7 Zentralkraftproblem

7.1 Motivation

Wie wir bereits gelernt haben, können Kräfte zwischen zwei Massenpkt.-en, die parallel zur Verbindungsstrecke wirken, durch ein Potential beschrieben werden:

$$\bar{F}_1 = -\bar{\nabla}_1 V(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|).$$

Eine besondere Rolle spielen Kräfte mit $V(r) \sim \frac{1}{r}$.

① Gravitation:

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|} \quad ; \quad \bar{F}_1 = -\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^3} \cdot G_N m_1 m_2$$

$$= \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|} \cdot \frac{G_N m_1 m_2}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}$$

(Das Auftreten der "trägen Masse" in dieser Formel, also "träge M. = schwere M.", ist nichttrivial und erst in ART zu verstehen.)

② Elektrostatik: $V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}$

- Die Situation ist einfacher, wenn z.B. m_2 bei $\bar{0}$ fixiert ist (z.B. weil $m_2 \gg m_1$):

$$V(\bar{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\bar{x}|} \quad \left(\text{oder } V(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r}\right).$$

7.2 Zweikörperproblem → Zentralkraftproblem

Zweikörperproblem:

$$m_1 \ddot{\bar{x}}_1 = -\bar{\nabla}_1 V(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|)$$
$$m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = -\bar{\nabla}_2 V(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|)$$

$$\Rightarrow ① \quad \ddot{\bar{x}}_1 - \ddot{\bar{x}}_2 = \frac{1}{m_1}(-\bar{\nabla}_1 V) - \frac{1}{m_2}(-\bar{\nabla}_2 V) = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\equiv \frac{1}{m}}(-\bar{\nabla}_1 V)$$

← "reduzierte Masse"

② $m_1 \ddot{\bar{x}}_1 + m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = 0$

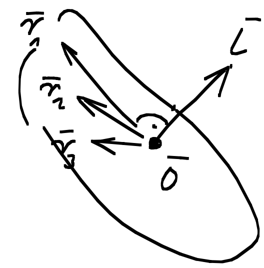
bzw. $\ddot{\bar{x}}_S = 0$, wobei $\bar{x}_S \equiv \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2}$.

$\Rightarrow$ Wir haben:
- freie Bewegung des Schwerpunkts
- "Bewegung der Relativkoordinate" im gegebenen 2-Körper-Potential, aber mit $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Wir können uns also jetzt o.B.d.A. dem Zentralkraftproblem zuwenden.

7.3. Zentralkraftproblem (zunächst noch allgemeines $V(r)$!)

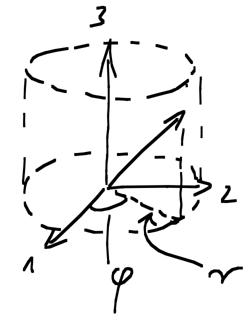
- Wir wissen bereits: $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \text{const.}$ $\quad (\bar{p} = m\dot{\bar{r}})$
- Da $\bar{r} \perp \bar{L}$, verläuft die Bewegung in einer festen Ebene (die wir o.B.d.A. als 1-2-Ebene wählen können).



M10 Allgemeine Koordinatensysteme

Wir haben im Zush. mit $\mathbb{C}$ bereits gelernt, dass wir die Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ durch $x^1 = \operatorname{Re} z$, $x^2 = \operatorname{Im} z$ oder $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$ beschreiben können. Letzteres heißt Polarkoordinaten und ist das einfachste Beispiel für die allg. Tatsache, dass wir (Teile des) $\mathbb{R}^n$ auf verschiedene Weise parametrisieren können:

Bsp.: Zylinderkoordinaten:



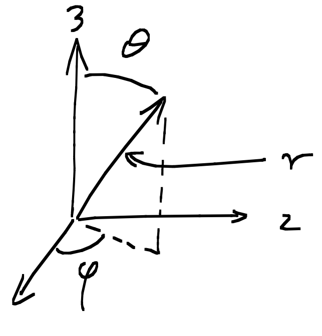
$$x_1 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\varphi$$
$$x_3 = z$$

(Also: Polarkoord. für x^1, x^2; "x^3 bleibt")

Wichtig ist, dass wir (zumindest im relevanten Teil des Raumes) eine eineindeutige Abb. haben: $(x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow (r, \varphi, z)$.

