5 Symmetrien der Raum-Zeit

5.1 Der euklidische Raum

- Wir haben den phys. Raum bisher als 3-dim. Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt $(\bar{x}, \bar{y} \mapsto \bar{x}\cdot\bar{y} = x^i y^i)$ beschrieben. Jetzt interessieren wir uns für dessen <u>Symmetrien</u>, also Abbildungen

$$V \longrightarrow V \,, \quad \bar{x} \longmapsto \bar{x}' \,,$$

welche "<u>die Struktur des Raumes respektieren</u>".

- "Struktur" ist hier 1) die Vektorraumstruktur (die lineare Struktur)
  2) das Skalarprodukt

- Sei $R: V \to V$ eine solche Symm.trf. Dann muss also gelten:

$$1)\quad R(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha R(\bar{x}) + \beta R(\bar{y})$$

$$2)\quad R(\bar{x}\cdot\bar{y}) \equiv \bar{x}\cdot\bar{y} = R(\bar{x})\cdot R(\bar{y})$$

Dies bedeutet, dass R nur auf V operiert; auf $\mathbb{R}$ wirkt es trivial: $R(\alpha) = \alpha$.

- Bedingung 1) wird von den sogenannten "allg. linearen Transformationen" erfüllt: $x^i \longmapsto x'^i = R^{ij} x^j$

oder: $$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & R^{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ & & R^{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - - - \\ - - - \\ - - - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(bei uns $n = 3$)

Element i ergibt sich als

$$x^i = \sum_j R^{ij} \cdot x^j$$

"Zeile i der Matrix"

Kurzschreibweise:

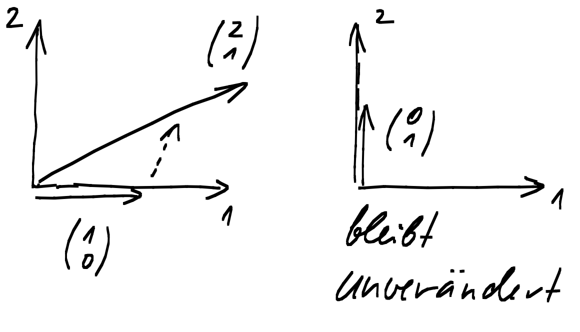
$$x \longmapsto x' = R\,x$$

$n{\times}n$-Matrix; n-Elementiger Spaltenvektor

(Wir schreiben in solchen Formeln x und nicht $\bar{x}$, da wir x in Analogie zu R als $n{\times}1$-Matrix auffassen. R trägt auch kein "Matrix-Symbol".)

- Einfaches Beispiel: $n = 2$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$x'^1 = R^{11}x^1 + R^{12}x^2$$
$$x'^2 = R^{21}x^1 + R^{22}x^2$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ Jeder andere Vektor, z.B. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, transformiert sich entsprechend:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longmapsto \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

- Als "Symmetrie des Vektorraums" können wir das aber nur auffassen, falls es auch ein <u>Umkehrtrf.</u> gibt.

- Zunächst lernen wir, zwei Trf.-en zu verknüpfen:

$$R_1 : x \longmapsto R_1 x \,, \quad R_2 : x \longmapsto R_2 x$$

$$R_2 \circ R_1 : x \longmapsto R_2 R_1 x$$

Die Komponente i dieses Vektors ist

$$R_2^{ij} \underbrace{(R_1 x)^j}.$$

Die Komponente j dieses Vektors ist $R_1^{jk} x^k$

<u>Also:</u> $R_2 \circ R_1 : x \longmapsto x'$ mit $\quad x'^i = \underbrace{R_2^{ij} R_1^{jk}} x^k$

Die sich hier ergebende Matrix heißt Produkt von R_2 und R_1: $\quad (R_2 R_1)^{ij} = R_2^{ik} R_1^{kj}$.

Rechenregel: R_2 R_1 R_2R_1

An der Stelle i,j steht hier
(Zeile i von R_2) $\times$ (Spalte j von R_1), also
z.B. $(R_2R_1)_{22} = (R_2)_{21}(R_1)_{12} + (R_2)_{22}(R_1)_{22} + (R_2)_{23}(R_1)_{32}$.

