel einfacher als das Lösen einer allg. Diff.gl. 2. Ordnung.)