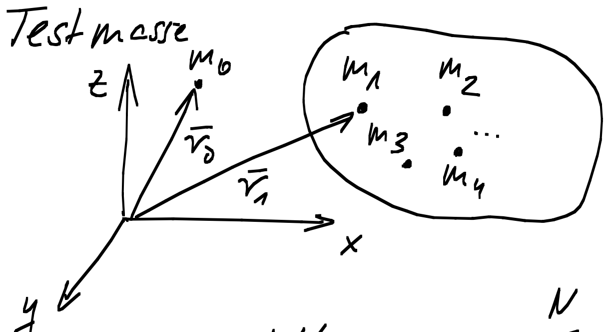
9. Gravitation ausgedehnter Körper

- Punktmassenannahme oft nicht präzise (z.B. für Erde-Mond oder Erde-Satellit)
- Dies ist leicht korrigierbar, da Kräfte (& damit die zugrundeliegenden Potentiale) additiv sind.

  (Achtung: Dies ist nicht mehr korrekt in der ART, da dort Gleichungen für das Gravitationsfeld nichtlinear sind. In der hier relevanten linearen Näherung spielt dies keine Rolle.)

9.1 Potential einer Massenverteilung



Ansammlung von Massenpunkten

$$V(\bar{r}_0) = \sum_{a=1}^{N} \left(- \frac{m_0 m_a G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_a|} \right)$$

Übergang zum ausgedehnten Körper → Übergang zur Integration

$$V(\bar{r}_0) = \sum_{a=1}^{N} \left(- \frac{m_0 G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_a|} \right) \cdot \rho(\bar{r}_a) \cdot \Delta V_a$$

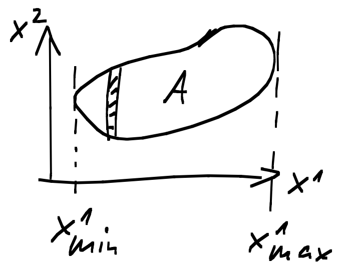
Zerlegung des Körpers in viele kleine Elemente, jeweils mit Masse $m_a = \rho(\bar{r}_a) \Delta V_a$

↓

$$V(\bar{r}_0) = - m_0 G_N \int \frac{d^3\bar{r}\ \rho(\bar{r})}{|\bar{r}_0 - \bar{r}|}$$

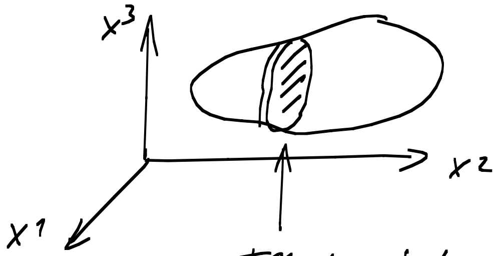
Hier benutzen wir das anschaulich einfache aber evtl. technisch noch nicht gut vertraute Konzept des Volumenintegrals.

Nochmal zum Zurück zum Flächenintegral:



$$\int_A d^2x\, f(\vec{x}) = \int_{x^1_{min}}^{x^1_{max}} dx^1 \int_{x^2_{min}(x^1)}^{x^2_{max}(x^1)} dx^2\, f(x^1, x^2)$$

Volumenintegral geht im Prinzip analog:



Flächenintegral (x^1, x^3) $\rightarrow$ dann noch Integration über dx^2

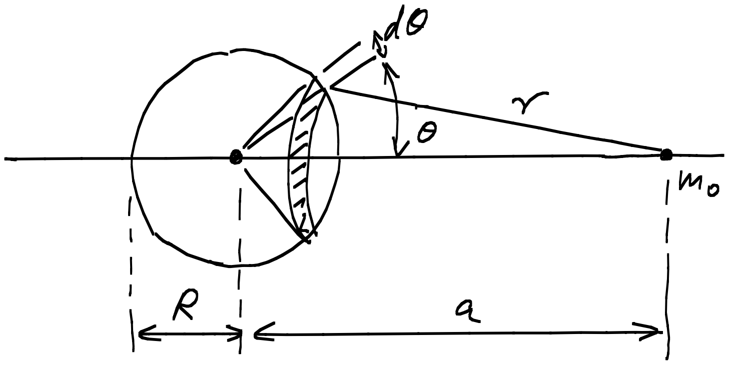
In der Praxis ist es oft sehr hilfreich passende (zur Symmetrie des Problems passende) Koordinatensysteme zu benutzen:

- z.B. $$\int_{\text{Kreisfläche}} d^2\vec{x} \cdots = \int_0^R dr \underbrace{\int r\, d\varphi \cdots}_{\text{Kreis mit Radius } r} = \int_0^R dr\, r \int_0^{\pi} d\varphi \cdots .$$

- z.B. $$\int_{\text{Kugel}} d^3\vec{x} \cdots = \int_0^R dr \underbrace{\int \cdots}_{\text{Sphäre mit Radius } r}$$ Man denke hier an "Zwiebelschalen"

$\Rightarrow$ Viel mehr in Übungen im kommenden Semester.

9.2 Gravitationspotential einer Kugelschale



Die Kugelschale sei dünn, mit Flächendichte ρ_F (gemessen in kg/m^2)

- Wir müssen in diesem Fall ersetzen: $\int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r}) \cdots = \int \underbrace{d^2\vec{r}}_{\text{infinit. Oberfl.-elem.}} \rho_F(\vec{r}) \cdots$

- Wir erinnern uns an Kugelkoord. (ρ, θ, φ) und lassen $\rho = R$ fest. Das infinit. Oberflächenelement ist offensichtlich

$$d^2\vec{r} = (R\,d\theta)\cdot(R\sin\theta\, d\varphi) = R^2\, d^2\Omega$$

[siehe Bild; φ param. den schraffierten Ring; die Achse entspricht der früheren z-Achse]

[Vgl. auch $\int_0^{2\pi} d\varphi\, d\theta \sin\theta = 2\pi \sin\theta\, d\theta = d\Omega$ von Kap. 8.3]

- Äquivalent & direkter:

$$dV = -mG_N \frac{dM}{r} = -mG_N \frac{\rho_F\, dA}{r} = -\frac{mG_N\rho_F}{r}\cdot \underbrace{(R\,d\theta)}_{\text{Breite}}\cdot\underbrace{(2\pi R\sin\theta)}_{\text{Radius}}$$

(des Ringes).

$$r = \sqrt{(a - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2} = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$$

Einzige Integration: θ von 0 bis π:

$$V = -mG_N\rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \int_0^\pi \frac{d\theta \sin\theta}{\sqrt{A - B\cos\theta}} \quad \text{mit} \quad A = a^2 + R^2, \quad B = 2aR$$

Ersetzung: $\cos\theta = x$; $-\sin\theta\, d\theta = dx$

$\theta = 0 \Rightarrow x = 1$; $\theta = \pi \Rightarrow x = -1$

$$V = -mG_N\rho_F\, 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{A - Bx}}$$

$$\left[\int_{-1}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{A-Bx}} = -\frac{1}{(-B)}\, 2\cdot\sqrt{A-Bx}\,\Big|_{1}^{-1} = \frac{2}{B}\left(\sqrt{A+Bx}-\sqrt{A-Bx}\right)\right.$$

$$\left. = \frac{2}{2aR}\left(\sqrt{a^2+R^2+2aR}-\sqrt{a^2+R^2-2aR}\right) = \frac{1}{aR}\left((a+R)-(a-R)\right) = \frac{2}{a}\right]$$

$$V = -m G_N \rho_F \frac{4\pi R^2}{a} = -m G_N \frac{A\rho_F}{a} = -\frac{G_N m M}{a}$$

Genau so, als sei die Masse im Zentrum konzentriert.

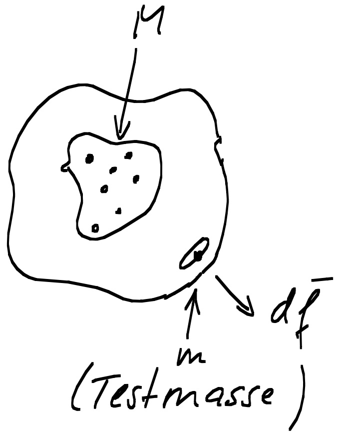
[Analoge Rechnung zeigt: Im Inneren dieser Kugelschale gibt es keine gravit. Kraft ($V = \text{const.}$)] → Übungen

Einfache Konsequenz:

Das Potential eines sphärisch symmetrischen Körpers im Außenraum ist so, als sei die Masse im Zentrum konzentriert. (Homogenität ist nicht erforderlich)

9.3 Gaußscher Satz für Gravitation

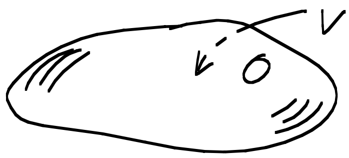
Zentrale Behauptung: Sei O eine Oberfläche, welche eine Massenverteilung mit Gesamtmasse M einschließt. Sei $\bar{F}(\bar{x})$ die von dieser Massenverteilung auf eine Testmasse m ausgeübte Kraft. Dann gilt:



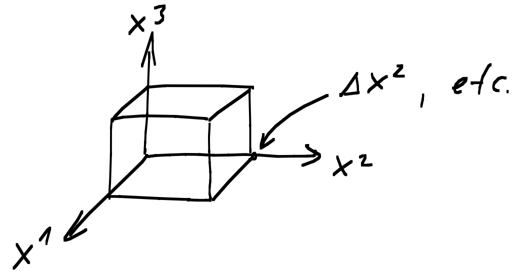
$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m} \int_O \bar{F}\cdot d\bar{f}$$

M11 Divergenz und Gaußscher Satz

Betrachte Integrale $I = \int_O d\vec{f}\cdot\vec{F}$ über die Oberfläche O eines 3-dim. Volumens V.



Wie bei Stokes, betrachten wir zunächst ein kleines, besonders einfaches Volumen:



Wir können unser Integral in die Summe der Integrale über drei Paare entgegengesetzter Flächen:

$$I = \underbrace{\int_{A_{oben}} dx^1 dx^2\, F^3(x^1,x^2,\Delta x^3) + \int_{A_{unten}} dx^1 dx^2 \left(-F^3(x^1,x^2,0)\right)}_{I_1} + \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{entsprechend}\\ \text{vorn / hinten}\\ \text{rechts / links}}}$$

$\underbrace{\text{entsprechend vorn / hinten rechts / links}}_{I_2 + I_3}$

$$I_1 \approx \int_{A_{unten}} dx^1 dx^2\, \Delta x^3 \frac{\partial F^3}{\partial x^3}(x^1,x^2,0)$$

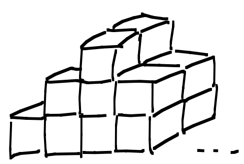
$$\approx \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 \cdot \frac{\partial F^3}{\partial x^3} + O(\Delta^4) \qquad \& \text{ analog für } I_2, I_3$$

$$\Rightarrow \quad I = V\cdot\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right) \equiv V\cdot\left(\partial_i F_i\right) = V\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$$

$$\equiv V\cdot\left(\operatorname{div}\vec{F}\right)$$

Divergenz.

Nun können wir ein großes Volumen durch viele solcher kleiner Quadervolumina zusammensetzen:



Wir addieren alle entsprechenden Gleichungen vom Typ $I = V\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$

In der Summe aller I's heben sich die Beiträge der "inneren" (sich berührenden) Quader-flächen weg ⇒ Nur die <u>Ober</u>fläche des totalen Volumens bleibt. Also haben wir

$$\boxed{\int_O d\bar{f}\cdot\bar{F} = \int_V d^3\bar{r}\,(\bar{\nabla}\cdot\bar{F})}$$ Gauß

Erinnerung:

$$\boxed{\oint d\bar{s}\cdot\bar{F} = \int_A d\bar{f}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{F})}$$ Stokes

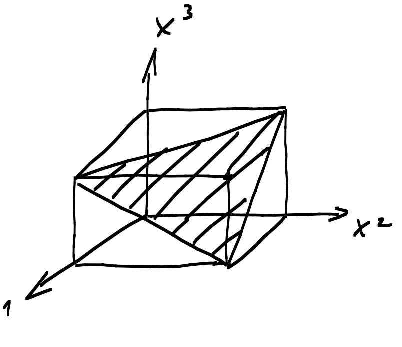
<u>Wir haben die Struktur:</u>

1-dim.-Rand		2-dim. Rand		...
$\updownarrow$	$\dashrightarrow$	$\updownarrow$	$\dashrightarrow$	$\uparrow$
2-dim. Inhalt		3-dim. Inhalt		
(Stokes)		(Gauß)		

Hier geht es in der Tat weiter! (Siehe später...)

In unserem Beweis gibt es aber immer noch ein Loch, das wir zumindest provisorisch stopfen wollen: Wir wollen (wie schon bei Stokes) die Oberfläche "glätten":

<u>Dazu:</u>



Wir wollen, wie in diesem Bild angedeutet, von unserem "eckigen" Volumen solche "Ecken" abschneiden können, ohne einen Fehler von mehr als $O(\Delta^3)$ zu machen.

Dies wird stimmen, falls

$$\bar{A}_{\text{schraffiert}} = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_{\text{fehlendes Dreieck},\,i}\,,$$

was sich durch elementare Geometrie zeigen läßt.
(Auch anschaulich klar: Summe der Flächenvektoren aller Außenflächen eines Körpers ist Null.)

M11 "□".

Startpunkt: Punktmasse M am Ursprung. O sei Sphäre mit Radius R und Zentrum am Ursprung.

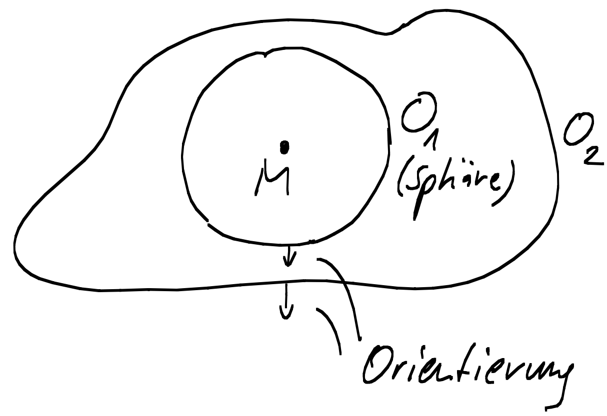
$$I = \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f} = \int_O \left(- \frac{G_N m M}{R^2} \bar{e}_r \right) \cdot \left(|d\bar{f}| \, \bar{e}_r \right) = - \frac{G_N m M}{R^2} \int_O |d\bar{f}|$$

$$= - \frac{G_N m M}{R^2} \cdot 4\pi R^2$$

$$M = - \frac{I}{4\pi m G_N} \quad \Longleftarrow$$

✓

Allgemeine Fläche:



$$I_{1,2} \equiv \int_{O_1, O_2} \bar{F} d\bar{f}$$

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f} - \int_{O_1} \bar{F} d\bar{f} = \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f} + \int_{\tilde{O}_1} \bar{F} d\bar{f}$$

umgekehrt orientiert

$$I_2 - I_1 = \int_{"O_2 - O_1"} \bar{F} d\bar{f}$$

← Oberfläche des "Zwischenraumes" zwischen O_1 und O_2.

nach Gauß:
$$I_2 - I_1 = \int_{"Vol_2 - Vol_1"} d(Vol.) \cdot \bar{\nabla} \bar{F} = - \int_{"Vol_2 - Vol_1"} d(Vol.) \, \bar{\nabla}^2 V$$

(Volumen des Zwischenraumes)

$\Rightarrow$ Unsere Eingangsbehauptung folgt für eine allg. M umgebende Fläche, falls $\bar{\nabla}^2 V = 0$ im Zwischenraum.

Letzteres wollen wir jetzt nachprüfen:

<u>Berechnung von $\bar\nabla^2 V$</u>

- $V(\bar r) = -\frac{m M G_N}{r}$ mit $\bar r = (x_1, x_2, x_3)$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

- Wir können uns sofort auf $\bar\nabla^2(\frac{1}{r})$ konzentrieren:

$$\left(\bar\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sum_j x_j^2}} = -\frac{1}{2}\frac{2x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^3} =$$

$$= -\frac{x_i}{r^3} = -\left(\frac{\bar r}{r^3}\right)_i$$

$$\bar\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \bar\nabla\cdot\left(\bar\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(\bar\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\left(-\frac{x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^3}\right) =$$

$$= -\left\{\frac{3}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x_i\cdot 2x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^5}\right\} = -\left\{\frac{3r^2}{r^5} - \frac{3r^2}{r^5}\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ Also gilt in der Tat $I_1 = I_2$ für 2 beliebige Flächen O_1 und O_2, die eine Punktmasse M am Ursprung umgeben.

- Wegen <u>Translationsinvarianz</u> überträgt sich dies sofort auf Flächen, die eine Punktmasse beliebiger Position umgeben.

  ($\int_O \bar F\cdot d\bar f$ ändert sich nicht, wenn Fläche <u>und</u> Massenpkt. verschoben werden.)

$$\Rightarrow \quad M = -\frac{1}{4\pi m G_N}\int_O \bar F\cdot d\bar f$$ für bel. Fläche O die eine bel. Pkt.masse M umgibt.

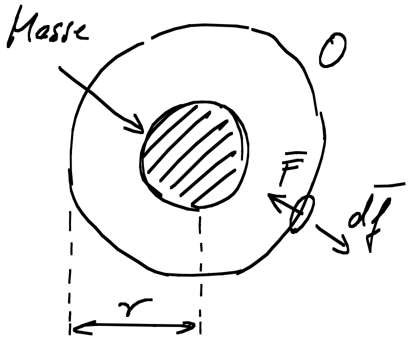
- Wegen <u>Linearität der Beziehung zwischen Masse & Kraft</u> überträgt sich dies weiterhin sofort auf belieb. Massenverteilungen:

$$M_i = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F}_i \cdot d\bar{f}$$

$$M = \Sigma M_i = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \Big(\sum_i \bar{F}_i\Big) \cdot d\bar{f} = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f}$$

Damit ist unsere eingangs gemachte Behauptung hergeleitet.

<u>Einfache Anwendung:</u> Kraft einer kugelsymmetrischen Massenverteilung:



- Aus Symmetriegründen ist $|\bar{F}| = \text{const.}$ und $\bar{F} \parallel d\bar{f}$ auf O.
- Aus unserem "Theorem" folgt

$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m} \int \bar{F} \cdot d\bar{f} = \frac{1}{4\pi G_N m} \cdot |\bar{F}| \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow |\bar{F}| = \frac{m M G_N}{r^2} \quad ; \quad \bar{F} = -\frac{\bar{r}}{r} \cdot \frac{m M G_N}{r^2} .$$

$\Rightarrow$ Kraft ist exakt wie bei Punktmasse M im Zentrum. (Konsistent mit unserer expliziten Rechnung fürs Potential unter 8.2)

9.4 Feldgleichung für das Gravitationspotential

- Wir wissen: $\int_O \bar{F} \cdot d\bar{f} = -(4\pi G_N m) \cdot M$

$$\downarrow \text{Gauß}$$

$$\int_{Vol.} (\bar{\nabla} \bar{F}) \cdot d(Vol.) = -(4\pi G_N m) \cdot \int_{Vol.} \rho \, d(Vol.)$$

- Da dies für beliebige (also speziell auch für sehr kleine) Volumina gilt, können wir das Integralzeichen weglassen:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = -4\pi G_N m \rho$$

bzw. $$\bar{\nabla}^2 V = 4\pi G_N m \rho \,.$$

- Es ist oft nützlich, ein von der Testmasse m unabhängiges "Gravitationspotential" ϕ zu definieren: $\phi = \frac{1}{m} \cdot V$.

Für dieses gilt dann: $$\boxed{\bar{\nabla}^2 \phi = 4\pi G_N \rho}$$

Laplace-Operator Δ

Poisson'sche (ohne ρ: Laplace'sche) Differentialgleichung

- Man sagt: "ρ ist Quelle für das Gravitationspotential ϕ."

- Bewegung einer Testmasse: $m\ddot{\bar{x}} = \bar{F} = -\bar{\nabla} V \Rightarrow \ddot{\bar{x}} = -\bar{\nabla}\phi$

(Verallgemeinerung zu "alle Körper fallen gleich schnell".)

- Derartige (partielle) Dgl.-en werden viel ausführlicher in E-Dynamik besprochen.

- $\bar{\nabla}^2 \phi = 4\pi G_N \rho$ ist konsistent mit der obigen Aussage $\bar{\nabla}^2 V = 0$ (bzw. $\bar{\nabla}^2 \phi = 0$) für Punktmasse. (Natürlich nur für $r \neq 0$, also in einer gewissen Entfernung von der Pkt.masse. Bei $r = 0$ ist $\bar{\nabla}^2 (\frac{1}{r})$ nicht definiert!)