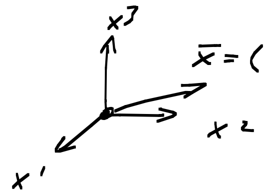
6 Wechsel des Koord.systems / Scheinkräfte

6.1 Wechsel des Koord.systems im eukl. Raum

- Zunächst konzentrieren wir uns auf den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ (z.B. $n=3$) als den anschaulichen phys. Raum.

  (Null sei fest gewählt – im Moment <u>keine</u> Translationen!)



$\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$

- Unsere bisherige Beschreibung von $\bar{x}$ durch Komponenten hängt eigentlich an einer ganz bestimmten Vektorraum-<u>Basis</u> (→ Lin. Alg. Vorl.):

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^i \bar{e}^i .$$

- Wichtig! $\{\bar{e}^i\}$ ist ein Satz von 3 Vektoren der Länge 1, <u>nicht</u> die Komponenten eines Vektors (wie bei "x^i").

- Da wir unseren Vektorraum als $\mathbb{R}^n$ definiert haben, war bisher stets eine "natürliche" Basis ausgezeichnet, aber i.A. (z.B. für den Raum der Physik) gibt es keine solche "besondere" Basis.

- Wir können, gegeben eine Basis, eine andere Basis (ein anderes Koord.system) wählen:
$$\bar{e}^{\prime i} = R^{ij} \bar{e}^j .$$

  (Das ist völlig analog zu $\bar{x} = x^i \bar{e}^i$: Wir schreiben $\bar{e}^{\prime i}$ als Lin.komb. von $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$.)

- <u>Fakt</u>: $\{\bar{e}^{\prime i}\}$ ist wieder Basis $\iff R \in GL(n)$

  Wir werden sind primär am eukl. Raum & an <u>Orthonormalbasen</u> interessiert.

$$\boxed{\bar{e}^i \bar{e}^j = \delta^{ij}}$$

- Fakt: Sei $\{\bar{e}^i\}$ Orth.-Basis. $\{\bar{e}'^i\}$ ist auch eine $\Leftrightarrow R \in O(n)$

Begründung: $\bar{e}'^i \cdot \bar{e}'^j = (R^{ik}\bar{e}^k)\cdot(R^{jl}\bar{e}^l) = R^{ik}R^{jl}\delta^{kl} = \delta^{ij}$.

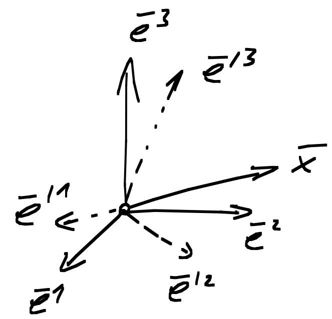
- Wir können einen festen Vektor $\bar{x}$ bzgl. der neuen Basis zerlegen:

$$\bar{x} = x'^i\bar{e}'^i = x'^i R^{ij}\bar{e}^j = x^j\bar{e}^j$$

$$\Rightarrow x^j = x'^i R^{ij} \quad \Big| \; (R^T)^{jk}$$

$$x^j (R^T)^{jk} = x'^i R^{ij}(R^T)^{jk} \quad \Rightarrow \boxed{x'^k = R^{kj}x^j}$$

- Dass bei diesem "Koordinatenwechsel" das gleiche R auftaucht ist natürlich kein Zufall,



denn: $\bar{e}'^i$ geht aus $\bar{e}^i$ durch "Drehung um R^{-1}" hervor (Drehung im Sinne von Kapitel 5). Dazu muss man sich nur klarmachen, dass $\bar{e}^i$ bzgl. der Basis $\{\bar{e}^t\}$ die Komponenten δ^{ij} hat:

$$\bar{e}^i = \delta^{ij}\bar{e}^j.$$

Ebenso hat $\bar{e}'^i$ bzgl. $\{\bar{e}^j\}$ die Komp.-en R^{ij}:

$$\bar{e}'^i = R^{ij}\bar{e}^j.$$

(Hier ist i beliebig aber fest gewählt.)

