4 Der Harmonische Oszillator in Komplexen Zahlen

Harmon. Osz. mit Reibung: $\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x}$

Neuer Ansatz: $x \sim e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0$

1) ω klein $\Rightarrow \alpha^2 + c\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -c \Rightarrow x \sim e^{-ct}$ ✓

2) ω groß $\Rightarrow \alpha^2 + \omega^2 = 0$, nicht lösbar (wir wissen schon, dass sin/cos Lösungen sind).

$\Rightarrow$ Wenn wir jede quadrat. Gl. lösen könnten (insbes. die Gl. $\alpha^2 = -1$, die für $\omega = 1$ & $c = 0$ entsteht), hätten wir vielleicht eine sehr elegante, einheitliche Beschreibung der Grenzfälle 1), 2) und aller Fälle "dazwischen".

M7 Komplexe Zahlen

Ziel: Den Begriff der reellen Zahlen so erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar wird.

Naiver Zugang: Definiere eine neue Zahl (die "imaginäre Einheit") "i", so dass $i^2 = 1$. Außerdem wollen wir immer noch die reellen Zahlen haben und Zahlen addieren und multiplizieren können. Also erklären wir die allg. kompl. Zahl z als

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Außerdem:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

sowie
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Damit haben wir Summe und Produkt zweier Zahlen der Form $x + iy$ so erklärt, dass sie wieder in dieser Form schreibbar sind.

Jetzt sauberer:

- Ein Körper (engl.: Field) ist eine Menge K mit zwei binären Operationen "$+$" & "$\cdot$" so dass gilt: $(\alpha, \beta, \gamma, \dots \in K)$

    - $\alpha + (\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ (Assoz.)
    - $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (Kommut.)
    - Es gibt ein Element $0 \in K$ so dass $\alpha + 0 = \alpha \quad \forall \alpha$
    - Zu jedem α gibt es ein Inverses "$-\alpha$" so dass $\alpha + (-\alpha) = 0$.

    - $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
    - $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
    - Es gibt ein Element $1 \in K$ so dass $1 \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha$
    - Zu jedem α gibt es ein (Multiplikations-)Inverses α^{-1} so dass $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

    - $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (Distributivität)

- Wir kennen bereits die Körper $K = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) und $K = \mathbb{R}$ (reelle Zahlen).

- Komplexe Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \equiv (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

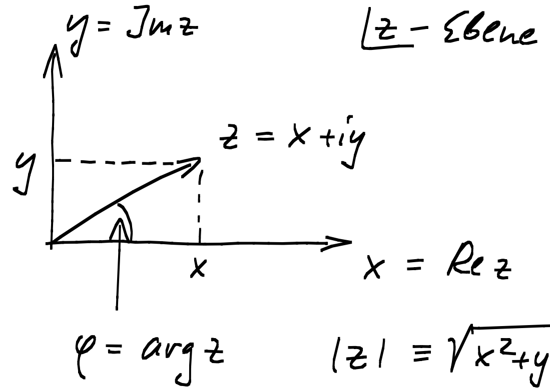
- Dies ist äquivalent zu unserer oben gegebenen naiven Def.:
$$(x, y) \mathrel{\hat{=}} x + iy.$$

Aufg.: Zeigen Sie, dass dies stimmt, dass $(0,1) \mathrel{\hat{=}} i$, und dass die Körper-Axiome erfüllt sind!

- Hilfestellung dazu: Der einzige (m. E. nichttriviale) Teil ist die Existenz des Multiplikationsinversen. Es gilt

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{für } z = x+iy. \;\checkmark$$

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ legt eine Darstellung als Vektoren in der Ebene nahe:



$|z| \equiv \sqrt{x^2+y^2}$

<u>Addition:</u> Vektoraddition

<u>Multiplik.:</u> Multiplik. der Beträge & Addition der Winkel φ. (sehen wir später)

- Die "üblichen" Fkt.-en (exp, ln, sin, cos, ...) können z.B. über ihre bekannten Potenzreihen auf $\mathbb{C}$ definiert werden. Besonders wichtig ist