- Jetzt ist klar, dass eine Trf. invertierbar ist, falls es eine zweite Trf. R^{-1} gibt, so dass $R^{-1} \circ R = id$.

  Identität auf V.

- Für die entsprechenden Matrizen heißt das: $(R^{-1})^{ij} R^{jk} = (\mathbb{1})^{ik} \equiv \delta^{ik}$

  "Kronecker-δ": 1 falls $i=k$, 0 sonst.

- R^{-1} heißt die zu R inverse Matrix. (Es gilt auch $R \cdot R^{-1} = \mathbb{1}$.)

M8 Matrix, Determinante, inverse Matrix

- Eine $n \times m$-Matrix A ist ein Schema von $n \times m$ Zahlen A^{ij}

  Eintrag in Zeile i, Spalte j.

- Das Produkt einer $n \times m$-Matrix A mit einer $m \times p$-Matrix B ist die $n \times p$-Matrix AB mit Elementen
$$(AB)^{ij} = \sum_{k=1}^{m} A^{ik} B^{kj}.$$

- Für (quadrat.) $n \times n$-Matrizen definieren wir
$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \cdots i_n} A^{i_1 j_1} \ldots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \cdots j_n}.$$

Dabei ist das (n-dimensionale) Levi-Civita-Symbol oder ε-Tensor definiert durch:
$$\varepsilon^{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma), \text{ sonst Null.}$$
wobei σ eine Permutation von $1, 2, \ldots, n$ ist.

- Eine Permutation ist eine umkehrbare Abb. $\{1,\cdots,n\} \to \{1,\cdots,n\}$. Sie heißt gerade ($\mathrm{sgn}(\sigma)=+1$), wenn sie sich durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen benachbarter Elemente herstellen lässt, z.B.: $123 \to 312$ ist Produkt von $123 \to 132$ und $123 \to 213$:

$$123 \longrightarrow 132 \longrightarrow 312 \quad \checkmark \quad \text{(also gerade).}$$

$\varepsilon^{12\cdots n}$ ist demzufolge gleich 1 (Null Vertauschungen).

- Bsp: $\det\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{2!}\,\varepsilon^{ij}A^{ik}A^{jl}\varepsilon^{kl}$

$$= \frac{1}{2!}\Big(\varepsilon^{12}A^{11}A^{22}\varepsilon^{12} + \varepsilon^{12}A^{12}A^{21}\varepsilon^{21} + \varepsilon^{21}A^{21}A^{12}\varepsilon^{12} + \varepsilon^{21}A^{22}A^{11}\varepsilon^{21}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^{11}A^{22} - A^{12}A^{21} - A^{21}A^{12} + A^{22}A^{11}\right)$$

$$= A^{11}A^{22} - A^{12}A^{21}.$$

- Man überlegt sich "leicht": $\det A = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\,\underbrace{A^{1\sigma(1)}A^{2\sigma(2)}\cdots A^{n\sigma(n)}}_{\text{"je ein Element aus jeder Zeile \& Spalte"}}$.

- Für 3×3 Matrizen kann "det" immer noch anschaulich "hinschreiben":

$$\begin{array}{ccc|cc} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} & A^{21} & A^{22} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} & A^{31} & A^{32} \end{array}$$

$3\times$ "$-$" $\quad 3\times$ "$+$" $\quad \Rightarrow \det$

- Außerdem ist $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}A^{i_1j_1}\cdots A^{i_nj_n}$ offensichtlich total antisymm. in $j_1\cdots j_n$ (Sprich: Wechselt Vorzeichen bei Vertauschung zweier Indizes)

- Also: $\varepsilon^{i_1 \cdots i_n} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_n j_n} = c \cdot \varepsilon^{j_1 \cdots j_n}$

$\Rightarrow \qquad n! \det A = c\, \varepsilon^{j_1 \cdots j_n} \varepsilon^{j_1 \cdots j_n} = c \cdot n!$

$\Rightarrow \quad c = \det A \Rightarrow$ obige Formel ist eine nützliche alternative Def. von "det".

- <u>Fakt:</u> A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

- $\Leftarrow$ zeigen wir explizit: Behauptung:

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{j i_2 \cdots i_n} \varepsilon^{i j_2 \cdots j_n} A^{i_2 j_2} \cdots A^{i_n j_n} \cdot \frac{1}{\det A}$$

Begründung:

$$(A^{-1})^{ij} A^{jk} = \frac{1}{(n-1)! \det A} \cdot \varepsilon^{j i_2 \cdots i_n} \varepsilon^{i j_2 \cdots j_n} A^{jk} A^{i_2 j_2} \cdots A^{i_n j_n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)! \det A} (\det A) \cdot \underbrace{\varepsilon^{k j_2 \cdots j_n} \varepsilon^{i j_2 \cdots j_n}}_{(n-1)!\, \delta^{ki}}$$

$$= \delta^{ik} \quad ✓$$

- $\Rightarrow$ Ist zumindest naheliegend, weil das oben definierte A^{-1} divergiert wenn $\det A \to 0$.

- Man beachte, dass $\frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{i i_2 \cdots i_n} \varepsilon^{j j_2 \cdots j_n} A^{i_2 j_2} \cdots A^{i_n j_n}$

gerade $(-1)^{i+j} \times \det(M)$ ist, wobei M aus A durch Streichung von Zeile i & Spalte j hervorgeht. A^{-1} ist durch obige Formel also mit dieser "Matrix der Cofaktoren" verbunden.

M8

- Gäbe es nur Linearität & Invertierbarkeit, wären unsere Symmetrie-Tf-en also alle $R \in GL(n)$, $\leftarrow$ Menge der invertierbaren ($\det \neq 0$) $n \times n$ Matrizen.

- Wir brauchen aber zusätzlich Bedingung 2): $\bar{x}\cdot\bar{y} = R(\bar{x})\cdot R(\bar{y})$
  (mit $R(\bar{x})^i = R^{ij}x^j$).

- Dies lässt sich bequemer diskutieren, wenn wir die Schreibweise
$$(M^T)^{ij} = M^{ji} \qquad (\text{Transposition})$$
einführen. Im Spezialfall von Vektoren haben wir:
$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad ; \quad x^T = (x^1 \cdots x^n)$$
(Spaltenvektor) (Zeilenvektor).

(Wenn nichts anderes gesagt ist, betrachten wir jeden Vektor x zunächst als Spaltenvektor.)

- Damit gilt: $$\bar{x}\cdot\bar{y} = x^T y = \underbrace{(x^1 \cdots x^n)\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}}_{x^1y^1 + \dots + x^ny^n} = x^i y^i .$$

- Ebenso: $$R(\bar{x})\cdot R(\bar{y}) = (Rx)^T(Ry) = (x^T R^T)(Ry) \overset{*}{=} x^T R^T R y$$

Hier benutzen wir die allg. Tatsache
$$(AB)^T = B^T A^T \text{ für bel. Matrizen}$$
(Begründung: $((AB)^T)^{ij} = (AB)^{ji} = A^{jk}B^{ki} =$
$= B^{ki}A^{jk} = (B^T)^{ik}(A^T)^{kj} = (B^T A^T)^{ij}$)

*) Matrix-Multiplikation ist assoziativ.

- Wir fordern mit "Bed. 2)" also $x^T y = x^T R^T R y$ für <u>beliebige</u> x, y.
Dies gilt genau dann wenn $R^T R = \mathbb{1}$ (equiv.: $(R^T)^{ik} R^{kj} = \delta^{ij}$
oder $R^{ki}R^{kj} = \delta^{ij}$.)

Die Matrix R ist <u>orthogonal</u>.

<u>Zusammenfassend:</u> Die Symmetrien des euklid. Raumes $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch $x \to Rx$ (gleichzeitig für alle $x \in \mathbb{R}^3$) wobei R die Bedingung $R^T R = \mathbb{1}$ erfüllt. ($R \in O(3) \subset GL(3)$)

allg. lineare / orthogonale } Transformationen.

M9 Symmetriegruppen

Symmetrien in Physik (& Mathematik) werden durch Gruppen beschrieben. Wir haben bisher gelernt, dass $GL(n)$ die Symm.-gruppe des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ und $O(n)$ die Symm. gruppe des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ (also $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt) sind. Beides sind sogenannte Matrixgruppen. Allgemeiner gilt:

- Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer binären Operation $G \times G \to G$ für die gilt:
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  - $\exists\, e \in G$ ("Eins") so dass $a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a$.
  - $\forall\, a \in G \;\exists\, a^{-1} \in G$ so dass $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

- Kommentare: (I) Eine Gruppe heißt abelsch falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b. Beispiele dafür sind $\mathbb{Q} \setminus 0$; $\mathbb{R} \setminus 0$; $\mathbb{C} \setminus 0$. Wenn man nicht "$\cdot$" sondern "$+$" zur Gruppenoperation erklärt, sind außerdem $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ & $\mathbb{C}$ abelsche Gruppen bzgl. dieser Operation. Allgemeiner gilt folgende alternative Def. eines Körpers:

  Ein Körper K mit Operationen $+, \cdot$ erfüllt:
  1) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (Einselement: 0)
  2) $(K \setminus 0, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
  3) Distributivität

(II) $GL(n)$ ist eine (nichtabelsche!) Gruppe. Dazu müssen wir insbes. wissen, dass mit A & B auch AB invertierbar ist. Dies ist aber offensichtlich, da $B^{-1}A^{-1}$ das inverse Element zu $A \cdot B$ ist:

$$(B^{-1}A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = \mathbb{1}.$$

(III) $O(n)$ ist eine "Untergruppe" von $GL(n)$. Wir müssen dazu prüfen, dass mit A & B auch $A \cdot B$ orthogonal ist. In der Tat:

$$(A\cdot B)^T(A\cdot B) = B^TA^TAB = B^TB = \mathbb{1} \,.\ \checkmark$$

(IV) Eine weitere wichtige Gruppe ist die der speziellen orth. Trf.-en, $SO(n) \subset O(n)$, welche durch die Zusatzbedingung $\det R = 1$ definiert ist. Dazu zunächst zwei wichtige Fakten:

$$\boxed{\det(A^T) = \det A \quad ; \quad \det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)}$$

(für beliebige quadr. Matrizen).

Aus $R^TR = \mathbb{1}$ folgt damit $\det(R^TR) = (\det R^T)(\det R) = (\det R)^2 = 1$
$\Rightarrow \det R = \pm 1$. Speziell für $n=3$ wird die Reflexion bzgl. der y-z-Ebene durch $R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben ($\det R_x = -1$).

Fakt: Jedes Element von $O(3)$ ($\equiv$ jede (echte) Drehung) ist als $R\cdot R_x$ mit $R \in SO(3)$ schreibbar.
(Dies überträgt sich sinngemäß auf $SO(n) \subset O(n)$.)

(V) Aufgabe: Zeigen Sie, dass $R \in SO(2)$ allg. als $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ darstellbar ist und identifizieren Sie $SO(2)$ mit $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
(Die Gruppenoperation kann mit kompl. Multiplikation identifiziert werden.)

M9

Für uns sind im Folgenden vor allem $O(n)$ & $SO(n)$ (Drehungen!) wichtig.
(Die Tatsache, dass jedes Element von $SO(3)$ eine Drehung (im anschaulichen Sinne) ist, beweisen wir im Moment nicht.)

5.2 Tensoren

Abstrakt: Ein Tensor vom Rang m im (eukl. Raum) $V = \mathbb{R}^n$ ist eine multilineare Abb.

$$t : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{m\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

"linear in jedem Argument."

<u>In der Praxis</u> kann jede solche Abb. als

$$t: (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \longmapsto t^{i_1 \dots i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} \in \mathbb{R}$$

realisiert werden. Ab sofort ist also für uns ein Tensor ein Zahlen-schema $t^{i_1 \dots i_m}$ (welches, wie wir gleich sehen werden, auf eine bestimmte Art unter $O(n)$ transformiert).

<u>Beispiel für $m=1$:</u> Vektor: $t \equiv \bar{t}$; die obige lineare Abb. ist

$$t: \bar{x} \longmapsto t^i x^i = \bar{t} \cdot \bar{x} = t^T x.$$

Die ist unter Drehungen invariant, falls $x \mapsto Rx$ & $t \mapsto Rt$.

(genauer: $t \mapsto t' = Rt$ mit $t'^i = R^{ij} t^j$)

<u>Beispiel für $m=2$:</u> Tensor-Produkt zweier Vektoren: $t = u \otimes w \in$ "$V \otimes V$".

$$t: (\bar{x}, \bar{y}) \longmapsto (u^i w^j)(x^i y^j) = (\bar{u} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{w} \cdot \bar{y}).$$
$$= t^{ij} x^i y^j.$$

<u>Also:</u> $t^{ij} = u^i w^j$

Die Transf. unter Drehungen ist also:

$$t^{ij} = u^i w^j \longrightarrow R^{ik} u^k R^{jl} w^l = R^{ik} R^{jl} t^{kl}.$$

Die Invarianz von $t(\bar{x}, \bar{y})$ ergibt sich wie folgt:

$$t(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow (Rt)(Rx, Ry) = (R^{ik} R^{jl} t^{kl}) \cdot (R^{ip} x^p)(R^{jq} y^q)$$
$$= (R^{ik} R^{ip})(R^{jl} R^{jq}) t^{kl} x^p y^q$$
$$= \delta^{kp} \delta^{lq} t^{kl} x^p y^q = x^k y^l t^{kl} = t(\bar{x}, \bar{y}) \checkmark$$

<u>Achtung!</u> Im Gegensatz zum Fall $m=1$, lässt sich <u>nicht</u> jeder Rang-2-Tensor als $u \otimes w$ schreiben. <u>Aber:</u> Jeder solche Tensor kann als endliche Summe $\sum_\alpha u_\alpha \otimes w_\alpha$ geschrieben werden.

Fakt: Ein Tensor vom Rang m transformiert sich wie:

$$t \to t' = Rt \quad \text{mit} \quad \boxed{t'^{i_1 \cdots i_m} = R^{i_1 j_1} \cdots R^{i_m j_m} t^{j_1 \cdots j_m}.}$$

(Die Invariant von $t(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ folgt wie oben bei $m=2$.)

Fortgeschritten: Eine Gruppe wirkt auf einem Vektorraum natürlicherweise als eine Matrix. Die Abb. Gruppenelement $\to$ Matrix heißt (unter gewissen Bedingungen, die bei uns stets erfüllt sind) Darstellung. Bisher waren unsere Gruppen selbst Matrixgruppen und die obige Darstellung war die Identitäts-Abb. Deshalb war die Terminologie "Darstellung" unnötig. Tensoren (z.B. für $m=2$) bilden auch einen Vektorraum und die "Darstellung" ist jetzt nichttrivial:

$$\underbrace{R \in SO(n)}_{\text{mit Elementen } R^{ij}} \longmapsto \underbrace{D(R) \in n^2 \times n^2\text{-Matrizen}}_{\text{mit Elementen}}$$

$$D(R)^{ij,kl} = R^{ik} R^{jl}$$

erster Index (n^2 Werte) zweiter Index (n^2 Werte)

Dieses $D(R)$ wirkt wie oben beschrieben auf Tensoren:

$$t^{ij} \longmapsto D(R)^{ij,kl} t^{kl}.$$

Weiteres Beispiel mit $m=2$: δ^{ij} (Kronecker-Delta).

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \delta^{ij} x^i y^j = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Transf.: $\delta'^{ij} = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = \delta^{ij}$

δ^{ij} ist also ein "invarianter Tensor".

Wichtiges Bsp. mit $m=n$: $\varepsilon^{i_1 \cdots i_m}$ (Levi-Civita-Tensor).