Hier z.B.: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$; $z = x_3$.

Bsp.: Kugelkoordinaten



$$x^1 = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$x^2 = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$x^3 = r \cos\theta$$

(Aufgabe: lösen Sie explizit nach r, φ, θ auf – ohne "aufs Bild zu schauen"!)

- In unserem Fall sind Polarkoordinaten angemessen (weil Ebene + Rot.symm.).
- Wir könnten $m\ddot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x})$ hinschreiben, $\bar{x}$ durch r, φ ausdrücken und losrechnen. Aber es geht viel eleganter: (ab jetzt wieder $\bar{x} = \bar{r}$)

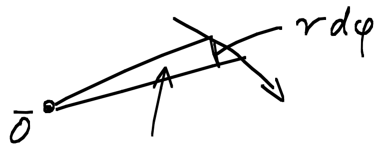
1) $\bar{L} = \text{const.} \Rightarrow |\bar{L}| = m\,|\bar{r} \times \dot{\bar{r}}| = m r \cdot \underbrace{r\dot{\varphi}}_{*} = \underline{\underline{m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}}}$

$$\dot{\bar{r}} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^{\cdot} = \underbrace{(\dot{r}\cos\varphi, \dot{r}\sin\varphi)}_{\parallel \bar{r}} + \underbrace{(r(-\sin\varphi), r\cos\varphi)\dot{\varphi}}_{\perp \bar{r}}$$

(Länge: $r\dot{\varphi}$)

*) Das ist der Betrag der Tangentialgeschwindigkeit.

Geometrische Interpretation der Konstanz von $|\bar{L}|$:



Fläche: $df = \frac{1}{2} r \cdot r\,d\varphi$

"Die Flächengeschwindigkeit ist konstant" $\Leftarrow$ $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$

(2. Keplersches Gesetz)

2) $E = \text{const.}$: $E = \frac{m}{2} \dot{\bar{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.}$

Diese beiden Erhaltungssätze genügen zur Lösung!

1) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}}}$; Mit 2): $\underline{\underline{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + V(r)}}$

Mit den beiden letzten Gl.-en ist das Problem in der Tat gelöst. Dazu definieren wir $U(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ und schreiben:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r).$$

Dies ist die "Energieerhaltung" eines "effektiven 1-dim. Problems" mit dem "effektiven Potential" $U(r)$. Wir wissen schon, dass dies zur Lösung genügt: Man löst nach dt auf und schreibt "$\int$" davor:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(r))}} \quad \Rightarrow \quad \int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(r))}}.$$

$\Rightarrow$ $r = r(t)$ ist <u>im Prinzip</u> bekannt.

- Die Bahnform erhält man durch $L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = d\varphi \frac{mr^2}{L}$; Einsetzen in obige Gl. mit "$dt = \dots$" und Integration gibt:

$$\int d\varphi = \int dr \, \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E-U(r))}}.$$

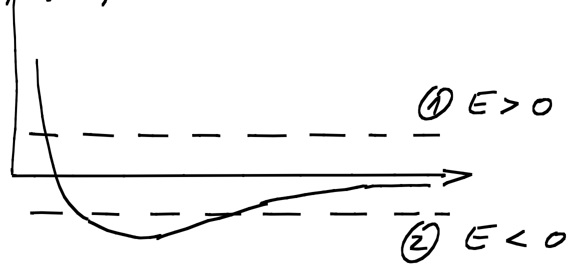
$\Rightarrow$ $r = r(\varphi)$ ist <u>im Prinzip</u> bekannt.

