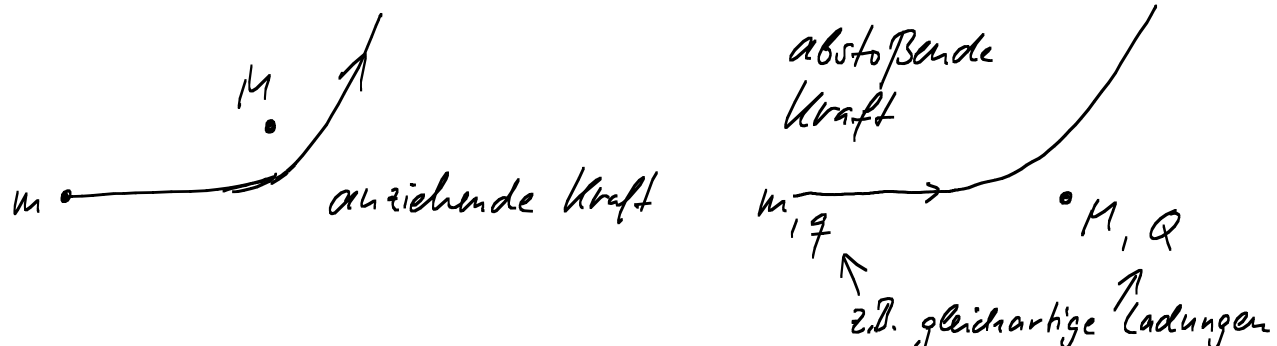
8 Zerfalls- und Stoßprozesse

- wichtig in Chemie, Kernphysik, Teilchenphysik (jeweils mit quantenmech. Aspekten, die hier ignoriert werden).
- in Astrophysik: – Vorbeiflug einer Raumsonde an einem Planeten,
  – "Begegnung" zweier Himmelskörper (ohne Kollision)

(Die technischen Mittel zur Behandlung stehen uns seit dem letzten Kapitel zur Verfügung.)

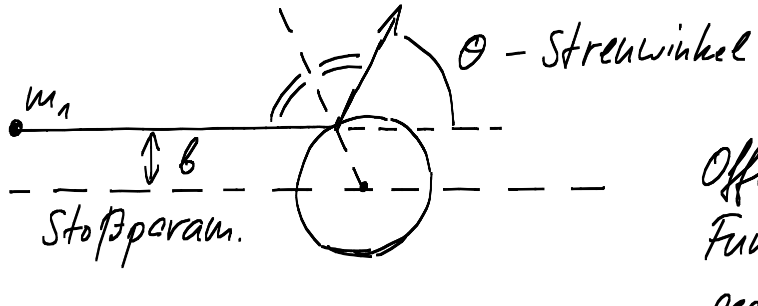


8.1 Stoßparameter und Streuwinkel

(impact parameter)

- In vielen einfachen mech. Systemen folgt der Streuwinkel eindeutig aus dem Stoßparameter:

Beispiel 1: Streuung eines Massenpunktes an einer perfekt reflektierenden (unbeweglichen) Kugel:

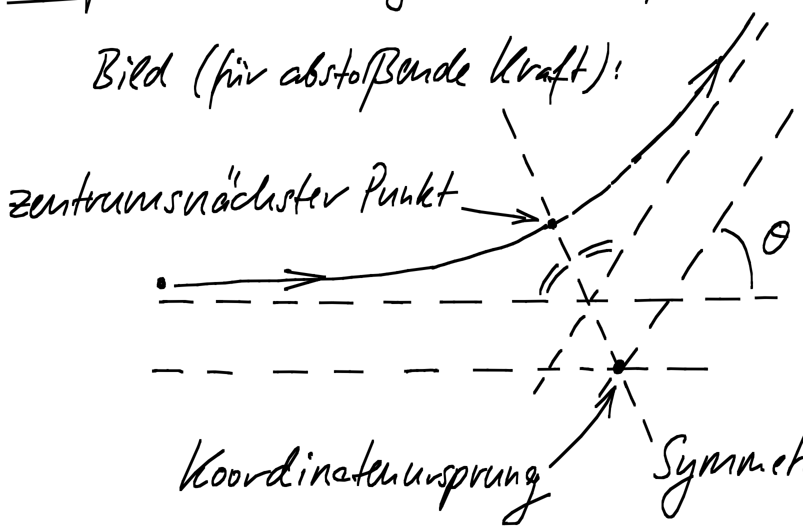


Offensichtlich läßt sich die Funktion $\Theta = \Theta(b)$ (bei vorgegebenem Radius R) durch elementare Geometrie ermitteln

→ Übungen.

Beispiel 2: Streuung an Zentralpotential $V(r)$

Bild (für abstoßende Kraft):



(obige starre Kugel entspricht dem Grenzfall $V(r) = \begin{cases} 0 , & r > R \\ \infty , & r \leq R \end{cases}$)

- Für ein allg. Potential (mit $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$) bestimmt sich der Streuwinkel mit Hilfe von

$$\varphi = \int \frac{(L/r^2)\, dr}{\sqrt{2m(E-V(r)) - L^2/r^2}} \quad (\text{vgl. } 7.2),$$

wobei $E = \frac{m}{2} v_\infty^2$ & $L = m v_\infty b$.
↖ Streuparameter

- Integriere über den Bahnabschnitt von "∞" bis zum zentrumsnächsten Punkt:

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b\, dr/r^2}{\sqrt{1 - V(r)/E - b^2/r^2}}$$

- r_{min} ist die Lösung zu $1 - V(r)/E - b^2/r^2 = 0$.

  (= Umkehrpunkt des äquiv. 1-dimensionalen Problems, vgl. Kap. 8;
  = Punkt an dem $d\varphi \neq 0$ obwohl $dr = 0$)

- Die gesuchte Fkt. $\theta = \theta(b)$ folgt jetzt aus $\theta = \pi - 2\Delta\varphi$ (vgl. Skizze).

<u>Beispiel 3:</u> Beispiel 2 mit $V(r) = -\frac{G_N m M}{r}$

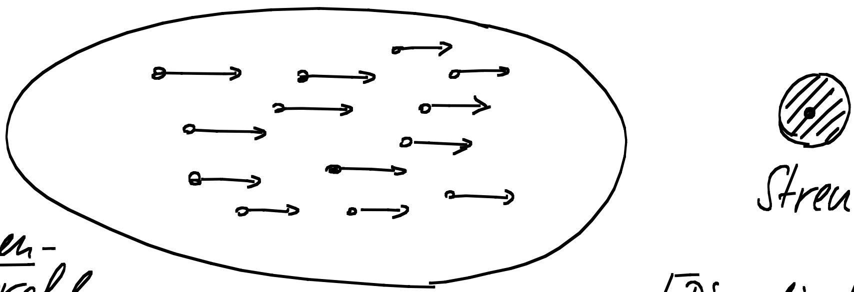
Wir wissen schon: $\Theta = 2\varphi - \pi$, $\cos\varphi = -1/e$

Also: $\sin\frac{\Theta}{2} = \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}$

mit $L = mvb$ $(v \equiv v_\infty)$ & $\alpha = mMG_N$ & $E = \frac{m}{2}v^2$

$$\Rightarrow \quad \Theta(b) = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + (v^2 b / MG_N)^2}}$$

8.2 Der Wirkungsquerschnitt



Teilchen-strahl

Streuzentrum (fix)

[Dies dient nur zur Vereinfachung; prinzipiell kann und muß natürlich der "Rückstoß" des Targets berücksichtigt werden.]

- sei homogen & zeitunabhängig
- Geschwindigkeit v für jedes Teilchen gleich
- charakterisiert durch Teilchenfluß(dichte) oder Teilchenstrahldichte

$$n = \frac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \qquad ([n] = m^{-2}s^{-1})$$

Zahl der durch diese Fläche hindurchtretenden Teilchen

senkrecht zum Strahl stehende gedachte Fläche

- Für ein Target mit Querschnittsfläche σ ergibt sich die Zahl der pro Zeit gestreuten Teilchen als

$$N = n \cdot \sigma_{tot} \quad ([N] = s^{-1})$$

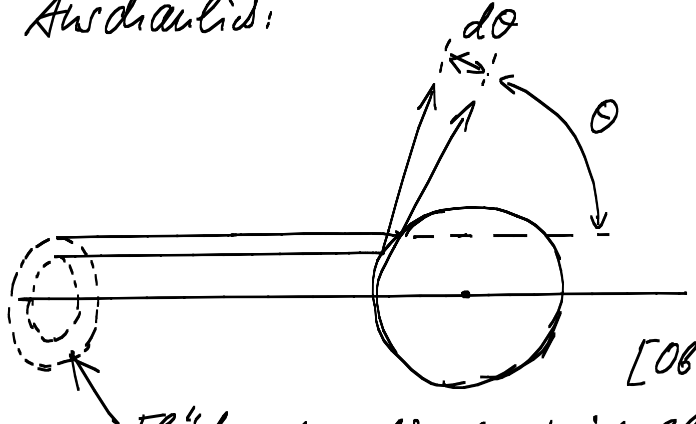
• <u>Allgemeiner</u>: (ohne geometrische Anschauung, die in modernen Anwendungen oft keinen Sinn hat)

Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} ist definiert als Proport.-faktor zwischen Streurate N und Strahldichte n:

$$\underline{\underline{N = n \cdot \sigma_{tot}}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\sigma_{tot} \equiv \frac{N}{n}}}$$

• <u>Noch allgemeiner</u>: Der <u>differentielle Wirkungsquerschnitt</u> charakterisiert die Rate dN mit der Teilchen in einen kleinen Winkelbereich $d\theta$ gestreut werden:

Anschaulich:



$$\underline{\underline{dN = n \cdot \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)\right)} \cdot d\theta}}$$

Dies ist nur ein Symbol für den "diff. Wirkungsquerschnitt" (keine Ableitung!).

[Obige Formel <u>definiert</u> die Fkt. $\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)$.]

Fläche $d\sigma$, die dem Winkelbereich $d\theta$ entspricht

• Der diff. Wirkungsquerschnitt ("differential cross section") kann aus der Fkt. $\theta = \theta(b)$ berechnet werden:

– Der obige Ring hat die Fläche $2\pi b \cdot |db| = d\sigma$

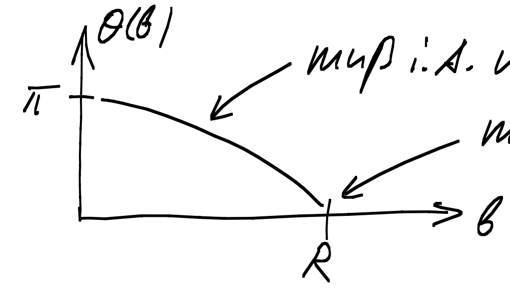
– Der zugehörige Winkelbereich ist $|d\theta| = \left|\frac{d\theta(b)}{db}\right| \cdot |db|$

(Wir setzen überall Betragsstriche, um Minuszeichen zu umgehen, die auftreten, da $(d\theta/db) < 0$.)

• dN folgt jetzt aus der Formel für totale Streuraten, angewandt auf unseren differentiellen Ring:

$$dN = n \cdot d\sigma = n \cdot 2\pi b \cdot |db| = n \cdot \underbrace{2\pi b \left|\frac{d\theta}{db}\right|^{-1}}_{\equiv \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)} d\theta \qquad (d\theta > 0)$$

• Zurück zum Beispiel der <u>harten Kugel</u>:



muß i.A. nicht monoton sein

muß i.A. nicht bei endlichen b Null werden

Da dies im Fall der harten Kugel aber geschieht, kann man σ_{tot} besonders einfach berechnen:

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right) = \int_0^\pi d\theta \; 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| = \int_0^R db \cdot 2\pi b = \pi R^2$$

(wie naiv erwartet)

(In vielen Fällen wird $\theta(b)$ nicht bei endlichen b Null und σ_{tot} ist nicht definiert; "$\sigma_{tot} = \infty$".)

<u>Kommentar</u>:

Man kann eine Fkt. $\sigma(\theta)$ definieren als den: "minus den Wirkungsquerschnitt für Streuung mit Streuwinkel größer als θ". Es ist dann $\sigma(\pi) = 0$ & $\sigma(\theta < \pi) < 0$. Dann kann man unseren obigen diff. Wirkungsquerschnitt als echte Ableitung auffassen: $\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\sigma(\theta))$.

Aber dies ist nicht notwendig und nicht üblich.

8.3 Rutherford-Streuung

(Berühmtes Beispiel: Streuung am Coulomb-Feld; völlig analog zum Kepler Problem, aber mit abstoßender oder anziehender Kraft.)

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \qquad \left(\alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0}\right)$$

Technisch: Kepler-Problem mit $G_N m M \to \alpha$.

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v^2 b}{M G_N}\right)^2}} \quad \to \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m v^2 b}{\alpha}\right)^2}}$$

↑ Vorzeichen irrelev.!

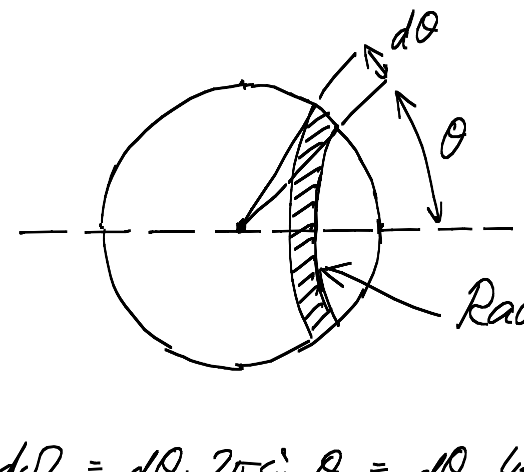
$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right| = 2\pi\left(\frac{\alpha}{m v^2}\right)^2 \cdot \left|x\frac{dx}{d\theta}\right| \quad \text{mit } x = \frac{m v^2 b}{\alpha}.$$

Jetzt: $\sin\theta/2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x = \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\frac{1/2}{\sin^2\theta/2} \Rightarrow \left|x\frac{dx}{d\theta}\right| = \frac{\cos\theta/2}{2\sin^3\theta/2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \pi\left(\frac{\alpha}{m v^2}\right)^2 \frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2}$$

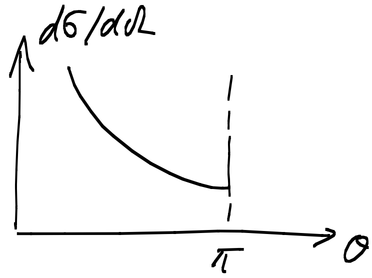
Nützliche Umschreibung: $d\theta \to d\Omega$ ("Raumwinkelelement")



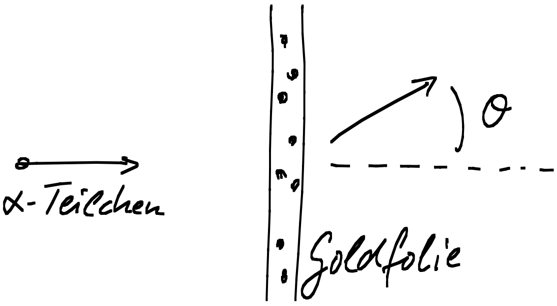
Raumwinkelbereich = Fläche auf Einheitskugel

$$d\Omega = d\theta \cdot 2\pi \sin\theta = d\theta \cdot 4\pi \sin\theta/2 \cos\theta/2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}} \quad \text{Rutherford-Formel}$$



- äußerst stark konzentriert bei $\theta = 0$:
- $\sigma_{tot} = \infty$
- experimentell:



Beobachtete Winkelverteilung $\Rightarrow$ Atome praktisch "leer", pos. Ladung und gesamte Masse im Atomkern konzentriert, der praktisch punktförmig ist.
(Elektronenhülle wegen kleiner Masse unwichtig.)

[Obwohl prinzipiell quantenmech. Korrekturen und der Boost ins Schwerpkt.system hinzukommen, beschreibt obige einfache Rechnung das historische Experiment gut.]

8.4 Teilchenzerfall

(→ Zerfall instabiler Isotope, $\rho \to \pi\pi$, Explosionen ("klassisch"), aktuell: $H \to \gamma\gamma$; $H \to b\bar{b}$)

$$M, U \longrightarrow m_1, U_1 \text{ "+" } m_2, U_2$$

Masse ↑ innere Energie ↑

- Massenerhaltung: $M = m_1 + m_2$ (nicht mehr in SRT!)
- Energieerhaltung: $U + \frac{M}{2}\bar{v}^2 = \left(U_1 + \frac{m_1}{2}\bar{v}_1^2\right) + \left(U_2 + \frac{m_2}{2}\bar{v}_2^2\right)$

• Impulserhaltung: $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$ (mit $\bar{p} = M\bar{v}$ etc.)

O.B.d.A. ruhe M vor dem Zerfall: $\bar{p} = 0$ (bzw. $\bar{v} = 0$)

(Dies kann durch Galilei-Boost stets erreicht werden.)

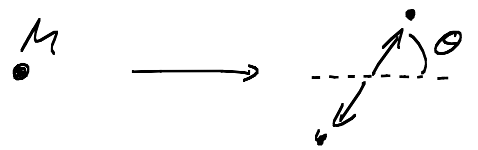
$$\Rightarrow \quad \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0 \; ; \quad U - U_1 - U_2 = |\Delta U| = \frac{\bar{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^{\,2}}{2m_2}$$

Eliminieren von $\bar{p}_2$ liefert: $|\Delta U| = \frac{\bar{p}_1^{\,2}}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

oder $|\bar{p}_1| = |\bar{p}_2| = \sqrt{\frac{2|\Delta U|\, m_1 m_2}{M}}$; $\bar{p}_1 = -\bar{p}_2$

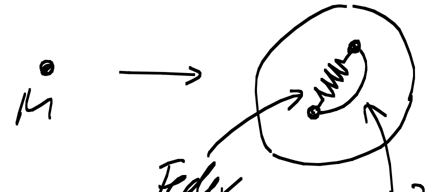
(auch klar: $|\bar{v}_1| / |\bar{v}_2| = m_2 / m_1$)

Diese Beschreibung durch Erhaltungssätze bleibt unvollständig:
Die Flugrichtung der Produkte bleibt unbekannt.



erfordert ① zusätzliche mikroskop. Information oder ② Annahme einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

zu ① z.B.:



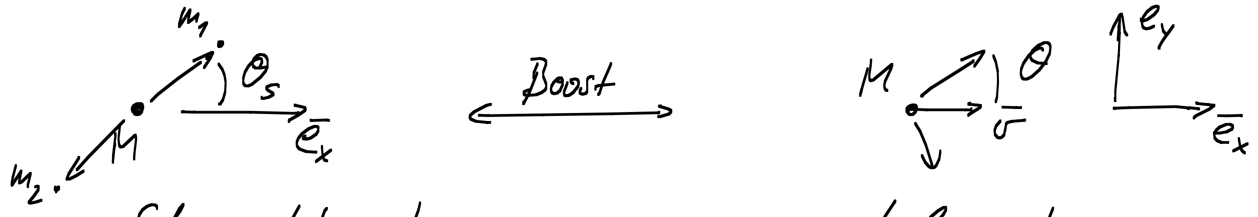
Feder

zu durchschneidendes Band

(in "echten" phys. Beispielen spielen oft Spin oder Drehimpuls des zerfallenden Teilchens diese Rolle.)

zu ② z.B.: – "quantenmechanische" Wahrscheinlichkeit
– Ensemble zufällig "orientierter" Ausgangsteilchen (jede Richtung gleichwahrscheinlich)

Beispielrechnung zum Galilei-Boost



Schwerpkt.system ($\bar{v} = 0$) — Laborsystem ($\bar{v} \neq 0$)

Gegeben ΔM & θ_S, was ist θ? [$\theta \equiv \theta_L$; den Index "L" unterdrücken wir bei allen Größen.]

Lösung: Wir wissen noch: $|\bar{p}_{1,S}| = \sqrt{2|\Delta M| m_1 m_2 / M}$

$$\bar{p}_{1,S} = |\bar{p}_{1,S}| \, (\cos\theta_S, \sin\theta_S)$$

$$\bar{v}_{1,S} = \bar{p}_{1,S} / m_1$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_{1,S} + \bar{v} = |\bar{v}_{1,S}| \, (\cos\theta_S, \sin\theta_S) + |\bar{v}| \, (1, 0)$$

$$= \left(|\bar{v}_{1,S}| \cos\theta_S + |\bar{v}| , \; |\bar{v}_{1,S}| \sin\theta_S \right)$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{|\bar{v}_{1,S}| \sin\theta_S}{|\bar{v}_{1,S}| \cos\theta_S + |\bar{v}|}$$

(Nach Belieben Ausgangsgrößen einsetzen und vereinfachen ...)

Kommentar: Beim Zerfall in mehr als 3 Teilchen (z.B. $M \to m_1, m_2, m_3$) genügen die Erhaltungssätze i.A. nicht mehr, um die Geschwindigkeiten der Zerfallsprodukte zu bestimmen. Man muß sich dann i.A. mit einer Geschwindigkeitsverteilung zufriedengeben. (z.B. $n \to p e^- \bar{\nu}_e$)

8.5 Elastischer Stoß

- allgemeiner Stoß: $m_1, U_1 \longrightarrow m_1', U_1'$
  ("2→2 Streuung") $m_2, U_2 \qquad m_2', U_2'$

- kein Massenaustausch → $m_{1,2}' = m_{1,2}$
- elastisch → $U = U'$ (mit $U = U_1 + U_2$ & $U' = U_1' + U_2'$)

Also: $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$

$$\frac{\bar{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^{\,2}}{2m_2} = \frac{\bar{p}_1'^{\,2}}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2'^{\,2}}{2m_2}$$

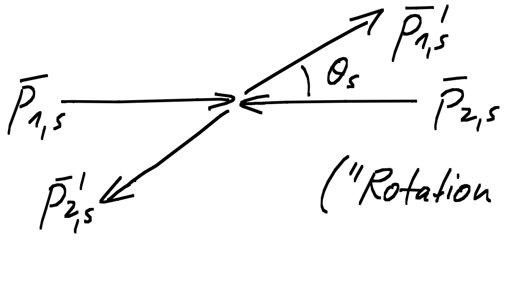
Eine mögliche prinzipielle Vorgehensweise: (zur Bestimmung von $\bar{p}_{1,2}'$ bei gegebenem $\bar{p}_{1,2}$)

- Gehe ins Schwerpunktsystem S:
  $$\bar{p}_{1,s} + \bar{p}_{2,s} = \bar{p}_s = 0$$

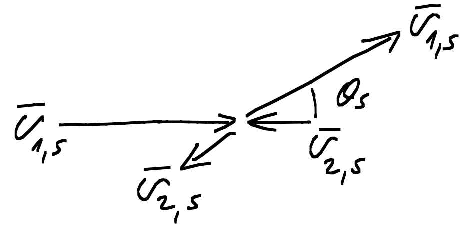
- Man denke sich einen sich einer zwischenzeitlich entstanden Zustand ("instabiles Teilchen") mit $\bar{p}_s = 0$, welches unter Freisetzung eines Energieüberschusses $|\Delta\tilde{U}| = \frac{\bar{p}_{1,s}^{\,2}}{2m_1} + \frac{\bar{p}_{2,s}^{\,2}}{2m_2}$ zerfällt (vgl. 3.1).

- Wie oben: $\bar{p}_{1,s}' = -\bar{p}_{2,s}'$
  $$|\bar{p}_{1,s}'| = |\bar{p}_{2,s}'| = \sqrt{\frac{2|\Delta\tilde{U}|\, m_1 m_2}{M}} \quad \left(= |\bar{p}_{1,s}| = |\bar{p}_{2,s}|\right)$$

$\Rightarrow$ $\bar{p}_{1,s} \to \bar{p}_{1,s}'$ & $\bar{p}_{2,s} \to \bar{p}_{2,s}'$ entspricht (in S!) nur einer Drehung (keine Betragsänderung!):



bzw.



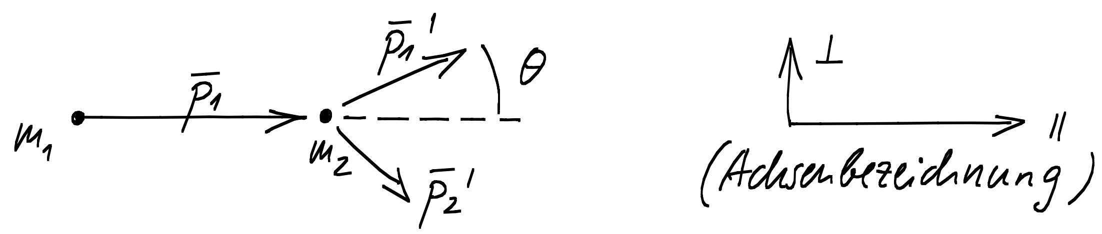
("Rotation um Θ_s")

- Der Wert von θ_S muß als zusätzliche Information vorgegeben werden.

- Die so gefundenen Impulse $\bar{p}_{1,S}'$, $\bar{p}_{2,S}'$ können, falls gewünscht, wieder in das (i. A. von S verschiedene) Laborsystem L übersetzt werden; $\rightarrow \bar{p}_{1,L}'$, $\bar{p}_{2,L}'$.

8.6 Elastischer Stoß am ruhenden Target

Labor: Projektil: $m_1, \bar{p}_1 \neq 0$; Target: $m_2, \bar{p}_2 = 0$



$$\boxed{\bar{p}_1 \text{ und } \theta \text{ seien gegeben und wir fragen nach } |\bar{p}_1'|}$$

a) Analyse durch Übergang zu S

[Unsere Notation: Index "S" für Schwerpkt.system; Kein Index heißt "L"]

$$0 = \bar{p}_S = \bar{p}_{1,S} + \bar{p}_{2,S} = (\bar{p}_1 - m_1\bar{v}) + (0 - m_2\bar{v})$$

Dies definiert S!

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{p}_1 / M \qquad (M = m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \bar{p}_{1,S} = -\bar{p}_{2,S} = \frac{m_2}{M} \cdot \bar{p}_1$$

- $\bar{p}_{1,S}'$ & $\bar{p}_{2,S}'$ ergeben sich jetzt durch Drehung um θ_S; danach Rücktransformation nach L.

- Damit haben wir $|\bar{p}_1'|$ & θ als Fkt.-en von θ_S; Eliminieren von θ_S gibt $|p_1'|$ als Fkt. von θ.

b) Analyse direkt in L

- Energieerhaltung: (zur Vereinfachung sei $p_1 = |\bar{p}_1|$ etc.)

$$p_1^2/2m_1 = p_1'^2/2m_1 + p_2'^2/2m_2$$

$$\Rightarrow p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1}\left(p_1^2 - p_1'^2\right)$$

- Impulserhaltung: $\bar{p}_1 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$ ⇐ (Deshalb alles in einer Ebene!)

$$\Rightarrow p_{1,\parallel} = p_{1,\parallel}' + p_{2,\parallel}' \quad ; \quad p_{1,\perp}' = -p_{2,\perp}'$$

Daraus ergibt sich

$$p_1 = p_{1,\parallel} = p_1' \cdot \cos\theta + \sqrt{(p_2')^2 - (p_{2,\perp}')^2}$$

$$p_1 = p_1' \cos\theta + \sqrt{(p_2')^2 - (p_{1,\perp}')^2}$$

aus Energieerhaltung

$$= p_1' \cos\theta + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}\left(p_1^2 - p_1'^2\right) - (p_1')^2 \sin^2\theta}$$

Jetzt: So umformen, daß Wurzel rechts allein steht; beide Seiten quadrieren; nach p_1' auflösen

$$\Rightarrow \quad p_1' = p_1 \frac{m_1 \cos\theta \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta}}{M}$$

& analog für v_1', v_1; vgl. auch die schöne graphische Interpretation in vielen Büchern, z.B. Landau/Lifschitz.

- Falls beide Wurzeln nicht-negativ, gibt es wirklich zwei mögliche p_1' bei gleichem θ!

- Um dies besser zu verstehen, analysiere man den besonders einfachen Fall $\theta = 0$, $m_1 > m_2$:

$\Rightarrow$ Lösung 1: $p_1' = p_1$ – kein echter Stoß

Lösung 2: $p_1' = p_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ – maximaler Energieübertrag (vollst. bei $m_1 = m_2$) – wie bei zentralem Stoß beim Billiard.

- In weniger trivialen Fällen ($\theta \neq 0$) ist die Situation analog: Ein fest vorgegebenes θ kann durch einen "starken" oder einen "schwachen" Stoß realisiert werden.

- Falls eine der Wurzeln neg. ist, gibt es wirklich nur ein phys. mögliches p_1' zum gegebenen θ.