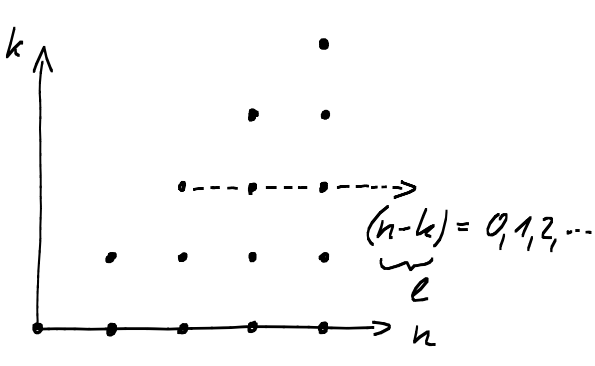
$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- Die entscheidende Eigenschaft der e-Fkt., $e^{z+w} = e^z e^w$, ergibt sich aus

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right]}$$

Diese Darstellung von $(z+w)^n$ mit den "Binomialkoeffizienten" $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ folgt aus elementarer Kombinatorik.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$



$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!}$$

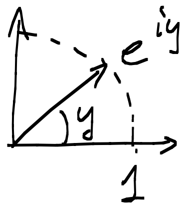
$$= e^z e^w. \;\checkmark$$

Also insbes. $e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e^{iy}}_{}$

kompl. Zahl mit Betrag 1, wie wir gleich sehen werden ...

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y .$$



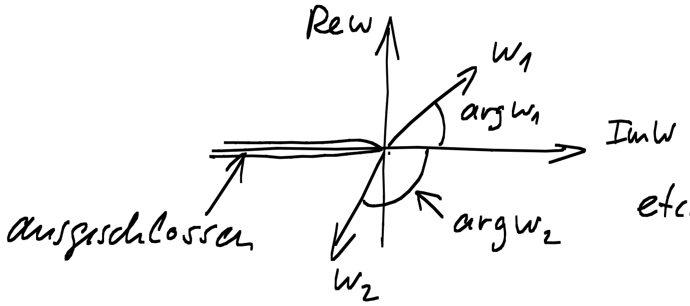
$\Rightarrow$ Natürliche Schreibweise: $\underline{\underline{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}}$

(Eulersche Formel)

Wir haben gelernt: $w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$

$$\ln w = z = x + iy = \ln|w| + i \arg w$$

(Wenn wir für jedes $w \in \mathbb{C}$ (ohne neg. reelle Achse) $\arg w \in [-\pi, \pi]$ definieren, haben wir eine eindeutige Abb. $w \to \ln w$:



etc.)

M7

Zurück zum Oszillator: $\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad ; \quad x \sim e^{\alpha t}$

$\Rightarrow \alpha^2 + c\alpha + \omega^2 = 0 \quad ; \quad \alpha = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}$

für $\omega > c/2$: $\quad \alpha = -\frac{c}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \equiv -\frac{c}{2} \pm i\tilde{\omega}$

$(\sqrt{-x} = -i\sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}_+)$

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm i\tilde{\omega}t}$ $\quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t}\left(\cos(\pm\tilde{\omega}t) + i\sin(\pm\tilde{\omega}t)\right)$

$= e^{-\frac{c}{2}t}\left(\cos\tilde{\omega}t \pm i\sin\tilde{\omega}t\right)$,

(Details siehe Exp.phys.).

or, after redefinition,

$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t}\cos\tilde{\omega}t \; ; \; x_2 = e^{-\frac{c}{2}t}\sin\tilde{\omega}t$.

Schlusskommentare:

- In $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ $(n > 0)$ eine Nullstelle. ("Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen".)

- Aus diesem "Fund.satz der Algebra" folgt leicht, dass P_n in der Tat n Nullstellen hat:

$$P_n(z) = (z - z_0) \cdot \underbrace{P_{n-1}(z)}_{\substack{\text{wiederhole} \\ \text{Argument...}}} .$$

- Es gibt auch Quaternionen ...

  $(1, i \rightarrow 1, i, j, k$ mit z.B. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ & $ij = k$, $ji = -k$ etc. ...

  Man hat keine Kommutativität mehr ("Schiefkörper"))

  ... und Oktonionen (bei denen man auch Assoziativität aufgeben muss).

- Allerdings ist die Anwendungsrelevanz von $\mathbb{C}$ im Vergleich zu letzteren überragend!

Schließlich: Auf $\mathbb{C}$ gibt es eine wichtige Abb., die komplexe Konjugation, die mit "$*$" oder "$-$" bezeichnet wird:

$$z \rightarrow z^* \quad (\text{oder } z \rightarrow \bar{z}.)$$

Def.: $(x+iy)^* = x - iy$ oder (äquivalent) $(\rho e^{i\varphi})^* = \rho e^{-i\varphi}$.

Anschaulich ist dies die Spiegelung an der reellen Achse. Somit gilt auch $(z^*)^* = z$.