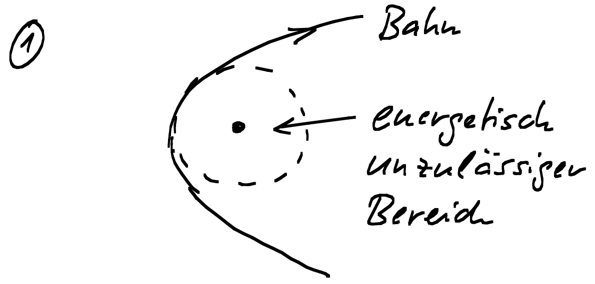
(Explizit lösbar sind z.B. $V \sim \pm\frac{1}{r}$ (siehe unten) & $V \sim r^2$ (3-dim. harmon. Oszillator).)

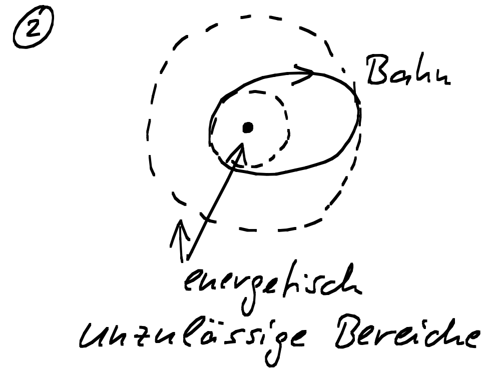
7.4 Qualitative Lösung des Zentralkraftproblems

- Energieerhaltung im äquiv. 1-dim. Problem: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r)$. mit $U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$.

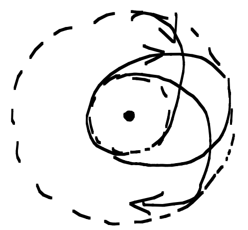
(Speziell "Kepler": $U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$; $\alpha = m_1 m_2 G_N$.)







<u>Zu ②</u>: Obiges Bild gilt nur für $V \sim 1/r$, weil sich die Bahn nur dann schließt. Die obige qualitative Diskussion gilt auch für allgemeineres $V(r)$, gibt aber dann:



(Vgl. "Periheldrehung" der Planetenbahnen)

7.5 Kepler-Problem: Bahnform

Wir können natürlich die obige allgemein Methode auf das $\frac{1}{r}$-Pot. anwenden und (in diesem Fall!) die Integrale lösen. Aber es geht eleganter:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \quad 0 = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \qquad \text{(Bew.gl.)}$$

- Wir können nun $\frac{d}{dt}$ in $\frac{d}{d\varphi}$ umschreiben:

$$\frac{d}{dt}(\ldots) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}(\ldots) = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}(\ldots).$$

- Insbesondere: $\dot{r} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}(r) = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$

Prüfe dies "rückwärts"!

Des Weiteren: $m\ddot{r} = m \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$

$$= -\frac{L^2}{mr^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Die obige Bewegungsgleichung impliziert also:

$$-\frac{L^2}{mr^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{L^2}.$$

Setze $u \equiv \frac{1}{r}$, $\frac{d}{d\varphi}(\dots) \equiv (\dots)'$

$$\Rightarrow u'' = -u + m\alpha/L^2$$ ($\hat{=}$ harmon. Oszill. im Kraftfeld)

Setze $w \equiv u - m\alpha/L^2$

$\Rightarrow w'' = -w$; allg. Lsg.: $w = A\cos(\varphi - \varphi_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} = A\cos(\varphi-\varphi_0)$$

Wir können o.B.d.A. $\varphi_0 = 0$ wählen.

$$\Rightarrow r = \frac{1}{m\alpha/L^2 + A\cos\varphi}$$

bzw. $\underline{\underline{r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}}}$ mit $\underbrace{p = \frac{L^2}{m\alpha}}_{\text{offensichtlich}}$; $\underbrace{e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}_{\text{zu prüfen durch explizite Berechnung von } E}$

Kegelschnitt!