(Zur notationellen Vereinfachung diskutieren wir nur den Fall $m=n=3$.)

$$\varepsilon(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \varepsilon^{ijk}x^i y^j z^k = x^i\,\varepsilon^{ijk}y^j z^k = \bar{x}\cdot(\bar{y}\times\bar{z})$$

<u>Trf.:</u> $\varepsilon'^{\,i_1 i_2 i_3} = R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} R^{i_3 j_3}\varepsilon^{j_1 j_2 j_3} \underset{\uparrow}{=} \varepsilon^{i_1 i_2 i_3}\det R \underset{\uparrow}{=} \varepsilon^{i_1 i_2 i_3}$

siehe oben, mit $R \leftrightarrow R^T$

für $R \in SO(3)$.

$$\boxed{\text{"}\varepsilon^{ijk}\text{ ist invarianter Tensor der } SO(3)\text{."}}$$

(falls R Reflexion, wechselt ε das Vorzeichen)

<u>Wichtiger Fakt:</u> Falls t_1, t_2 Tensoren vom Rang m_1, m_2 sind ist

$$t_1^{\,i_1\cdots i_l i_{l+1}\cdots i_{m_1}}\, t_2^{\,i_1\cdots i_l j_{l+1}\cdots j_{m_2}} \equiv t^{\,i_{l+1}\cdots i_{m_1} j_{l+1}\cdots j_{m_2}}$$

ein Tensor vom Rang m_1+m_2-2l.

(Beweis wie bei Invarianz von $t(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)$. Man muss einfach $R^{ij}R^{ik} = \delta^{jk}$ vielfach benutzen.)

<u>Anwendung:</u> $\bar{a}\times\bar{b}$ ist (Pseudo)vektor:

$$(\bar{a}'\times\bar{b}')^i = \varepsilon^{ijk}a'^j b'^k \underset{\uparrow}{=} \pm\,\varepsilon'^{ijk}a'^j b'^k \underset{\uparrow}{=} \pm R^{il}\,\varepsilon^{ljk}a^j b^k$$

$$= \pm R^{il}(\bar{a}\times\bar{b})^l \quad ✓.$$

"+" für $R \in SO(3)$ obiger "Fakt"

<u>Aufg.:</u> Rechnen Sie "direkt" nach, dass $\varepsilon'^{ijk}a'^j b'^k = R^{il}\varepsilon^{ljk}a^j b^k$ ist.

<u>5.3 Galilei-Transformationen</u>

- <u>Bisher:</u> eukl. Raum $\mathbb{R}^3$ mit Symm.gr. $O(3)$
- <u>jetzt:</u> phys. Raum-Zeit und deren Symm.gr. – die Galilei-Trf.-en

  – <u>Es kommt hinzu:</u> Zeit $t \in \mathbb{R}$ (Wir reden nicht mehr von Punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, sondern von <u>Ereignissen</u> $(t,\bar{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.)

  – <u>Es geht verloren:</u> Sonderrolle von $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$ ($|\bar{x}|$ & $|\bar{y}|$ sind unphys., nur $|\bar{x}-\bar{y}|$ hat phys. Realität. Ebenso für t.)

- Damit haben wir als Symm.-Trf.-en:

1) <u>Rotationen</u>: $(t,x) \longrightarrow (t, Rx)$ mit $R \in O(3)$ (wie bisher)

2) <u>Translationen</u>: $(t,x) \longmapsto (t+s, x+y)$ mit $s \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}^3$

3) <u>Boosts</u>: $(t,x) \longmapsto (t, x+vt)$ mit $v \in \mathbb{R}^3$

<u>Kommentar</u>: 1) ist Symm. des Raumes ; 2) entspricht der "Abschaffung" der $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ & $0 \in \mathbb{R}$; 3) bedeutet, dass die in 2) enthaltenen Translationen in $\mathbb{R}^3$ auch (linear!) von t abhängen dürfen (<u>Physikalisch</u>: Ruhe ist äquiv. zu geradliniger gleichförmiger Bewegung.)