Da nun $\underbrace{(R^{ij})}_{\text{j-te Komp. von } \bar{e}'^i} = \underbrace{(R^{-1})^{jk}}_{\text{Drehung im Sinne von Kap. 5}} \underbrace{\delta^{ik}}_{\text{k-te Komp. von } \bar{e}^i}$ gilt*, ist die Behauptung gezeigt.

$\boxed{\text{*) weil } R^{-1} = R^T}$

Also: Da $\bar{e}'$ aus $\bar{e}$ durch R^{-1} hervorgeht, "sieht" $\bar{x}$ aus Sicht von $\bar{e}'$ "wie um R gedreht aus": $x'^i = R^{ij}x^j$.

6.2 Aktive / Passive Beschreibung von Symmetrien.

- **Aktiv:** Transformiere das phys. Objekt (Koord.syst. fest)
- **Passiv:** Wechsle Koord.system bzw. Basis (Objekt fest)

Bsp. 1: Vektoren im eukl. Raum

- Aktiv: $x \rightarrow x' = Rx$

  Symmetrieforderung: $\bar{x}' \cdot \bar{y}' = \bar{x} \cdot \bar{y}$ („Skalarprodukt inv.")

- Passiv: $\bar{x}$ fest, Komponenten: x^i in Basis $\{\bar{e}^i\}$ ← Orthonorm.!

  Komponenten: $x'^i = R^{ij} x^j$ in Basis $\{\bar{e}'^i\}$

  (mit $\bar{e}'^i = R^{ij} \bar{e}^j$)

  Symm.forderung: Der math. Ausdruck für's Skalarprodukt soll in alten & neuen Komponenten die gleiche Form haben.

  In der Tat: alt: $\bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i$

  neu: $\bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i = \left[(R^{-1})^{ij} x'^j\right]\left[(R^{-1})^{ik} y'^k\right]$

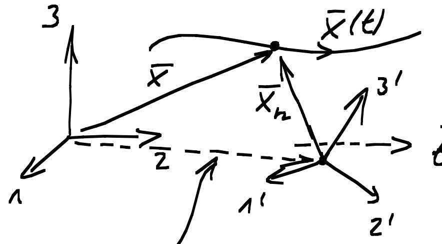
  $= x'^i y'^i$ ✓

Bsp. 2: Galilei-Trf.

- Aktiv: $(t, x(t)) \longrightarrow (t+s, Rx(t) + y + (t+s) \cdot v)$

  Symm.forderung: Falls alte Traj. phys. Bew., dann neue Traj. auch phys. Bew.

- Passiv:



← Geschw. des neuen Systems

$\{\bar{x}_0 = \bar{a} + \bar{b}t\}$ sei der Vektor, welcher vom alten zum neuen Koord. ursprung zeigt. Das neue System sei außerdem um Drehmatrix A gedreht.

Wir sehen sofort: $\bar{x}_n = \bar{x} - (\bar{a} + \bar{b}t)$

für "bezgl. neuen Ursprungs".

Wir wollen jetzt die Komponenten von $\bar{x}_n$ bezgl. der neuen (gedrehten) Basis mit x'^i bezeichnen. Dann gilt:

$$x'(t) = A^{-1}(x - a - tb) = Rx + y + t \cdot v \quad \text{mit } R = A^{-1}, \; y = -A^{-1}a, \; v = -A^{-1}b.$$

Wichtige Beobachtung: Das sieht formal genau so aus, wie die aktive Trf. (bis auf das "s", was wir auch noch einführen könnten, wenn wir die "neue Uhr" umstellen).

<u>Aber</u>: Die phys. Interpret. ist eine andere, und die Symm. forderung ist eine andere: <u>Die Bew.gleichungen in x' sollen die gleiche Form haben, wie in x:</u>

In der Tat: $\ddot{x}' = R\ddot{x} = RF/m = F'/m$

$F' = RF$, weil F' die Komponenten aus Sicht des um R^{-1} gedrehten Systems sind.

<u>6.3 Beschleunigte, nichtrotierende Bezugssysteme</u>

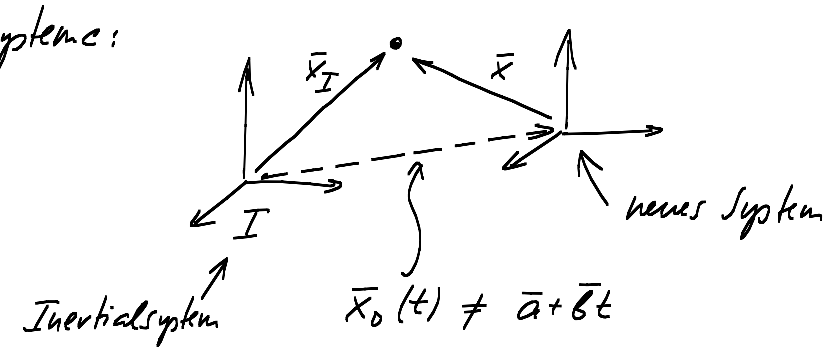
(= Koord. systeme)

Jetzt wird es erst spannend: Wir verlassen das Gebiet der Symm.trf.-en & erlauben <u>Nicht</u>inertialsysteme:

$\bar{x}_I = \bar{x}_0 + \bar{x} \quad \Leftarrow$

$\Downarrow$

$\ddot{\bar{x}} = \ddot{\bar{x}}_I - \ddot{\bar{x}}_0$



$$\Downarrow$$

$$m\ddot{\bar{x}} = m\ddot{\bar{x}}_I - m\ddot{\bar{x}}_0 = \bar{F} + \bar{F}_s \quad ; \quad \bar{F}_s \equiv -m_0\ddot{\bar{x}}_0$$

Im Nichtinertialsystem bewegt sich der Körper so, als gäbe es eine zusätzliche Kraft $\bar{F}_s$ (die "Scheinkraft").

$$\boxed{m\ddot{\bar{x}} = \bar{F} + \bar{F}_s}$$

Wenn das System nicht rotiert, ist $\boxed{\bar{F}_s = -m\ddot{\bar{x}}_0}$.

Bsp: Beim Anfahren wird man im Auto nach hinten gedrückt.
(Bzw.: Wenn man zurückgelehnt war, bleibt man im Auto in Ruhe, was aber auf die echte Kraft der Rückenlehne zurückzuführen ist, welche die Scheinkraft kompensiert.)

6.4 Kleine Drehungen

- Interessant wird es eigentlich erst, wenn das Bezugssystem auch rotieren darf. Um dies math. zu beschreiben, müssen wir Drehungen R für kleine Drehwinkel genauer zu beschreiben lernen.

- Sei z.B. $R(t) \in SO(3)$ mit $R(0) = \mathbb{1}$ eine zeitabh. Drehmatrix. (Man denke an ein Koord. syst., das bei $t = 0$ mit dem alten zusammenfällt, dann aber kontinuierlich gedreht wird.)

- Für $t = \epsilon$ klein gilt mit Taylor (elementweise angewandt):

$$R(\epsilon) = \mathbb{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3x3-Matrix}}}{\epsilon \cdot T} + O(\epsilon^2)$$

- $R(\epsilon)R(\epsilon)^T = \mathbb{1} \Rightarrow (\mathbb{1} + \epsilon T + O(\epsilon^2))(\mathbb{1} + \epsilon T + O(\epsilon^2))^T = \mathbb{1}$

$$\mathbb{1} + \epsilon(T + T^T) + O(\epsilon^2) = \mathbb{1}$$

$$\underline{\underline{T + T^T = 0}} \quad (T \text{ ist antisymmetrisch})$$

- Die antisymm. Matrizen bilden Vektorraum. Eine Basis ist z.B.

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&-1&0 \end{pmatrix} ; \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0&0&-1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} ; \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \text{so dass } T = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur Konvention.}}}{-} \alpha^i T^i$$

- Bisher gilt all dies auch für allgemeine n (die allg. Dim. des Raumes der antis. Matr. ist $n(n-1)/2$). Speziell für $n=3$ haben wir:

$$(T^i)^{jk} = \varepsilon^{ijk}.$$

- <u>Behauptung</u>: Obiges $R(\epsilon)$ beschreibt eine Drehung um die durch $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}$ definierte Achse mit Drehwinkel $\Delta\varphi = \varepsilon |\vec{\alpha}|$.

- <u>Begründung</u>: Wir begnügen uns mit der speziellen Wahl $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |\vec{\alpha}|$:

$$R(\epsilon) = \mathbb{1} + \epsilon |\vec{\alpha}| \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&-\Delta\varphi \\ 0&\Delta\varphi&1 \end{pmatrix} + O(\Delta\varphi^2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&\cos\Delta\varphi&-\sin\Delta\varphi \\ 0&\sin\Delta\varphi&\cos\Delta\varphi \end{pmatrix} + O(\Delta\varphi^2).$$

- <u>Kommentar</u> (fortgeschritten): Die antisymm. Matrizen bilden die mit $so(n)$ oder $Lie(SO(n))$ bezeichnete "Lie Algebra" der "Lie Gruppe" $SO(n)$. Die $so(n)$ ist ein Vektorraum und es gibt für eine Umgebung der $0 \in so(n)$ und der $\mathbb{1} \in SO(n)$ eine eineindeut. Abb.

$$so(n) \longrightarrow SO(n) \quad ; \quad H \longmapsto e^H$$

(Für letztere haben wir mit $\quad \epsilon T \longmapsto R(\epsilon) = \mathbb{1} + \epsilon T$ gerade die "linearisierte" Näherung betrachtet.)

Diese Struktur von Lie-Gruppe / Lie-Alg. existiert, grob gesagt, für alle "kontinuierlichen" Gruppen bzw. Symmetrien.

- <u>Anwendung</u>: Es ist bequem, einen Vektor $\vec{\Delta\varphi} = \varepsilon \cdot \vec{\alpha}$ einzuführen, so dass $|\vec{\Delta\varphi}| = \Delta\varphi$ und wir unser obiges R

direkt als Fkt. von $\Delta\bar{\varphi}$ auffassen können:

$$R_{\Delta\bar{\varphi}} = \mathbb{1} - \Delta\varphi^i T^i \qquad (\bar{\alpha}, \epsilon \text{ obsolet!})$$

$$(R_{\Delta\bar{\varphi}})^{jk} = \delta^{jk} - (\Delta\varphi)^i \varepsilon^{ijk}$$

$$(R_{\Delta\bar{\varphi}} - \mathbb{1})^{jk} = \varepsilon^{jik}(\Delta\varphi)^i \quad \Big| \cdot v^k$$

(für beliebigen Vektor $\bar{v}$)

$$\boxed{(R_{\Delta\bar{\varphi}} - \mathbb{1}) \cdot v = \Delta\bar{\varphi} \times \bar{v}}$$

Jetzt fassen wir die Drehung als kontinuierlichen Prozess auf, mit

$$v(t=0) = v \longrightarrow v(t = \Delta t) = R_{\Delta\bar{\varphi}}\, v.$$

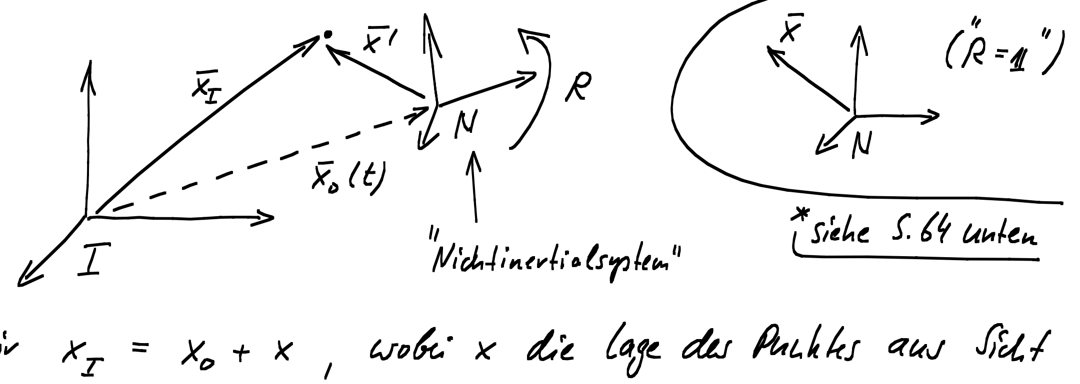
Wir finden $\dfrac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \dfrac{(R_{\Delta\bar{\varphi}} - \mathbb{1})v}{\Delta t} = \left(\dfrac{\Delta\bar{\varphi}}{\Delta t}\right) \times \bar{v} \equiv \underline{\underline{\bar{\omega} \times \bar{v}}}$.

(im limes $\Delta t \to 0$).

Das hier definierte $\bar{\omega}$ heißt <u>Winkelgeschwindigkeit</u>: $\boxed{\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{\varphi}}{\Delta t}}$

6.5 Rotierende Koordinatensysteme

- Ganz analog zu 6.3 betrachten wir nun ein <u>allgemeines</u> Nichtinertial-system:



*siehe S. 64 unten

- Oben hatten wir $x_I = x_0 + x$, wobei x die Lage des Punktes aus Sicht des Nichtinertialsystems war. Jetzt rotiert dies System auch noch, so dass gilt

$$\boxed{x_I = x_0 + x' \quad \text{mit} \quad x' = R x}$$

(Wir reden hier von Komponenten, <u>nicht</u> abstrakten Vektoren!)

- Wir lassen $x_0 = x_0(t)$ & $R = R(t)$ ganz allgemein. Wir wissen:

$m\ddot{x}_I = F_I$ (Newton!) , also: $\boxed{m\ddot{x}_0 + m(Rx)^{\cdot\cdot} = RF}$

- Ab sofort: $\bar{x}_0 \to \bar{r}_0$; $\bar{x} \to \bar{r}$ (Wegen "x" des Kreuzprodukts).
- Wir konzentrieren uns nur auf die <u>Vereinfachung von $(Rr)^{\cdot\cdot}$</u>:

– Zunächst: $\dot{R} \approx \dfrac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} \equiv \dfrac{R_{\Delta t} \cdot R(t) - R(t)}{\Delta t}$,

wobei $R_{\Delta t}$ in Analogie zum $R_{\overline{\Delta\varphi}}$ eine <u>kleine</u> Drehung ist, die unser Koord.syst. bei t in das bei $t+\Delta t$ überführt.

$$\dot{R}r \approx \frac{R_{\Delta t} - \mathbb{1}}{\Delta t} \cdot Rr = \underbrace{\omega_I}_{\text{im Inertialsystem}} \times Rr$$

– In Analogie zu $x' = Rx$ (bzw. $r' = Rr$) gilt auch $\omega_I = R\omega$, wobei <u>$\bar{\omega}$ die Winkelgeschw. des rot. Systems aus Sicht des rot. Systems</u> ist.

Also: $\underline{\dot{R}r = (R\omega) \times (Rr) = R \cdot (\omega \times r)}$

wichtiges Zwischenergebnis!

– Jetzt müssen wir nur noch rechnen:

$$\begin{aligned}(Rr)^{\cdot\cdot} &= (R\dot{r} + \dot{R}r)^{\cdot} = (R\dot{r} + R(\omega \times r))^{\cdot} \\ &= R\ddot{r} + \dot{R}\dot{r} + \dot{R}(\omega \times r) + R(\dot{\omega} \times r) + R(\omega \times \dot{r}) \\ &= R(\ddot{r} + \omega \times \dot{r} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}) \\ &= R(\ddot{r} + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r)\end{aligned}$$

– Einsetzen in $m\ddot{r}_0 + m(Rr)^{\cdot\cdot} = RF$; auflösen nach $mR\ddot{r}$; multiplizieren mit R^{-1}:

$$m\ddot{r} = F - m\underbrace{[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kraft durch} \\ \text{Beschl. d. Ursprungs}}}{R^{-1}\ddot{r}_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zentrifugal-} \\ \text{kraft}}}{\omega \times (\omega \times r)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coriolis-} \\ \text{Kraft}}}{2\omega \times \dot{r}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tangentiale} \\ \text{Beschleunigung}}}{\dot{\omega} \times r}]}_{\text{Scheinkräfte}}$$

Kommentare:

- tang. Beschl. verschwindet z.B. wenn $\bar{\omega}$ = const. oder $\bar{r} = 0$.

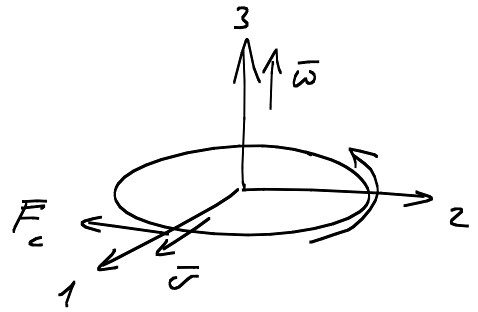
- Zentrifugalkraft: $-[\omega \times (\omega \times r)]^i = -\varepsilon^{ijk}\omega^j \varepsilon^{klm}\omega^l r^m =$

$$= -[\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}]\,\omega^j\omega^l r^m = -\omega^i (r\cdot\omega) + r^i(\omega^2)$$

Speziell für $\bar{r} \perp \bar{\omega}$: $\quad \bar{F}_z = m\,\omega^2 \cdot \bar{r}$

- Corioliskraft: Sei zur Vereinfachung $\dot{\bar{r}} \perp \bar{\omega}$ (etwa $\bar{\omega} \parallel \hat{e}_3$; $\dot{\bar{r}} \parallel \hat{e}_1$)

Dann folgt $\bar{F}_c = -2m|\omega||v|\,\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -2m|\omega||v|\,\bar{e}_2$



Intuitiv klar: Der nach außen laufende Massenpkt. hat die Tendenz, gegenüber der sich drehenden Scheibe zurückzubleiben.

Berühmte Beispiele:
- Drehrichtung im Abfluss
- vorherrschende Windrichtung auf N/S-Halbkugel
- unterschiedl. Abnutzung von Gleisen, Flussufern etc.

Kommentar zu S. 62

Es ist nützlich, diese Diskussion mit den Formeln von 6.1 zu vergleichen. Vergessen wir dazu im Moment die Verschiebung um $\bar{x}_0$ (dies ist für die Drehung nicht wichtig). Dann ist das ungedrehte System N mit I identisch. Für den abstrakten Vektor ist $\bar{x} \equiv \bar{x}'$ und seine Komponenten im ungedrehten System N sind x'^i. Seine Komponenten im gedrehten System N sind x^i. Es gilt also $x^i = (R^{-1})^{ij} x'^j$, weil das System um R gedreht wurde. Es passt somit alles perfekt mit 6.1 zusammen (bis auf die Umbenennung $R^{-1} \leftrightarrow R$).