Herleitung der obigen Formel für e:

Durch Ableiten von $r = p/(1+e\cos\varphi)$ nach t folgt sofort, daß $\dot r = 0$ bei $\varphi = 0$. An diesem Punkt gilt also

$$E = U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \text{für} \quad r = \frac{p}{1+e} = \frac{L^2/(m\alpha)}{1+e}$$

also: $$E = \frac{(1+e)}{L^2/(m\alpha)} \cdot \left(\frac{L^2}{2m} \cdot \frac{(1+e)}{L^2/(m\alpha)} - \alpha\right) = \frac{m\alpha(1+e)}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{2}(1+e-2)$$

$$E = (e^2-1)\frac{m\alpha^2}{2L^2} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad ✓$$

7.6 Kegelschnitte

(Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel)

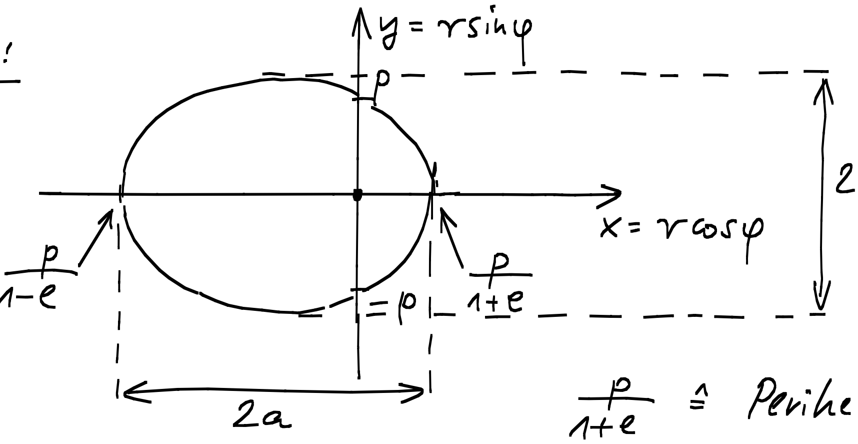
allg. Gleichung: $$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

① $e = 0 \Rightarrow r = \text{const.} \Rightarrow$ Kreisbahn (E = E_{min} für equiv. 1-dim. Problem)

② $0 < e < 1 \Rightarrow r$ bleibt beschränkt für alle φ; erwarte Ellipsenbahn

genauere Analyse:
$$\varphi = 0 \Rightarrow r = p/(1+e)$$
$$\varphi = \pi \Rightarrow r = p/(1-e)$$
$$\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow r = p$$

Skizze:



$\frac{p}{1+e} \hat{=}$ Perihelabstand

$$2a = p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{2p}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{p}{1-e^2}}}$$

(große Halbachse)

b erhalten wir als Maximalwert von y:

Wir können ebensogut y^2 maximieren. Wir fordern also

$$\frac{dy^2}{dr} = 0 \quad \text{wobei} \quad y^2 = (r\sin\varphi)^2 = r^2(1-\cos^2\varphi)$$

$$= r^2\left(1 - \frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2\right) = r^2 - \frac{1}{e^2}(p-r)^2.$$

$$\Rightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} 2\left(r + \frac{1}{e^2}(p-r)\right) \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{-p/e}{1-1/e^2} = \frac{p}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \quad y_{max}^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{1}{e^2}\cdot p^2\left(1 - \frac{1}{1-e^2}\right)^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}\left(1 - (-e^2)^2/e^2\right)$$

$$y_{max} = \frac{p}{1-e^2}\cdot\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}}$$

(kleine Halbachse)

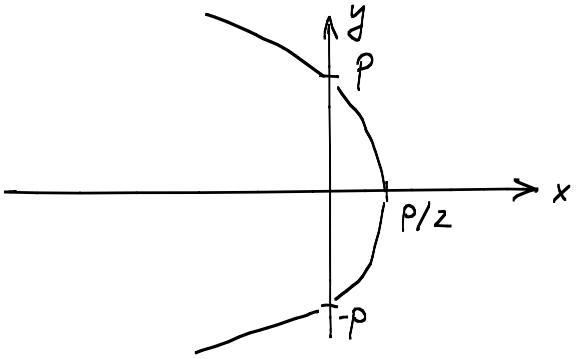
Eine andere Definition der Ellipse ist

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

(Beachte: Um die Äquivalenz der beiden Definitionen zu zeigen, muß man von obigem Koord. system x, y zu einem neuen System $\tilde{x}, \tilde{y}$ übergehen)