- Die <u>Galilei-Gruppe G</u> ist die von 1), 2) & 3) "generierte" Gruppe (sprich: Alle Elemente von 1), 2) & 3) sowie beliebige Verknüpfungen)

- <u>Nichttrivialer Fakt</u>: Jedes $g \in G$ ist darstellbar als $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$

Boost, Translation, Rotation

(Zum Beweis muss man sich u.a. folgendes überlegen: Betrachte eine Galilei-Trf. der Form $g_2 \circ g_1 \circ g_2'$, aufgebaut aus Rot. g_1 & Translationen g_2, g_2'. Dann gibt es eine Rot. g_1'' & Transl. g_2'', so dass

$$g_2 \circ g_1 \circ g_2' = g_2'' \circ g_1''.)$$

[siehe auch Übungen]

<u>Weitere Kommentare</u>:

- "Boost" heißt "Zunahme" (der Geschwindigkeit). Das sieht man z.B. am Boost einer Trajektorie:

$$(t, x(t)) \longmapsto (t, x(t) + v_0 t)$$

$$v = \dot{x}(t) \qquad v' = \dot{x}(t) + \underbrace{v_0}_{\text{extra Beitrag}}$$

- Boosts zerstören das Konzept von "Gleichörtlichkeit":

$$(t,x)\ ,\quad (t',x) \qquad \text{— zwei Ereignisse am gleichen Ort}$$

$$\downarrow \text{Boost}$$

$$(t, x+vt\ ,\quad (t', x+vt') \qquad \text{— i.A. \underline{nicht} am gleichen Ort}$$

- Während dies schon eine Art "Mischung" von Ort & Zeit darstellt, ist diese Mischung jedoch noch eingeschränkt: Die analoge Mischung

$$(t,x) \longmapsto (t+c\cdot x, x)$$

ist nämlich verboten. Sie würde auch die "Gleichzeitigkeit" relativieren und tritt erst mit den "Lorentz-Boosts" der Spez. Rel.th. auf.

5.4 Affiner Raum

- Unsere Einführung der $O(3)$ als Symm. des eukl. Raumes war "elegant": Es sind alle umkehrbaren Trf.-en, die lin. Struktur & Skalarprodukt respektieren.
- Unsere Einführung der Galilei-Gr. G war nicht so elegant: Das "Ignorieren der Null" im Vektorraum ist gewissermaßen "von Hand" passiert. Dies geht aber besser:

Def. des affinen Raums: Gegeben: Menge A, Vektorraum V, Abb.:

$$A \times A \longrightarrow V$$
$$(P, Q) \longmapsto \vec{PQ}\ ,\ \text{so dass}$$

- $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$
- Zu jedem $P \in A$ & $\vec{v} \in V$ $\exists$ eindeutig ein $Q \in A$ mit $\vec{v} = \vec{PQ}$.

$\boxed{\text{Das Paar } (A,V) \text{ heißt affiner Raum}}$

Beispiel: Zu jedem Vektorraum V erhalten wir wie folgt einen affinen Raum:

$$A \equiv V\ ;\quad \text{Abb.: } V \times V \to V$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{y} - \bar{x}\ .$$

Anwendung auf phys. Raum-Zeit:

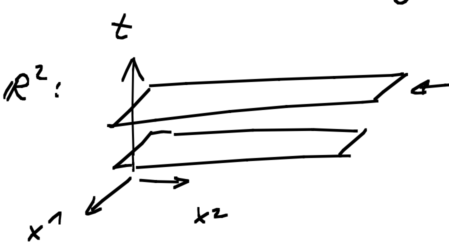
- Sei A^4 der, wie im Bsp. beschrieben, zu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ gehörende aff. Raum. (Also ist insbes. $A^4 \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ als Menge.)

- Def.: 1) Zeitfunktion: $(t,x)\,,\,(t',x') \longmapsto t-t'$

  2) Abstandsfkt. (nur definiert für gleichzeitige Ereignisse):

$$\underbrace{(t,x)\,,\,(t,x') \longmapsto |x-x'|}_{1)+2)\ \equiv\ \text{"Galileische Struktur"}}$$

Intuitiv: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$:



← Für jedes Punktepaar aus solch einer Ebene ist Zeitfkt. Null ("Gleichzeitigkeit")

- A^4 mit Galileischer Struktur ist phys. Raum-Zeit.

- G sind alle Trf.-en des A^4, welche dessen Struktur als affiner Raum & seine Galileische Struktur respektieren.

5.5 Dynamik

- Unsere bisherige Diskussion war rein beschreibend (kinematisch). Die entscheidende phys. Forderung ist nun, dass auch die Dynamik unter der bisher identifizierten Symmetriegruppe G invariant ist. Dazu betrachten wir eine $(t, \bar{x}(t))$, welche die Bew.gleichungen erfüllt:

$$m\,\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \bar{F}(t,\bar{x})\,.$$

Wir wollen prüfen, ob dies auch für die allg. transformierte Trajektorie

$$(t', \bar{x}(t')) = \left(t+s,\ R\bar{x}(t)+\bar{y}+\bar{v}\cdot(t+s)\right)$$

gilt. Dazu berechnen wir:

$$m\frac{d^2\bar{x}'}{dt'^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{weil } t'=t+s}}{=} m\frac{d^2\bar{x}'}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(R\bar{x}(t)+\bar{y}+\bar{v}(t+s)\right) = mR\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$$

$$= R\bar{F}(t,\bar{x})$$

Wir haben also $\quad m\dfrac{d^2\bar{x}'}{dt'^2} = \bar{F}'(t',\bar{x}')$

genau dann wenn $\quad \bar{F}'(t',\bar{x}') = R\bar{F}(t,\bar{x}).^{*)}$ ← siehe nächste Seite

⇒ ‖ Newtonsche Dynamik ist unter Galilei-Trf.-en invariant, wenn sich Kräfte unter Drehungen wie Vektoren transformieren ‖ (was wir natürlich schon gefordert hatten).

<u>Schlusskommentare:</u>

- Das hier durchgespielte Schema,

  1) Beschreibung der Bewegung festlegen ("Spielfeld")
     <u>hier:</u> aff. Raum-Zeit mit Galilei-Struktur
  2) Symmetriegruppe identifizieren
     <u>hier:</u> Galilei-Gruppe
  3) Invarianz der Dynamik fordern / prüfen
     <u>hier:</u> Newt. Grundgesetz ("Spielregeln")

  wiederholt sich in der theor. Physik in vielen Variationen.

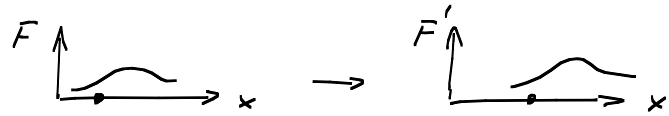
- Wir haben viel mehr Zeit in Drehungen investiert (investieren müssen) als in Translationen & Boosts. Dies ist kein Zufall: Im Folgenden (in ca. 1 Jahr) werden Sie in der Spez. Rel. th. lernen, dass die volle Symm. eigentlich die "Drehungen" und Translationen des $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$. Die Galilei-Boosts werden "mit abfallen".

*) <u>Nachtrag zur Trf. von $\bar{F}(t,\bar{x})$</u>

- Selbst wenn wir $R = \mathbb{1}$ wählen, transformiert $\bar{F}(t,\bar{x})$ nichttrivial:

$$\bar{F}'(t',\bar{x}') \neq \bar{F}(t,\bar{x}) \quad \text{sondern:} \quad \bar{F}(t',\bar{x}') = \bar{F}(t,\bar{x}).$$

- Dies ist anschaulich klar: Wenn wir den Massenpunkt verschieben muss das (nichtkonstante) Kraftfeld mitverschoben werden – sonst hätten wir nicht mehr die gleiche phys. Situation:



- Bei geschwindigkeitsabhängigen Kräften (z.B. Reibung $\sim -\dot{\bar{x}}$ im Medium) wird es noch komplizierter. Wir müssen einen Vektor $\bar{u}$ einführen, der die Geschw. des Mediums beschreibt. Jetzt können wir die Reibung als $\bar{F}_R = -\alpha(\dot{\bar{x}} - \bar{u})$ beschreiben.
Nach Boost um $\bar{v}$ ist dann
$$\bar{F}_R' = -\alpha\left((\bar{x}+\bar{v})^{\cdot} - (\bar{u}+\bar{v})^{\cdot}\right) = -\alpha(\dot{\bar{x}} - \bar{u}),$$
so dass wir nach dem Boost (von Massenpkt. UND Medium) wieder die gleiche Physik haben.