③ $e = 1$, $E = 0$ – Körper kommt "im Unendlichen" zur Ruhe
(Weil $\frac{m}{2}v^2 = E - U(r)$ & $U(\infty) = 0$.)

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \varphi = 0 & \Rightarrow r = p/2 \\ \varphi = \pm\pi/2 & \Rightarrow r = p \\ \varphi = \pi & \Rightarrow r = \infty \end{array}$$



Die Kurve ist eine nach links geöffnete Parabel ($\tilde{y} \sim \tilde{x}^2$ in einem geeignet gewählten Koord. system $\tilde{x}, \tilde{y}$)

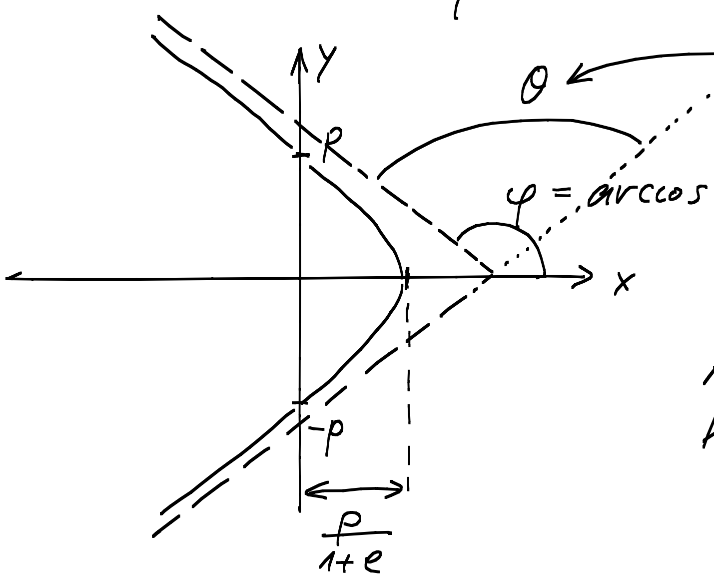
(4) $e > 1$, $E > 0$, d.h. der Körper hat selbst asymptotisch, für $r \to \infty$, noch eine von Null verschiedene Geschwindigkeit $\Rightarrow$ <u>Hyperbel</u>

<u>genauere Analyse:</u> $\quad r = p/(1 + e\cos\varphi)$

$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; r = p/(1+e)$

$\varphi = \pm\pi/2 \;\Rightarrow\; r = p$

$r = \infty \;\Rightarrow\; 1 + e\cos\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \arccos(-1/e)$



$$\boxed{\begin{array}{l} \Theta = \pi - 2(\pi - \varphi) = 2\varphi - \pi \\ \text{mit } \cos\varphi = -1/e \end{array}}$$

Andere Darstellung der Hyperbel: $\quad \dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} - \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$

($a = a(p,e)$ & $b = b(p,e)$ leicht zu berechnen, ähnlich wie bei Ellipse)

<u>7.7 Die Trajektorie</u>

Wir kennen die Bahn: $r = r(\varphi)$ bzw. $\varphi = \varphi(r)$.
Die Trajektorie, also $r = r(t)$ & $\varphi = \varphi(t)$ berechnen wir jetzt

mittels des in 7.2 angegebenen Integrals

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L}{m^2 r^2}}} \qquad \text{mit } V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\underbrace{\frac{2E}{m}}\,r^2 + \frac{2\alpha}{m}r - \frac{L^2}{m^2}}}$$

Um diesen Vorfaktor aus der Wurzel herauszuziehen, brauchen wir eine Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens.

<u>Ellipse:</u> $E < 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{L^2}{2m|E|}}}$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-\left(r - \frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}}}$$

Wir benutzen jetzt die schon hergeleiteten Formeln

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{L^2/(m\alpha)}{-2EL^2/(m\alpha^2)} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$\Rightarrow a^2 e^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2}\left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) = \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}$$

und erhalten
$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}$$

Ersetzung: $r \to s$ mit $r - a \equiv sae$

$dr = ds\, ae$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{ds\,(s + 1/e)}{\sqrt{1 - s^2}}$$

Wie schon oben, sind trigonometrische Fkt.-en hilfreich:

$$s \to \eta : \qquad s = -\cos\eta \;;\; ds = \sin\eta \, d\eta$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, ae \int d\eta \left(\frac{1}{e} - \cos\eta\right) = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\, ae \left(\frac{\eta}{e} - \sin\eta\right)$$

(Die Integrationskonstante entspricht einer irrelevanten Verschiebung in t)

Also:

$$\left\| \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}}\,(\eta - e\sin\eta) \\ r &= a(1 - e\cos\eta) \end{aligned} \right\|$$

Dies ist leider nicht explizit nach r auflösbar.

$\Rightarrow$ Wir müssen uns also mit dieser "Parameterdarstellung" der Fkt. $r = r(t)$ begnügen. $\varphi = \varphi(t)$ folgt sofort, da wir $\varphi = \varphi(r)$ kennen.

<u>Hyperbel:</u> $E > 0$; Eine analoge Rechnung ($\to$ Landau/Lifschitz) liefert

$$\left\| \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}}\,(e\sinh\eta - \eta) \\ r &= a(e\cosh\eta - 1) \end{aligned} \right\|$$

<u>7.8 Umlaufzeit</u> (für Ellipsenbahn)

$$T = \int_{1\,\text{Umlauf}} dt = \frac{2m}{L}\int_{1\,\text{Umlauf}} df = \frac{2m}{L}\, F_{\text{Ellipse}} = \frac{2m}{L}\cdot \pi ab$$

Unter Benutzung von $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dot\varphi$ und $L = m r^2 \dot\varphi$

Nebenrechnung zur Fläche einer Ellipse:

Ellipse: $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

$\Downarrow \quad x = ax', \; y = by'$

Kreis: $(x')^2 + (y')^2 = 1$

$$F_{\text{Ellipse}} = \int_{\text{Ellipse}} dx\,dy = ab \int_{\text{Einheitskreis}} dx'dy' = \pi ab \checkmark$$

Also: $$T = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{p^2}{\sqrt{1-e^2}^{\,3}} = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{(L^2/m\alpha)^2}{(2|E|L^2/m\alpha^2)^{3/2}}$$

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Andere Form: $T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ (unter Ausnutzung von $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ bzw. $|E| = \frac{\alpha}{2a}$)

Die Proportionalität von T zu $a^{3/2}$ ist auch als 3. Keplersches Gesetz bekannt.

Kommentare:

① Eine analoge Analyse für $V = +\frac{\alpha}{r}$ liefert stets Hyperbelbahnen:
$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi}$$ (nur für $r>0$ phys. relevant)

② Der "Lenz'sche Vektor" $\bar{v}\times\bar{L} - \alpha\bar{r}/r$ ist eine zusätzliche Erhaltungsgröße (→ Übungen). Er kann für eine noch elegantere Analyse des Kepler-Problems benutzt werden.

(3) Im System Erde–Mond gilt die Annahme $m_2 \gg m_1$ nicht sehr gut. Obige Analyse beschreibt also wirklich nur die Bewegung der <u>Relativkoordinate</u>. In Wirklichkeit rotieren beide Körper um ihren gemeinsamen Schwerpkt. Die dabei auftretende Zentrifugalkraft führt, in Kombination mit der örtlich variierenden Anziehungskraft des Mondes, zu den "Gezeitenbergen" der Wasseroberfläche: