

Vorlesungsskript - Theoretische Physik I:

Klassische Mechanik und mathematische Methoden der theoretischen Physik

Arthur Hebecker

Bearbeitete Vorlesungsnotizen aus dem Wintersemester 2011/2012

Textsatz und Grafiken: Viktoria Schubert
schubert.viktoria@googlemail.com

(nachbearbeitet 2016 von Arthur Hebecker)

Inhaltsverzeichnis

1	Kinematik des Massenpunktes	4
1.1	Kinematik des Massenpunktes in einer Dimension	5
1.2	Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung (M)	6
1.3	Kinematik des Massenpunktes in mehreren Dimensionen	8
1.4	Vektorräume (M)	10
1.5	Skalarprodukt (M)	12
1.6	Bogenlänge und begleitendes Dreibein	14
2	Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik	17
2.1	Newtonsche Axiome	17
2.2	Differentialgleichungen (M)	18
2.3	Erste physikalische Beispiele	22
2.4	Harmonischer Oszillator	26
2.5	Taylorentwicklung (M)	27
2.6	Lineare Differentialgleichungen (M)	28
3	Erhaltungssätze in der Newtonschen Mechanik	30
3.1	Impulserhaltung	30
3.2	Drehimpulserhaltung	31
3.3	Konservative Kräfte und Energieerhaltung	32
3.4	Satz von Stokes (M)	36

3.5	Energieerhaltung für ein System von Massenpunkten	38
3.6	Eindimensionale Bewegung	39
4	Der Harmonische Oszillator in komplexen Zahlen	40
4.1	Komplexe Zahlen (M)	40
4.2	Anwendung auf den Oszillator	45
5	Symmetrie der Raumzeit	47
5.1	Der Euklidische Raum	47
5.2	Matrix, Determinante, inverse Matrix (M)	50
5.3	Symmetriegruppen (M)	53
5.4	Tensoren (M)	54
5.5	Galilei-Transformationen	58
5.6	Affiner Raum	59
5.7	Dynamik	60
6	Wechsel des Koordinatensystems und Scheinkräfte	62
6.1	Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum	62
6.2	Aktive und Passive Beschreibung von Symmetrien	64
6.3	Beschleunigte, nichtrotierende Bezugssysteme	65
6.4	Kleine Drehungen	66
6.5	Rotierende Koordinatensysteme	68
6.6	Trägheitstensor	70
7	Zentralkraftproblem	71
7.1	Motivation	71
7.2	Zweikörperproblem	72
7.3	Zentralkraftproblem	72
7.4	Allgemeine Koordinatensysteme (M)	73
7.5	Qualitative Lösung des Zentralkraftproblems	75
7.6	Kepler-Problem: Bahnform	76
7.7	Kegelschnitte (M)	78
7.8	Die Trajektorie	81
7.8.1	Ellipse	81

7.8.2	Hyperbel	82
7.9	Umlaufzeit	82
8	Zerfalls- und Stoßprozesse	84
8.1	Stoßparameter und Streuwinkel	84
8.2	Der Wirkungsquerschnitt	86
8.3	Rutherford-Streuung	89
8.4	Teilchenzerfall	91
8.5	Schwerpunkts- vs. Laborsystem	92
8.6	Elastischer Stoß	93
8.7	Elastischer Stoß am ruhenden Target	94
9	Gravitation ausgedehnter Körper	96
9.1	Potential einer Massenverteilung	96
9.2	Gravitationspotential einer Kugelschale	99
9.3	Gaußscher Satz und Gravitation	101
9.4	Divergenz und Gaußscher Satz (M)	101
9.5	Gauscher Satz und Gravitation (Fortsetzung)	105
9.5.1	Wirkung des Laplace-Operators auf das Potential	106
9.5.2	Abschluss der Herleitung	107
9.5.3	Eine einfache Anwendung	107
9.6	Feldgleichung für das Gravitationspotential	108

Vorbemerkungen

Zur “klassischen Mechanik” (auch “analytische Mechanik” oder “theoretische Mechanik”) existiert eine große Auswahl an Büchern und Skripten. Einige davon sind auf der Webseite dieser Vorlesung (www.thphys.uni-heidelberg.de/~hebecker/TP1/tp1.html) aufgeführt. Nutzen Sie zum Nachschlagen und vertiefen auch unbedingt das Web!

Mechanik ist die Lehre von der Bewegung von Körpern. Der Zusatz “klassisch” bedeutet in unserem Zusammenhang, dass Effekte der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie ignorieren. Die besondere Bedeutung der Mechanik und damit dieser Vorlesung liegt darin, dass die Mechanik die theoretische Physik gewissermaßen **definiert** hat, lange bevor die anderen großen Bereiche der Elektrodynamik, Thermodynamik, Quantenmechanik etc. etabliert waren.

Unser Plan für das kommende Jahr sieht wie folgt aus:

Sem. 1: **Newtonsche Mechanik**

Sem. 2: **Lagrange/Hamilton-Mech.; Thermodyn./Statistik; Mech. der Kontinua**

Der längerfristige Plan in theoretischer Physik ist

Sem. 3: **Elektrodynamik / Spezielle Relativitätstheorie**

Sem. 4: **Quantenmechanik**

Sem. 5: **Thermodynamik / Quantenstatistik**

Danach setzt die Spezialisierung ein, die z.B. in meinem persönlichen Gebiet (Teilchenphysik und Kosmologie) wie folgt aussehen könnte:

Sem. 6: **Allgemeine Relativitätstheorie und/oder Kosmologie**

Sem. 7/8: **Quantenfeldtheorie I und II**

Sem. 9/10: **Masterarbeit**

Natürlich gibt es viele analoge Spezialisierungspläne in anderen Richtungen. Wichtig ist auch, dass es sehr nützlich sein kann (wenn Sie es schaffen), die **QFT I und II** bereits in **Sem. 5/6** zu hören. Das ermöglicht es, noch vor Masterarbeit Vorlesungen zur **Theoretischen Teilchenphysik, Stringtheorie, Supersymmetrie** etc. zu belegen. Dadurch können Sie in der Masterarbeit auf höherem Niveau forschen!

Wegen schnellen Wegs zur Forschung, ist das Heidelberger Programm mit **theoretischer Physik schon ab dem 1. Semester** von großem Vorteil. Da die Mathematikausbildung langsamer ist, sind die **mathematischen Methoden als zentraler Teil von TP1/2/3** von größter Bedeutung. Trotzdem sollten Sie die Mathematik **systematisch und tief** von den Mathematikern lernen.

Die detaillierteren Inhalte von TP1/2 ersehen Sie aus dem Modulhandbuch und meinem Skript im Web. Trotz aller Bemühungen um Systematik und logische Konsistenz, trotz aller Axiomatik: **Physik lebt von Beispielen**, die Übungen sind in diesem Sinne wichtiger als die Vorlesung.

Es ist aus meiner Sicht unverzichtbar, dass Sie **Mitschreiben, Nacharbeiten** und jedes Wort und jedes Vorzeichen verstehen!

1 Kinematik des Massenpunktes

Masse(n)punkte oder Punktmassen sind eine selbstevidente aber entscheidende Abstraktion in der theoretischen Mechanik. **Kinematik** ist die reine Beschreibung der Bewegung – wir diskutieren also zunächst keine Ursachen (das ist Gegenstand der **Dynamik**).

1.1 Kinematik des Massenpunktes in einer Dimension

Wir beschreiben den Ort durch die Koordinate x und haben damit gemäß Abb. 1 den Begriff der **Trajektorie** $x(t)$.

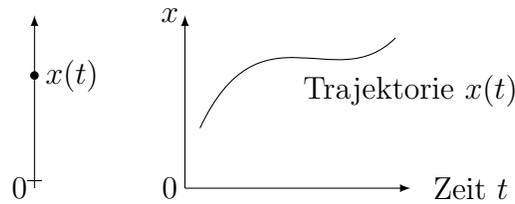


Abbildung 1: Eindimensionale Bewegung

Geschwindigkeit und **Beschleunigung** ergeben sich dann als

$$v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t) \quad (1.1)$$

$$a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t). \quad (1.2)$$

Hierbei benutzen wir die Schreibweise $(\dots)'$ analog zu $(\dots)'$, aber speziell für Ableitungen nach der Zeit t . Also einfaches Beispiel haben wir

$$x(t) \equiv x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_0}{2} t^2, \quad v(t) = v_0 + a_0 \cdot t, \quad a(t) = a_0. \quad (1.3)$$

Wir sehen, dass wir durch Ableiten von der Trajektorie zur Geschwindigkeit und zur Beschleunigung kommen. Diese Logik lässt sich auch umkehren: Wir kommen z.B. durch Integration von der Geschwindigkeit zur Trajektorie, wobei uns aber die Anfangsposition $x(t_0) \equiv x_0$ gegeben sein muss:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt'. \quad (1.4)$$

Man prüft leicht, dass $\dot{x}(t) = v(t)$ und dass es keine andere Funktion $\tilde{x}(t)$ mit $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$ und $\tilde{x}(t_0) = x_0$ gibt. Ganz analog kommt man von Beschleunigung zu Geschwindigkeit

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt', \quad (1.5)$$

und wenn gewünscht weiter zur Trajektorie.

Wir können diese Logik an unserem obigen Beispiel üben: Gegeben seien also

$$a(t) = a_0, \quad t_0 = 0, \quad \text{sowie beliebige Werte } v_0 \quad \text{und} \quad x_0. \quad (1.6)$$

Wir finden damit

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt' = v_0 + a_0 \cdot t \quad (1.7)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 \cdot t') dt' = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_0 t^2. \quad (1.8)$$

Wir haben jetzt schon stillschweigend eine ganze Reihe einfacher aber sehr wichtiger mathematischer Begriffe benutzt, die wir in einem ersten **mathematischen Einschub** kurz fixieren wollen:

1.2 Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung (M)

Zunächst haben wir den zentralen Begriff der **Funktion**, im einfachsten Fall

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x), \quad (1.9)$$

wobei \mathbb{R} die reellen Zahlen bezeichnet. Die Differentiation oder **Ableitung** wird als Grenzwert definiert:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.10)$$

Der Ausdruck df bezeichnet den in Δx linearen Anteil des Zuwachses $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$. Aus

$$\Delta f = f'(x) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (1.11)$$

folgt also

$$df = f'(x) \Delta x. \quad (1.12)$$

Angewandt auf die Identitätsabbildung $x \rightarrow x$ hat man außerdem

$$dx = \Delta x, \quad (1.13)$$

weil hier der Zuwachs exakt linear ist. Somit folgt

$$df = f'(x) dx. \quad (1.14)$$

Der Ausdruck

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad (1.15)$$

erklärt also nicht eigentlich die Ableitung $f'(x)$ sondern ist nur eine Schreibweise für diese. Nichtsdestotrotz ist diese Schreibweise nützlich, weil bei kleinem Δx

$$df \simeq \Delta f \quad (1.16)$$

gilt und obige Schreibweise intuitiv die Grenzwertdefinition der Ableitung beinhaltet. Der Physiker benutzt df als Schreibweise für Δf bei kleinem $\Delta x = dx$.

Natürlich ist $f'(x)$ wieder eine Funktion, so dass $f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ analog zu $f'(x)$ definiert werden können.

Für die Praxis wichtig sind

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{Produkt- oder Leibnizregel}) \quad (1.17)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Kettenregel}) \quad (1.18)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (\text{Differentiation inverser Funktionen}). \quad (1.19)$$

Hierbei haben wir die Verknüpfung zweier Funktionen und die inverse Funktion benutzt, die wie folgt definiert sind:

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x)), \quad f^{-1} : x = f(y) \mapsto y. \quad (1.20)$$

Wir überlassen den Beweis von (1.17) und (1.18) den Übungen und geben nur für (1.19) eine Begründung:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(f(y))} = \frac{dy}{f'(y)dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (1.21)$$

Schöne und wichtige Beispiele dazu sind u.a.

$$(x^x)' = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x \ln x})' = (e^{x \ln x})(x \ln x)' = (e^{x \ln x})(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1), \quad (1.22)$$

$$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} \quad \text{wobei } y = \tan^{-1}(x). \quad (1.23)$$

Den letzten Ausdruck kann man weiter vereinfachen, wenn benutzt dass

$$\tan'(y) = \left(\sin y \cdot \frac{1}{\cos y} \right)' = \cos y \cdot \frac{1}{\cos y} + \sin y \cdot \left(\frac{1}{\cos y} \right)' \quad (1.24)$$

$$= 1 + \sin y \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 y} \right) \cdot (-\sin y) = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2, \quad (1.25)$$

woraus folgt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (1.26)$$

Sowohl beim Differenzieren als auch in vielen anderen Fällen muss man natürlich **Grenzwerte** berechnen können. Eine nützliche Regel ist die von l'Hôpital (bei Ausdrücken "0/0"):

$$\text{Falls } \lim_{x \rightarrow x_0} f, g = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'} \text{ existiert, so gilt} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}. \quad (1.27)$$

Außerdem gilt

$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0, \quad \text{also z.B.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad (1.28)$$

und das 'Kürzen unter dem Grenzwert' ist erlaubt, also z.B.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}. \quad (1.29)$$

Für das **Integrieren** brauchen wir vor allem den sogenannten ‘Fundamentalsatz der Analysis’ bzw. der ‘Integral- und Differentialrechnung’, also z.B.

$$\int^y f(x) dx = F(y) \quad \text{wobei} \quad F'(y) = f(y) \quad (1.30)$$

oder (eine verbreitete aber nicht sehr präzise Schreibweise)

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1.31)$$

oder

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.32)$$

wobei man F als Stammfunktion bezeichnet. Die Definition als **Riemannsches Integral** und den Beweis überlassen wir den Mathematikern (bzw. Ihrer Erinnerung an die Schulbücher).

Praktisch nützlich sind die partielle Integration,

$$\int^y f(x)g'(x) dx = f(y)g(y) - \int^y f'(x)g(x) dx, \quad (1.33)$$

und die Variablensubstitution,

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dy} dy = \int f(x(y)) x'(y) dy. \quad (1.34)$$

Hier haben wir die Existenz einer invertierbaren Funktion $x : y \mapsto x(y)$ angenommen. Eine andere Formulierung dieser Regel ist

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy, \quad (1.35)$$

was der Substitution $y = g(x)$ entspricht.

Zwei ‘Klassiker’ in der Anwendung der beiden obigen Regeln sind

$$\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x(\ln x - 1), \quad (1.36)$$

und

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2}. \quad (1.37)$$

1.3 Kinematik des Massenpunktes in mehreren Dimensionen

Die Verallgemeinerung auf den zweidimensionalen Fall (Bewegung in der Ebene) ist naheliegend: Die Trajektorie ist jetzt durch $x(t)$ **und** $y(t)$ gegeben. Ein Beispiel ist $x(t) = v_0 t \cdot \sin(\omega t)$, $y(t) = v_0 t \cdot \cos(\omega t)$, siehe Abb. 2.

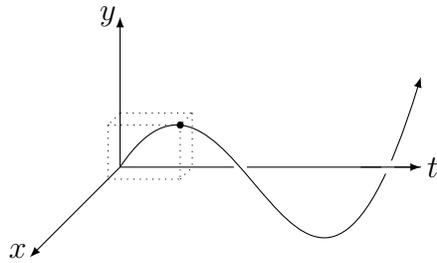


Abbildung 2: Trajektorie einer zweidimensionalen Bewegung

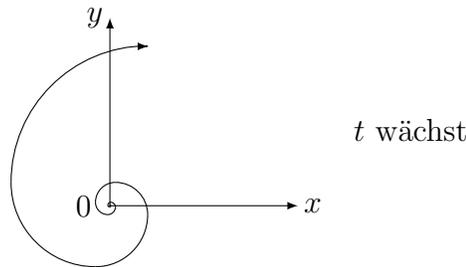


Abbildung 3: Raumkurve einer zweidimensionalen Bewegung.

Eine sich hier ergebende Neuerung besteht darin, dass man jetzt eine nichttriviale Darstellung **nur** im Raum, also in der x - y -Ebene angeben kann: Man markiert alle Punkte $\{x, y\}$ der Ebene, welcher unser Massepunkt durchläuft – vgl. Abb. 3. (Scheck [1] nennt dies die ‘Raumkurve’, während er für Trajektorie ‘Bahnkurve’ sagt. Dies ist aber nicht völlig universell).

Beim Schritt zu drei Dimensionen geschieht nichts Neues, außer dass eine graphische Darstellung der Trajektorie erschwert ist. (Man bräuchte jetzt vier Dimensionen: eine für die Zeit plus drei Raumdimensionen.) Formal ist dies aber kein Problem – die Trajektorie ist definiert durch

$$x(t), y(t), z(t) \quad \text{oder} \quad x^1(t), x^2(t), x^3(t) \quad \text{oder} \quad \{x^i(t)\} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.38)$$

Dementsprechend gilt für Geschwindigkeit und Beschleunigung, welche analog zu den Ortskoordinaten nun drei Komponenten haben,

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t) \quad \text{und} \quad a^i(t) = \dot{v}^i(t) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.39)$$

Eine angemessene mathematische Beschreibung nutzt Vektoren.

1.4 Vektorräume (M)

Def.: Eine Menge V heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen, die Addition (+) und die Multiplikation mit reellen Zahlen definiert sind,

$$+ : V \times V \rightarrow V; \quad \text{Mult.} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad ('V \times V' \equiv \text{Produktmenge} \equiv \text{Menge aller Paare}),$$

so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad (\text{mit } v, w, u \in V) \quad \text{Assoziativität}$$

$$v + w = w + v \quad \text{Kommutativität}$$

$$\exists 0 \in V \quad \text{so dass} \quad v + 0 = v \quad \forall v \in V \quad \text{Null}$$

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \quad (\text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad \text{Distributivität (bzgl. '+' in } V)$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \text{Distributivität (bzgl. '+' in } \mathbb{R})$$

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$

$$1 v = v \quad \text{Multiplikation mit Eins.}$$

Das einfachste Beispiel ist $V \equiv \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition und $0 \in \mathbb{R}$ als Vektorraum-Null.

Das nächste (und für uns im Moment wichtigste Beispiel) ist das der Zahlentupel aus n Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n \equiv \{(x^1, x^2, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}. \quad (1.40)$$

Eine bequeme Notation für Elemente solcher Räume ist¹

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T, \quad \vec{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)^T \quad \text{etc.} \quad (1.41)$$

wobei 'T' für 'transponiert' steht – man betrachtet den Vektor also als einen Spaltenvektor (keinen Zeilenvektor). Diese Unterscheidung wird später im Zshg. mit Matrizen zwar wesentlich sein, spielt aber im Moment keine Rolle, so dass wir das T oft weglassen werden.

Naheliegenderweise definiert man

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &\equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n) \\ \vec{0} &\equiv (0, \dots, 0) \\ \alpha \vec{x} &\equiv (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n), \end{aligned} \quad (1.42)$$

womit die Axiome leicht zu prüfen sind. Für $n = 2$ und 3 kann man die so definierten Vektoren mit 'Pfeilen' in einem 2 bzw. 3-dimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem identifizieren, siehe Abb. 4.

¹ Man kann auch $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ schreiben und meint damit die transponierte Matrix, also einen Spaltenvektor. Wenn wir später die Matrixschreibweise benutzen, werden wir dies auch tun, aber im Moment brauchen wir zwischen Zeilen- und Spaltenvektor nicht zu unterscheiden.

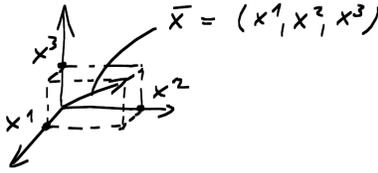


Abbildung 4: Vektoren als ‘Pfeile’.

Kinematik des Massenpunktes... (Fortsetzung)

Eine Trajektorie ist demnach eine Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad t \mapsto \bar{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t)) . \quad (1.43)$$

In Analogie zum eindimensionalen Fall gilt außerdem

$$\vec{v} = \dot{\bar{x}}(t) \quad \text{und} \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\bar{x}}(t) . \quad (1.44)$$

Dies setzt die folgende allgemeinere Definition der **Ableitung vektorwertiger Funktionen** voraus:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} . \quad (1.45)$$

Es folgt leicht, dass zum Beispiel: $\vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \dots, y^{n'}(x))$, $\dot{\bar{x}}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^3(t))$ etc.

Ein einfaches aber nicht ganz triviales Beispiel für eine dreidimensionale Trajektorie ist

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), v_0 t) \\ \vec{v}(t) &= (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), v_0) \\ \vec{a}(t) &= (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t), 0) . \end{aligned} \quad (1.46)$$

Die entsprechende Bahnkurve ist in Abb. 5 skizziert.

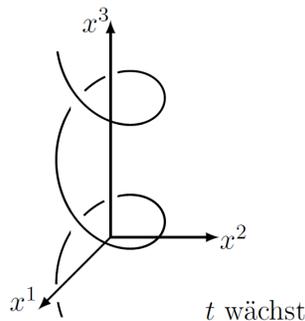


Abbildung 5: Mehrdimensionale Bewegung - Schraubenbahn.

Bemerkung: $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ leben in *verschiedenen* Vektorräumen! Dies ist allein schon aus Dimensionsgründen klar: $[x] = m$, $[v] = m/s$. Die Ursache ist das “ Δt ” im Grenzwert, welches dimensionsbehaftet ist.

Wie auch in einer Dimension können wir aus $\vec{a}(t)$ auf $\vec{v}(t)$ und $\vec{x}(t)$ schließen:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t') = \left(v_0^1 + \int_{t_0}^t dt' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^t dt' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^t dt' a^3(t') \right). \quad (1.47)$$

Wir illustrieren diese allgemeine Aussage an unserem obigen Beispiel der Schraubenbahn. Dabei haben wählen wir $t_0 = 0$ und finden somit $\vec{x}_0 = (R, 0, 0)$ und $\vec{v}_0 = (0, R\omega, v_0)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= (0, R\omega, v_0) + \int_0^t dt' (-R\omega^2) (\cos(\omega t'), \sin(\omega t'), 0) \\ &= (0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2) \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega t'), -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t'), 0 \right) \Big|_0^t \\ &= (0, R\omega, v_0) - R\omega [(\sin(\omega t), -\cos(\omega t), 0) - (0, -1, 0)] \\ &= (0 - R\omega \sin(\omega t), R\omega + R\omega \cos(\omega t) - R\omega, v_0 - 0 + 0) \\ &= (-R\omega \sin(\omega t), R\omega \cos(\omega t), v_0) \quad \checkmark \end{aligned} \quad (1.48)$$

Analog folgt $\vec{x}(t)$ aus $\vec{v}(t)$.

Bemerkung: Man kann Integrale über Vektoren auch direkt als Riemannsche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \lim_{N \rightarrow \infty} (\vec{v}(t_0) \Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t) \Delta t + \dots + \vec{v}(t - \Delta t) \Delta t), \quad \text{mit } \Delta t = \frac{t - t_0}{N}. \quad (1.49)$$

Zur Interpretation ist es wünschenswert, wieder zu nicht-vektoriellen ('skalaren') Größen zurückkehren zu können. Dies geschieht mittels des Skalarproduktes, welches wir jetzt einführen:

1.5 Skalarprodukt (M)

Eine Abbildung

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w \quad (1.50)$$

mit den Eigenschaften²

$$v \cdot w = w \cdot v \quad \text{und} \quad (\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha(u \cdot w) + \beta(v \cdot w) \quad (1.51)$$

heißt **symmetrische Bilinearform**. Sie heißt **positiv-semidefinit**, falls $v \cdot v \geq 0$. Sie heißt **positiv definit**, falls außerdem $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$ gilt.

Der Begriff **Skalarprodukt** wird oft synonym mit **positiv definiten symmetrischen Bilinearform** benutzt. Wir werden dem folgen. (Aber Vorsicht – manche Autoren sagen auch Skalarprodukt zu symmetrischen Bilinearformen ohne die beiden letzten Forderungen.)

² Die Bezeichnung bilinear ergibt sich daraus, dass man eine Funktion mit der Eigenschaft $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, also eine Funktion mit einem linearen Graphen, als linear bezeichnet.

Wir definieren die **Norm** (Länge) eines Vektors als

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}. \quad (1.52)$$

Während das obige völlig allgemein gilt und viele Anwendungen für die verschiedensten Vektorräume hat, brauchen wir im Moment nur den \mathbb{R}^n . Auf diesem definieren wir ein Skalarprodukt wie folgt:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1 y^1 + \dots + x^n y^n = \sum_{i=1}^n x^i y^i \equiv x^i y^i. \quad (1.53)$$

Hier haben wir im letzten Schritt die sogenannte **Einsteinsche Summenkonvention** eingeführt, welche schlicht besagt, dass man über doppelt auftretende Indizes (in diesem Fall ‘ i ’) zu summieren hat, auch wenn kein Summenzeichen dasteht. Dies spart viel Schreibarbeit.

Außerdem folgt sofort

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}. \quad (1.54)$$

Es ist wichtig sich klarzumachen, dass unser Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n eine spezielle Wahl darstellt (manchmal nennt man es das ‘euklidische Skalarprodukt’). Eine andere Wahl, z.B. auf \mathbb{R}^2 , wäre $\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv 7x^1 y^1 + x^2 y^2$. Ein Beispiel für eine nicht positive semidefinite Bilinearform ist $\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1 y^1 - x^2 y^2$. Fällt Ihnen ein Beispiel für eine positiv semidefinite aber nicht positiv definite Bilinearform ein?

Kinematik des Massenpunktes... (Fortsetzung)

Da es im Rest der Vorlesung sehr viele Vektoren geben wird, werden wir den Vektorpfeil zum einem Strich vereinfachen. Der anschauliche *Abstand* zwischen zwei Raumpunkten \bar{x} und \bar{y} ist

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \bar{y}| &= \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}) \cdot (\bar{x} - \bar{y})} = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y})^2} \\ &= \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2} \\ &= \sqrt{(x^i - y^i)(x^i - y^i)} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{y}} = \sqrt{|\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 - 2|\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos(\theta)}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $\bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cdot \cos(\theta)$, was man auch als Definition des Skalarprodukts von (geometrisch definierten) Vektoren nehmen könnte. In unserem Zugang ist dies beweisbedürftig.

Wir beschränken uns auf den Spezialfall $\bar{x} = (x^1, 0, 0)$, $\bar{y} = (y^1, y^2, 0)$. Dann haben wir

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x^1 y^1, \quad \cos \theta = \frac{y^1}{|\bar{y}|}, \quad |\bar{x}| = x^1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = |\bar{x}| \cdot |\bar{y}| \cos \theta. \quad (1.56)$$

Dass dies auch für beliebige Vektoren \bar{x} , \bar{y} gilt, wird später klar werden (falls es nicht jetzt schon offensichtlich ist).

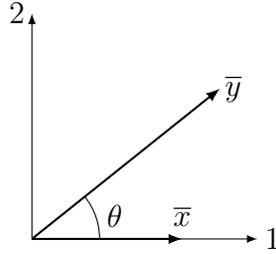


Abbildung 6: Zum Skalarprodukt zweier Vektoren.

Für uns ist speziell der infinitesimale Abstand $|\overline{d\bar{x}}|$, der zu einem kleinen Zeitintervall dt gehört, interessant:

$$\begin{aligned} \overline{d\bar{x}} &= (dx^1, dx^2, dx^3) = \left(\frac{dx^1}{dt} dt, \frac{dx^2}{dt} dt, \frac{dx^3}{dt} dt \right) \\ &= (v^1 dt, v^2 dt, v^3 dt) = (v^1, v^2, v^3) dt = \bar{v} dt \end{aligned} \quad (1.57)$$

Oder viel knapper: $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}$, was aus der auf Vektoren verallgemeinerten Definition von ‘ df ’ folgt. Wir haben außerdem

$$d\bar{x}^2 = |\overline{d\bar{x}}|^2 = |\bar{v}|^2 dt^2 \quad \text{und} \quad |\overline{d\bar{x}}| = |\bar{v}| dt. \quad (1.58)$$

1.6 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

Wir können $|\overline{d\bar{x}}|$ entlang $\bar{x}(t)$ ‘aufaddieren’ und so die Länge eines Teils der Trajektorie bestimmen (**Bogenlänge**):

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\overline{d\bar{x}}| = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\bar{x}}{dt'} \right| = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{\dot{\bar{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{\bar{v}(t')^2}.$$

Die infinitesimale Version dazu, nach Division durch dt , lautet

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = |\bar{v}|. \quad (1.59)$$

Zumindest im Prinzip kann man $s(t) = s$ nach t auflösen, also

$$t = t(s) \quad \text{und somit} \quad \bar{x}(s) \equiv \bar{x}(t(s)) \quad (1.60)$$

schreiben. Diese Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge s ist oft nützlich. Zum Beispiel ist

$$\bar{T}(s) = \frac{d\bar{x}(s)}{ds} \quad (1.61)$$

der **Tangentenvektor**. Es gilt offensichtlich $\bar{T} \parallel \bar{v}$ sowie (vgl. Abb. 8)

$$|\bar{T}| = \left| \frac{\bar{v} dt}{|\bar{v}| dt} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \cdot \bar{T} = 1. \quad (1.62)$$

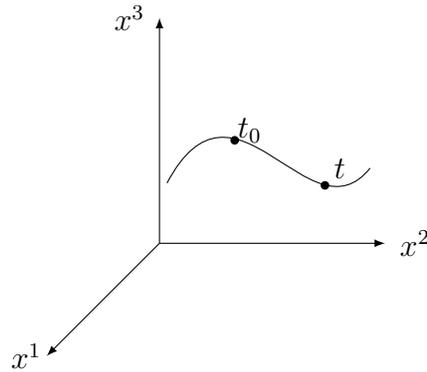


Abbildung 7: Mehrdimensionale Bewegung - Bogenlänge

Außerdem sieht man leicht, dass die Ableitung des Tangentenvektors orthogonal auf diesem steht:

$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d}{ds}(\bar{T} \cdot \bar{T}) \stackrel{3}{=} \frac{d\bar{T}}{ds} \cdot \bar{T} + \bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} = 2\bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds}. \quad (1.63)$$



Abbildung 8: Illustration zum Tangentenvektor.

Wir definieren den **Krümmungsradius** der Bahn als

$$\rho = \frac{1}{\left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|} \quad (1.64)$$

und den **Normalenvektor** (oder auch Hauptnormalenvektor) als

$$\bar{N} = \frac{\left(\frac{d\bar{T}}{ds} \right)}{\left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|} = \rho \cdot \frac{d\bar{T}}{ds}. \quad (1.65)$$

Zur Illustration betrachten wir ein einfaches Beispiel in 2 Dimensionen:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= R(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad , \quad \bar{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)) \quad , \\ |\bar{v}| &= \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} = R\omega \quad , \\ s(t) &= \int_{t_0=0}^t dt' |\bar{v}| = R\omega t \quad , \quad t(s) = \frac{s}{R\omega} \end{aligned} \quad (1.66)$$

³Prüfen Sie dies anhand von $\bar{T} \cdot \bar{T} = T^1 T^1 + T^2 T^2 + T^3 T^3$ nach!

Wir haben hier im letzten Schritt explizit nach t aufgelöst, und finden so

$$\begin{aligned}\bar{x}(s) &= R \left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R} \right) \quad , \quad \bar{T} = \frac{d\bar{x}}{ds} = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right) \\ \rho &= R \quad , \quad \bar{N} = - \left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R} \right) .\end{aligned}\tag{1.67}$$

Dies ist in Abb. 9 illustriert. Der Krümmungsradius ist hier einfach der Radius der Kreisbahn. Im Allgemeinen variiert ρ natürlich entlang der Bahn.

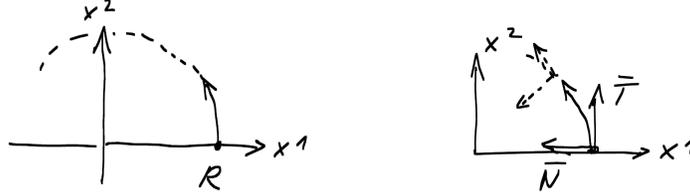


Abbildung 9: Illustration zu Tangenten- und Normalenvektor der Kreisbahn.

Um Fortzufahren, ist es notwendig, das speziell in drei Dimensionen existierende **Vektorprodukt** (auch Spatprodukt oder Kreuzprodukt) einzuführen. Dies ist eine Abbildung

$$V \times V \rightarrow V \quad , \quad (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} .\tag{1.68}$$

Der letzte Ausdruck ist durch

$$c^i = (\bar{a} \times \bar{b})^i \equiv \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} a^j b^k$$

definiert, wobei $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{312} = 1$, $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$ und sonst Null ist. Mit anderen Worten, $\varepsilon^{ijk} = 0$ fall zwei Indizes gleich sind.

Alternativ kann man \bar{c} auch durch $|\bar{c}| \equiv |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot |\sin \theta|$ definieren, wobei die Richtung von \bar{c} durch $\bar{c} \perp \bar{a}$ und $\bar{c} \perp \bar{b}$ eindeutig bestimmt ist. Man kann statt dessen auch $\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$ fordern. Das Vorzeichen wird so fixiert, dass \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} ein **Rechtssystem** bilden. Das bedeutet, \bar{c} zeigt in die Bewegungsrichtung einer Rechtsschraube, die der Drehung der Schraube von \bar{a} nach \bar{b} entspricht (Abb. 10).

Damit können wir nun zu unserem eigentlichen Ziel kommen, der Definition des **Binormalenvektors**

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} .\tag{1.69}$$

Wir sehen sofort, dass das sogenannte **begleitende Dreibein** \bar{T} , \bar{N} , \bar{B} ein Rechtssystem bildet. Diese Vektoren sind orthogonal und haben Länge 1 (vgl. Abb. 11). \bar{T} , \bar{N} spannen die **Schmiegeebene**.

Zur Information geben wir noch die sogenannten **Frenet'schen Formeln** an:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{N} \quad , \quad \frac{d\bar{B}}{ds} = -\frac{1}{\sigma} \bar{N} \quad , \quad \frac{d\bar{N}}{ds} = \frac{1}{\sigma} \bar{B} - \frac{1}{\rho} \bar{T} .\tag{1.70}$$

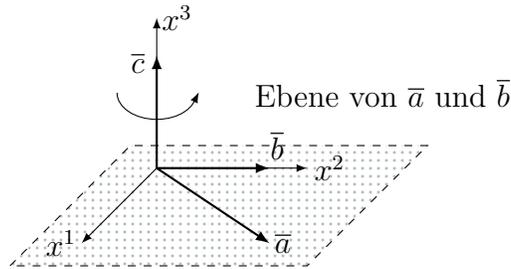


Abbildung 10: Rechtssystem

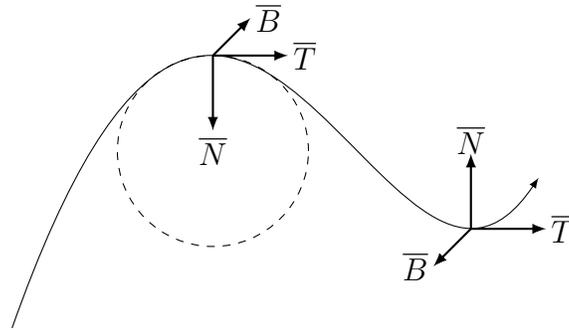


Abbildung 11: Begleitendes Dreibein und Schmiegekreis

Hier ist σ als der durch die zweite Gleichung definierte Torsionsradius. Man bezeichnet $1/\sigma$ als Torsion und $1/\rho$ als die Krümmung der Bahn (siehe z.B. [1]).

Die tiefere mathematische Bedeutung von ε^{ijk} (auch als **Levi-Civita-Symbol** bekannt) und des Vektorproduktes wird noch diskutiert werden.

2 Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik

2.1 Newtonsche Axiome

Es geht jetzt um Dynamik, also um die Ursachen der Bewegungen, die zu beschreiben wir in Kapitel 1 gelernt haben. Genauer gesagt geht es um Ursachen der *Bewegungsänderung*. Diese Ursachen sind Kräfte, quantifiziert durch Vektoren $\bar{F} = (F^1, F^2, F^3)$. Vertraute Beispiele sind Muskelkraft, Federkraft oder Kraftfelder.

Die Newtonsche Mechanik basiert auf den **Newtonsche Axiomen**:

(I) Es existieren Inertialsysteme, also Koordinatensysteme, in denen eine Punktmasse, an der keine Kraft angreift, ruht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt: $\ddot{\bar{x}} = 0$.

(II) In solchen Systemen gilt: $\bar{F} = m \ddot{\bar{x}}$ oder auch ($\bar{F} = m\bar{a}$)

(III) Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt: $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

Hierbei bezeichnet \overline{F}_{12} die Kraft ist, die auf 1 wirkt und von 2 ausgeht, vgl. Abb. 12.

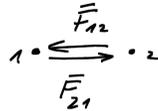


Abbildung 12: Zum dritten Newtonschen Axiom.

Wir bemerken, dass (I) als Spezialfall von (II) angesehen werden kann. Des Weiteren ist (II) *nicht* die Definition von \overline{F} , sondern \overline{F} muss unabhängig bekannt sein. Dies ist beispielsweise durch Federkraftmesser, durch die vorherige Vermessung eines Kraftfeldes (mittels Bewegung eines Probekörpers, oder durch (III) möglich.

Axiom (II) definiert die (träge) Masse eines Körpers. Die entscheidende physikalische Aussage von (II) ist das Auftreten der **zweiten Ableitung** $\ddot{\overline{x}}$ (und *nicht* beispielsweise von $\dot{\overline{x}}$ oder $\overline{\dot{x}}$).

Eine alternative (und in einiger Hinsicht tiefere) Diskussion der obigen Axiomatik findet sich in Kapitel 1.2 von Jose/Saletan [2]. Im Gegensatz zu unserem Zugang wird dort die Kraft gemäß (II) definiert. Es bleibt aber dabei, dass in vielen Fällen $m\ddot{\overline{x}}$ a priori bekannt ist und dementsprechend $\ddot{\overline{x}}$ aus (II) folgt.

Ein entscheidender Zusatz, der praktisch den Status eines weiteren Axioms hat, ist der folgende: **Kräfte addieren sich als Vektoren**. Dies gilt z.B. für zwei unabhängig und gleichzeitig auf eine Punktmasse wirkende Kräfte:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \quad \overline{F} = m \ddot{\overline{x}}$$

Um Vorhersagen machen zu können, müssen wir verstehen, wie man von $\overline{F} = m\ddot{\overline{x}}$ zur Trajektorie $\overline{x}(t)$ kommt. Dabei sei \overline{F} gegeben, zum Beispiel in Form eines Kraftfeldes $\overline{F} = \overline{F}(\overline{x}, t)$. Dazu brauchen wir

2.2 Differentialgleichungen (M)

Wir besprechen hier nur **gewöhnliche** Differentialgleichungen. In diesen kommen nur Ableitungen der gesuchten Funktion nach **einer** reellen Variablen, z.B. x , vor. Zu **partiellen** Differentialgleichungen, in denen Ableitungen nach verschiedenen Variablen auftreten, kommen wir erst viel später.

Die allgemeine Form einer **gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung** ist

$$y'(x) = f(x, y). \tag{2.1}$$

Man spricht von 1. Ordnung da nur die erste Ableitung auftritt. Als Lösung bezeichnet man umgangssprachlich eine Funktion

$$y : x \mapsto y(x) \quad \text{mit} \quad y'(x) = f(x, y(x)). \tag{2.2}$$

Dies wird im Allgemeinen für x aus einem gewissen Intervall, also $x \in I \equiv (a, b) \subset \mathbb{R}$ gelten.

Präziser spricht man von einem **Anfangswertproblem**, dass durch eine

$$\text{Dgl. } y'(x) = f(x, y) \quad \text{und eine Anfangsbedingung} \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

gegeben ist. Gesucht wird dann eine Funktion

$$y(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad y'(x) = f(x, y) \quad \text{für} \quad x \in I, \quad (2.4)$$

wobei natürlich auch $x_0 \in I$ gelten muss.

Es gibt eine Reihe von Theoremen (z.B. von Peano und von Picard-Lindelöf), die die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems garantieren. Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert, wenn

$$f(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (\text{die partielle Ableitung}) \quad (2.5)$$

stetig sind. Wir werden uns nur für Fälle interessieren, in denen Existenz und Eindeutigkeit gesichert sind.

Um das Obige präziser zu verstehen, bemerken wir, dass wir ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen betrachten, also z.B.

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y). \quad (2.6)$$

Partielle Ableitungen sind genau so wie normale Ableitungen definiert, z.B.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (2.7)$$

Entsprechend dieser Definition berechnen sie sich auch so wie normale Ableitungen, wobei die ‘andere(n)’ Variablen als Konstanten behandelt werden:

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y. \quad (2.8)$$

Jetzt kehren wir zu unserem Thema der Dgl.en zurück und versuchen, gemäß Abb. 13 eine Anschauung für die Existenz von Lösungen zu entwickeln. Wir zeichnen an jedem Punkt (x, y) einen Vektor $(1, f(x, y))$ ein. Graphen von Lösungen folgen stets diesem Richtungsfeld, weil

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(x, y) = \frac{f(x, y)}{1}, \quad (2.9)$$

d.h. die Steigung des Graphen entspricht an jedem Punkt der Richtung des eingezeichneten Vektors. Es ist jetzt anschaulich klar, dass es fuer hinreichend ‘glatte’ Richtungsfelder eindeutige Lösungen geben wird.

Man kann sich Eindeutigkeit und Existenz auch klar machen, indem man an eine ‘stückchenweise’ (numerische) Konstruktion denkt (vgl. Abb. 14). Man beginnt bei x_0 , wo die

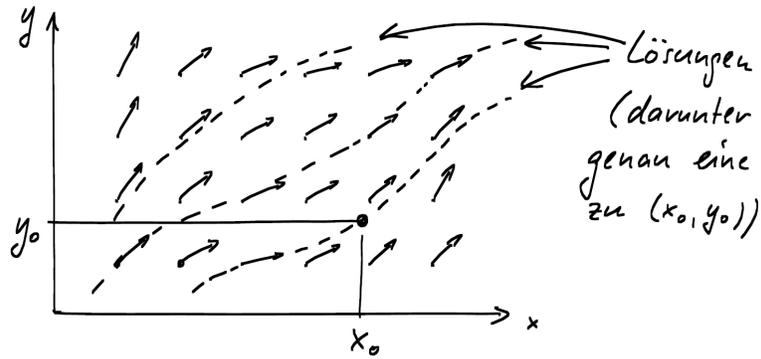


Abbildung 13: Zur Lösbarkeit von Dgl.en.

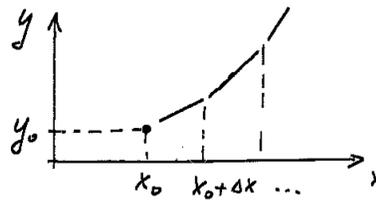


Abbildung 14: Zur numerischen Lösbarkeit.

Steigung als $f(x_0, y_0)$ bekannt ist. Dann hat man bei kleinem Δx mit $y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x$ eine gute Näherung für den Wert der Lösung bei $x_0 + \Delta x$. Jetzt benutzt man

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x) \quad (2.10)$$

als Näherung für die Steigung bei $x_0 + \Delta x$, usw. usw.

Betrachten wir als einfaches Beispiel zunächst

$$y'(x) = f(x, y) \quad \text{mit} \quad f(x, y) = 3. \quad (2.11)$$

Man hat also

$$y'(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int 3 dx = 3x + C, \quad (2.12)$$

was schon die sogenannte **allgemeine Lösung** ist. Ein Anfangswertproblem, z.B. das mit $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ lässt sich durch Bestimmung der Konstanten C lösen:

$$y(x) = 3x + C \quad \Rightarrow \quad 1 = 3(-1) + C \quad \Rightarrow \quad C = 4 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 3x + 4. \quad (2.13)$$

Dieses Lösen durch **einfache Integration** funktioniert immer, wenn f nicht von y abhängt.

Als nächstes betrachten wir

$$f(x, y) = \frac{x}{y}, \quad \text{also} \quad y'(x) = \frac{x}{y(x)}. \quad (2.14)$$

Dies löst man durch **Separation der Variablen**. Dazu formt man gemäß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y dy = x dx \quad (2.15)$$

um. Die Variablen sind nun getrennt und man kann wiederum einfach integrieren:

$$\int y \, dy = \int x \, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{x^2 + 2c}. \quad (2.16)$$

Mit dieser allgemeinen Lösung analysieren wir jetzt das (allgemeine!) Anfangswertproblem mit Anfangswerten (x_0, y_0) :

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \quad \Rightarrow \quad 2c = y_0^2 - x_0^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= \sqrt{y_0^2 + (x^2 - x_0^2)} && \text{für } y_0 > 0 \\ y &= -\sqrt{y_0^2 + (x^2 - x_0^2)} && \text{für } y_0 < 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Schar von Lösungen ist in Abb. 15 illustriert. Die Methode der Separation der Variablen funktioniert immer, wenn $f(x, y) = g(x)h(y)$.

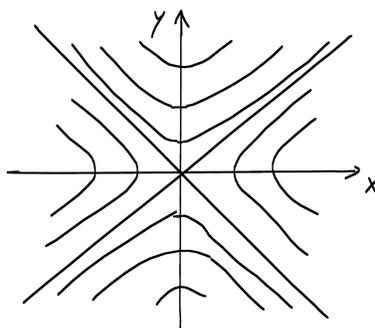


Abbildung 15: Illustration der Lösungen aus (2.17)

Nach diesen Beispielen kehren wir jetzt zur allgemeinen Diskussion zurück. Alles, was oben über allgemeine Lösung, Anfangswertproblem, Existenz und Eindeutigkeit gesagt wurde, überträgt sich sofort auf **Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung**. Diese schreibt man als

$$\begin{aligned} \frac{dy^1(x)}{dx} &= f^1(x, y^1, \dots, y^n) \\ &\dots \\ \frac{dy^n(x)}{dx} &= f^n(x, y^1, \dots, y^n) \end{aligned} \quad (2.18)$$

oder, in Vektorschreibweise, als

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}). \quad (2.19)$$

Wir haben hier n Funktionen von jeweils $n + 1$ Variablen in eine **vektorwertige Funktion** zusammengefasst: $\bar{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Die Anfangsbedingung ist jetzt durch (x_0, \bar{y}_0) gegeben. Dies sind $n + 1$ Parameter, von denen aber einer bloß der Verschiebung entlang ein und derselben Lösung entspricht. Somit hat die allgemeine Lösung $(n + 1) - 1 = n$ Parameter oder **Integrationskonstanten**.

Außerdem können wir sofort auf **Systeme gewöhnlicher Dgl.en der Ordnung p** verallgemeinern:

$$\bar{y}^{(p)}(x) = \bar{f}(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \dots, \bar{y}^{(p-1)}), \quad \text{wobei} \quad \bar{y}^{(p)} \equiv \frac{d^p \bar{y}(x)}{dx^p}. \quad (2.20)$$

Als Anfangsbedingungen brauchen wir jetzt $(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}_0^{(p-1)})$. Hier ist z.B. \bar{y}'_0 der Wert, den $\bar{y}'(x)$ bei $x = x_0$ annehmen soll. Dies ist nur scheinbar eine enorme Komplikation gegenüber Dgl.en 1. Ordnung. In Wirklichkeit passiert, zumindest auf formaler Ebene, nicht all zu viel Neues. Dies folgt aus der **entscheidenden Tatsache**, dass sich Systeme von Dgl.en auf **größere Systeme niedrigerer Ordnung** zurückführen lassen. Wir illustrieren dies am Beispiel von n Dgl.en 2. Ordnung:

$$\bar{y}'' = \bar{f}(x, \bar{y}, \bar{y}'). \quad (2.21)$$

Dieses System ist äquivalent zu folgendem System von $2n$ Dgl.en 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \bar{z}' &= \bar{f}(x, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{y}' &= \bar{z} \quad (\equiv g(x, \bar{y}, \bar{z})). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die ursprüngliche Form ergibt sich, indem man einfach die zweite Zeile in die erste einsetzt.

Dies lässt sich sofort auf n Dgl.-en der Ordnung p verallgemeinern: Man gibt einfach den $(p - 1)$ niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variable. Die zusätzlichen Dgl.en sind, wie in unserem Beispiel die zweite Zeile, einfach die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ursprünglichen Ableitungen handelt. Man hat dann ein System von np Dgl.en 1. Ordnung. Die allgemeine Lösung hat np Parameter. Zum Beispiel hat eine Dgl. vom Grad 2 eine zweiparametrische Lösungsschar.

2.3 Erste physikalische Beispiele

Der für eine Punktmasse relevante Fall ist ein System von 3 Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{1}{m} \bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$$

oder das entsprechende System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= \frac{1}{m} \cdot \bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, t) \\ \dot{\bar{x}} &= \bar{v}. \end{aligned}$$

In vielen interessanten Fällen kann man annehmen, dass \bar{F} nicht von \bar{v} und t abhängt. Wir sprechen von einem (zeitunabhängigen) **Kraftfeld** $\bar{F}(\bar{x})$. Wir haben solche "vektorwertigen Funktionen" oben schon benutzt. Hier ist $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei insbesondere der Zielraum als Vektorraum anzusehen ist. Dies ist ein *Vektorfeld*. Im zweidimensionalen Fall ist dies

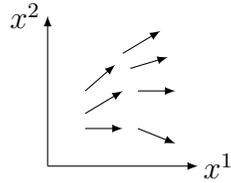


Abbildung 16: Darstellung eines Vektorfeldes. Es ist zu beachten, dass die Achsen doppelte Markierungen tragen müssen: zum einen in m , für den Ort, zum anderen in N , für die Kraft.

in Abb. 16 dargestellt. Die Neuerung ist nicht allzu groß, da es im Grunde nur 3 (bzw. 2) Funktionen von je 3 (bzw. 2) Variablen sind: $F^1(x^1, x^2, x^3)$, $F^2(x^1, x^2, x^3)$, $F^3(x^1, x^2, x^3)$.

Speziell im eindimensionalen Fall (Dimensionszahl $d = 1$) haben wir bei gegebenem Kraftfeld $\dot{v} = F(x)/m$, $\dot{x} = v$. Es ändert sich prinzipiell nichts, wenn wir auch eine Abhängigkeit der Kraft von der Geschwindigkeit zulassen: $F(x) \rightarrow F(x, v)$. Wir können den aktuellen Bewegungszustand der Punktmasse in einem v - x -Diagramm darstellen. Die Änderung dieses Zustandes wird durch den $2d$ -Vektor

$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} \bullet = \begin{pmatrix} F(x)/m \\ v \end{pmatrix}$$

beschrieben, siehe auch Abb. 17.

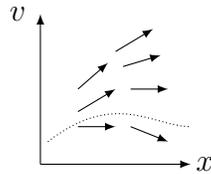


Abbildung 17: Phasenraumdarstellung. (Eigentlich bezeichnet man mit Phasenraum den Raum der Werte von $(p = mv, x)$, aber für uns spielt im Moment der **Impuls** $\bar{p} \equiv m\bar{v}$ noch keine besondere Rolle und wir benutzen die äquivalente Variable \bar{v} .)

Bei gegebenem Startpunkt findet man, indem man dem Vektorfeld folgt, eindeutig eine die Bewegung beschreibende Kurve. Sie ist, wie wir bereits beim Lösen von Dgl.en gesehen haben, durch das Vektorfeld definiert. Die Analyse im Phasenraum passt perfekt zur Analyse eines Systems von Dgl.en 1. Ordnung.

Das ganze geht völlig analog in $3d$, aber die graphische Darstellung des Vektorfeldes $(\bar{F}/m, \bar{v})$ im zugehörigen $6d$ -Phasenraum (\bar{v}, \bar{x}) bzw. (\bar{p}, \bar{x}) ist natürlich schwierig. Bei zusätzlicher t -Abhängigkeit wird es noch schwieriger, da sich das Vektorfeld jetzt zeitlich ändert, aber prinzipiell bestimmt immer noch das Vektorfeld die Bewegung.

Als konkretes Beispiel, jetzt wieder in $d = 1$, betrachten wir den **Harmonischen Oszillator** $F(x) = -k \cdot x$. Wir überlassen im Moment die Diskussion der Einheiten der Experimentalphysik und setzen $k = m = 1$, so dass

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -x \\ \dot{x} &= v \end{aligned} \tag{2.23}$$

unser Dgl.-System ist, vgl. Abb. 18. Das Feld der Vektoren $(-x, v)$ ist eingezeichnet: An jedem Punkt ist der Vektor orthogonal zum Vektor (v, x) , der diesen Punkt definiert. Die vertrauten Oszillationen in x und v lassen sich sofort ablesen.

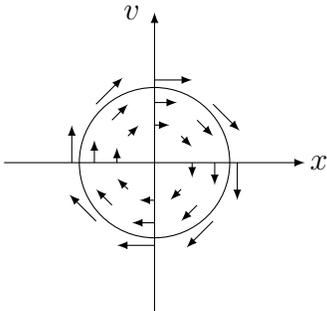


Abbildung 18: Vektorfeld und eine Beispiel-Trajektorie im Phasenraum des Harmonischen Oszillators.

Unser nächstes Beispiel ist der **Freie Fall mit Luftwiderstand**:⁴ $F_R = -c \cdot v^2$. Dies soll uns auch als Beispiel für das Lösen einer Aufgabe dienen.

Aufgabe: Bestimme die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit, wenn der Körper im Schwerfeld losgelassen wird.

Lösung: Problem eindimensional, x wachse nach unten.
Start bei $t = 0$, $x = 0$, mit $\dot{x} = 0$.

$$F = m\ddot{x} \Rightarrow mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \Rightarrow \begin{aligned} mg - cv^2 &= m\dot{v} \\ v &= \dot{x} \end{aligned} \quad (2.24)$$

\Rightarrow 2 Gleichungen 1. Ordnung

Erste Gleichung enthält kein x und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2 \quad (2.25)$$

Separation der Variablen:

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2} \quad (2.26)$$

Aus den Konstanten g und c/m mit den Einheiten ('Dimensionen')

$$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{und} \quad \left[\frac{c}{m}\right] = \frac{\text{N}}{(\text{m/s})^2 \text{kg}} = \frac{1}{\text{m}} \quad (2.27)$$

⁴ Diese quadratische Geschwindigkeitsabhängigkeit ist bei turbulenter Strömung, also bei hinreichend großer Strömungsgeschwindigkeit bzw. Reynolds-Zahl, angemessen. Bei kleineren Geschwindigkeiten hat man es mit laminarer Strömung und sogenannter Stokesscher Reibung zu tun. Dann ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit linear.

lassen sich leicht Konstanten definieren, die die Dimension von Zeit und Geschwindigkeit haben:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \quad \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}. \quad (2.28)$$

In den dimensionslosen Variablen $t' \equiv t/\hat{t}$ und $v' \equiv v/\hat{v}$ folgt

$$dt' = \frac{dv'}{1-v'^2} = \frac{dv'}{2} \left(\frac{1}{1+v'} + \frac{1}{1-v'} \right) \quad (2.29)$$

und

$$2t' = \ln(1+v') - \ln(1-v') + C, \quad (2.30)$$

wobei $v' = 0$ bei $t' = 0 \Rightarrow C = 0$.

Jetzt lösen wir nach v auf:

$$\begin{aligned} e^{2t'} &= \frac{1+v'}{1-v'}, & e^{2t'} - v' \cdot e^{2t'} &= 1+v' \\ v' &= \frac{e^{2t'} - 1}{e^{2t'} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1} \\ v &= \hat{v} \cdot \left(1 - \frac{2}{e^{2t'/\hat{t}} + 1} \right) \quad \text{mit} \quad \hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \quad \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Es wird jetzt klar, dass \hat{v} die asymptotische Fallgeschwindigkeit ist, welche für $t \gg \hat{t}$ exponentiell schnell angenommen wird.

Als ‘Zugabe’ liefern wir noch einfache physikalische Argument für die Größe von c , und zwar

$$c \sim \rho_L \cdot A, \quad (2.32)$$

wobei ρ_L die Dichte der Luft und A der horizontale Querschnitt des fallenden Körpers ist.

Ersten, folgt dies schlicht aus Dimensionsgründen, weil

$$[c] = \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

und c (in grober Näherung) nur von ρ_L und A abhängen kann. Zweitens ist wegen des dritten Newtonschen Axioms F_R vom Betrag her gleich der Kraft, welche die Luft unter dem Körper verdrängt. Diese muss an einem Luftvolumen Al (mit der Höhe l) soviel Arbeit verrichten, damit diese die Geschwindigkeit des Körpers erhält (Abb. 19). Anderenfalls kann die Luft dem Körper nicht ausweichen. Man findet also

$$F_R \cdot l \sim E_{kin,Luft} \sim \rho_L \cdot l \cdot A \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (2.33)$$

und damit $c \sim \rho_L A$.

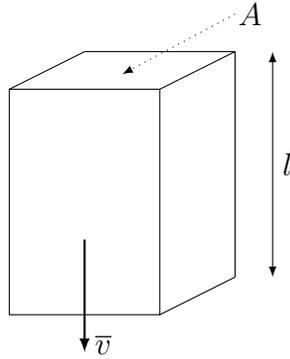


Abbildung 19: Zur Verdrängung der Luft unter dem fallenden Körper.

2.4 Harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator ist trotz seiner Einfachheit eines der wichtigsten physikalischen Systeme. Seine Bedeutung geht weit über die klassische Mechanik hinaus. Ein Grund dafür ist, dass er in vielen Situationen zumindest angenähert das Verhalten von Systemen, die eigentlich komplizierter sind, gut beschreibt. Um dies zu verstehen, beschränken wir uns zunächst auf $d = 1$ und eine Kraft $F = F(x)$. Wir schreiben

$$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x) = -V'(x). \quad (2.34)$$

Das somit als Stammfunktion von $-F$ definierte **Potential** V (Abb. 20) charakterisiert natürlich die **potentielle Energie** – darüber werden wir in Kürze noch eingehender sprechen.

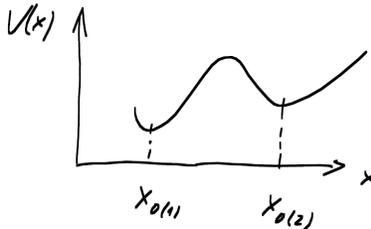


Abbildung 20: Potential mit zwei lokalen Minima.

Unser Massenpunkt kann nur an Orten ruhen, an denen $F = 0$ beziehungsweise $V' = 0$. Genauer: Nur an den Minima, denn die Maxima sind instabil. Wir wollen jetzt ‘kleine’ Bewegungen in der Nähe eines solchen Minimums von $V(x)$ untersuchen (z.B. bei x_0 , mit $V'(x_0) = 0$). Dazu brauchen wir eine einfache Beschreibung von $V(x)$ bei $x \approx x_0$. Dies gelingt mit Hilfe der

2.5 Taylorentwicklung (M)

Sei o.B.d.A. $x_0 = 0$. Wir wollen das Verhalten einer beliebigen glatten Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ verstehen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(0) + \int_0^x dx' f'(x') & (2.35) \\
 &= f(0) + f'(x')(x' - x)|_0^x - \int_0^x dx' f''(x')(x' - x) \\
 &= f(0) + f'(0)x - f''(x')\frac{(x' - x)^2}{2}\Big|_0^x + \int_0^x dx' f'''(x')\frac{(x' - x)^2}{2} \\
 &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \int_0^x dx' f'''(x')\frac{(x' - x)^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Wir können diese Rechnung fortsetzen, indem wir immer wieder partiell integrieren, und erhalten so die allgemeine Formel

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^m f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \int_0^x dx' f^{(m+1)}(x') \frac{(x' - x)^m}{m!}. \quad (2.36)$$

Falls das ‘Restglied’ für $m \rightarrow \infty$ verschwindet, finden wir also

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} \quad (2.37)$$

oder, nach völlig analoger Rechnung,

$$\textbf{Taylor-Reihe:} \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}. \quad (2.38)$$

Für uns besteht der Sinn natürlich darin, dass die ersten Terme oft eine gute Näherung sind. (Die Verallgemeinerung auf Funktionen vieler Variablen wird uns später mühlos gelingen.)

Warnung: Es gibt relativ einfache Beispiele, in denen das Restglied nicht gegen Null geht und die Taylor-Reihe keine vernünftige Näherung ermöglicht. Sei

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}. \quad (2.39)$$

Überzeugen Sie sich, dass alle Ableitungen existieren, auch bei Null. Dazu müssen sie eigentlich nur wissen, dass

$$\frac{1}{x^n} e^{-1/x^2} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow 0, \quad (2.40)$$

und alle n . Die Ableitungen verschwinden sogar bei Null, so dass die Taylor-Reihe Null ergibt und damit die Funktion in keiner Weise beschreibt. (Wo das Problem herkommt, sieht man eigentlich nur, wenn man x als komplexe Variable auffasst – aber damit greifen wir zu weit voraus....)

Harmonischer Oszillator (Fortsetzung)

Unsere geplante Anwendung war das Verhalten von $V(x)$ in der Nähe von x_0 , wobei $V'(x_0) = 0$ sein sollte. **In führender Ordnung** bei kleinem $|x - x_0|$ finden wir also jetzt

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 \quad \text{bzw.} \quad F(x) \simeq -V''(x_0)(x - x_0). \quad (2.41)$$

Mit $(x - x_0) \equiv y$ und entsprechender Redefinition von F folgt

$$F(y) = -k \cdot y \quad (k \equiv V''(0)), \quad (2.42)$$

wobei wir ab jetzt das ‘Ungefähr Gleich’ unterschlagen (in dem Bewusstsein, dass der harmonische Oszillator, so wie der Massenpunkt, in vielen Fällen eine nützliche Idealisierung ist).

Wir haben gelernt, dass das spezielle oben hergeleitete Kraftfeld (und damit der harmonische Oszillator als Näherung) eine **enorme Allgemeinheit** haben: Sie beschreiben alle ‘kleinen’ Bewegungen um stabile Ruhelagen! Wir werden sehen, dass dies auch in mehreren Dimensionen noch analog gilt, solange es zum Kraftfeld \bar{F} ein V gibt. Letzteres ist bei $d > 1$ nicht mehr automatisch der Fall.

Wir gehen jetzt wie üblich mit der Newtonschen Gleichung vor:

$$m\ddot{y} = -ky \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} = -\omega^2 y \quad \left(\text{wobei } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right). \quad (2.43)$$

Man prüft leicht nach, dass $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ diese Gleichungen lösen. Also ist

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) \quad (2.44)$$

auch wegen der Linearität der Gleichung eine Lösung. Wegen der beiden frei wählbaren Konstanten ist dies auch schon die allgemeine Lösung.

Wichtige Verallgemeinerungen sind ein geschwindigkeitsabhängiger Reibungsterm ($\sim \dot{y}$) und eine treibende Kraft ($\sim f(t)$). Man hat dann

$$\ddot{y} = -\omega^2 \cdot y - c \cdot \dot{y} + f(t), \quad (2.45)$$

was auch noch allgemein lösbar ist (siehe weiter unten). Dies ist ein guter Ort, um noch etwas prinzipielles zu der hier auftretenden besonderen Klasse von **linearen** Dgl.en zu sagen:

2.6 Lineare Differentialgleichungen (M)

Die allgemeine Form einer **linearen Dgl. n -ter Ordnung** ist

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_0(x)y(x) = f(x). \quad (2.46)$$

(Man beachte dass sich hier das Wort ‘linear’ nur auf y , nicht auf x , bezieht.) Die Gleichung heißt **homogen**, falls $f(x) \equiv 0$. Genauer gesagt bedeutet das Wort homogen (vom Grad p),

dass die Ersetzung $y(x) \rightarrow \alpha y(x)$ der Multiplikation der ganzen Gleichung mit α^p entspricht (bei uns ist $p = 1$). Das stimmt natürlich nur falls $f = 0$.

Wir hatten oben den Fall $n = 2$ mit **konstanten Koeffizienten**. Außerdem war unser Beispiel homogen, solange es keine treibende Kraft gab. Hier diskutieren wir zunächst den noch einfacheren Fall $n = 1$ mit $f(x) = 0$, lassen aber die x -Abhängigkeit des Koeffizienten zu:

$$y' + a(x)y = 0. \quad (2.47)$$

Das ist separabel und wir finden

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -A(x) + \dots \quad \Rightarrow \quad y = C e^{-A(x)}. \quad (2.48)$$

Hier soll A eine fest gewählte Stammfunktion von a sein und C die **eine** Integrationskonstante.

Um den inhomogenen Fall zu lösen, machen wir den als **Variation der Konstanten** bekannten Ansatz

$$y(x) = C(x) e^{-A(x)}. \quad (2.49)$$

Wir finden

$$\begin{aligned} (C e^{-A})' + a C e^{-A} &= f \\ C' e^{-A} - C A' e^{-A} + C a e^{-A} &= f. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Weil $A' = a$ gilt, kürzen sich die beiden letzten Terme auf der linken Seite, so dass

$$C' = f e^A \quad \text{bzw.} \quad C(x) = \int dx f(x) e^{A(x)} \quad (2.51)$$

folgt. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = \left[\int^x dx' f(x') e^{A(x')} \right] e^{-A(x)}. \quad (2.52)$$

Wir sehen, dass die frei wählbare additive Konstante im unbestimmten x' -Integral (also $C(x) \rightarrow C(x) + \alpha$) der Addition einer Lösung der homogenen Dgl. entspricht:

$$y(x) \rightarrow y(x) + \alpha e^{-A(x)}. \quad (2.53)$$

Wir wollen nun zusammenfassen und auf den Fall $n > 1$ verallgemeinern. Dazu definieren wir zunächst: Ein Satz von Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ heißt linear unabhängig, falls jede Linearkombination bei der nicht alle Koeffizienten Null sind ebenfalls nicht Null ist:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0. \quad (2.54)$$

(Dies ist natürlich nichts anderes als die Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren angewandt auf den Vektorraum von Funktionen.)

Kennen wir n linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Dgl. n -ter Ordnung, so kennen wir die allgemeine Lösung:

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (2.55)$$

Darüberhinaus kann man sich leicht überlegen, dass die allgemeine Lösung stets von dieser Form ist, mit anderen Worten: Es gibt immer n linear unabhängige Lösungen.

Wenn wir außerdem eine (sogenannte **partikuläre**) Lösung y_{part} der entsprechenden inhomogenen Dgl. haben, so haben wir damit auch schon die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x). \quad (2.56)$$

Man sieht dies sofort, indem man $y = y_{hom} + y_{part}$ in die Dgl.

$$y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + f_0 y = f \quad (2.57)$$

einsetzt. Zum Finden der partikulären Lösung kann auch bei $n > 1$ den Ansatz der Variation der Konstanten machen: $C_i \rightarrow C_i(x)$. Dies funktioniert besonders bei konstanten Koeffizienten gut. Mächtigere Methoden beruhen auf der uns schon bekannten Überführung in ein System von n Dgl.en 1. Ordnung. Dort hat man allgemeine Möglichkeiten zur Lösung von homogenem und inhomogenem System. Dies ist in vielen Analysis- und Dgl.-Lehrbüchern beschrieben. Auch der Wikipedia-Artikel zur "Variation der Konstanten" ist gut lesbar. Allerdings haben wir die notwendigen Matrix-Methoden noch nicht und führen dies deshalb hier nicht durch.

3 Erhaltungssätze in der Newtonschen Mechanik

3.1 Impulserhaltung

Wir behandeln ab sofort neben einzelnen Massepunkten mit Trajektorie $\bar{x}(t)$ auch Systeme von Massenpunkten $a, b, \dots \in \{1, \dots, n\}$ mit Trajektorien $\bar{x}_a(t)$, ($a = 1, \dots, n$). Die **Impulserhaltung** besagt nun, dass bei verschwindenden externen Kräften ($\bar{F}_{ext} = 0$) gilt:

$$\bar{p} \equiv \sum_a \bar{p}_a = \sum_a m_a \dot{\bar{x}}_a = const. \quad (3.1)$$

Dies ergibt sich wie folgt:

$$\dot{\bar{p}} = \sum_a m_a \ddot{\bar{x}}_a = \sum_a \bar{F}_a = \sum_a \left(\sum_{b, b \neq a} \bar{F}_{ab} \right) = \dots \quad (3.2)$$

Letzteres ist äquivalent zur Summe über alle (geordneten) Paare a, b mit $a \neq b$, also

$$\dots = \sum_{a \neq b} \bar{F}_{ab} = \sum_{a > b} \bar{F}_{ab} + \sum_{a < b} \bar{F}_{ab} = \sum_{a > b} (\bar{F}_{ab} + \bar{F}_{ba}) = 0, \quad (3.3)$$

wobei wir zuletzt das 3. Newtonsches Axiom benutzt haben.

Fall es äußere Kräfte gibt, dann werden sich diese in der obigen Herleitung nicht kürzen und es gilt:

$$\dot{\bar{p}} = \sum_a \bar{F}_{a,ext} = \bar{F}_{ext} \quad (3.4)$$

Falls die äußeren Kräfte zum Beispiel nicht in x^1 -Richtung wirken ($F_{ext}^1 = 0$), gilt immer noch

$$p^1 = const., \quad (3.5)$$

es gibt also eigentlich drei unabhängige Erhaltungssätze (für p^1, p^2, p^3) von denen manchmal nur ein Teil zum Tragen kommt. Solch eine ‘teilweise’ Impulserhaltung kann oft auch mit Gewinn auf einen einzelnen Massenpunkt angewandt werden (z.B. ist der Horizontal-Impuls beim schrägen Wurf ohne Luftwiderstand erhalten). Der ursprüngliche Impulssatz hingegen reduziert sich im Fall eines einzelnen Massenpunktes einfach auf das 1. Newtonsche Axiom.

3.2 Drehimpulserhaltung

In vielen Fällen wirken Kräfte zwischen je zwei Massenpunkten parallel zur Verbindungslinie, z.B. bei der Gravitationskraft, der elektrostatische Kraft, oder im ‘Modell der **masselose Stangen**’ (Abb. 21).

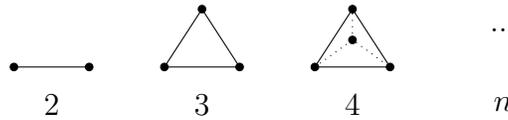


Abbildung 21: Starre, masselose Stangen verbinden je n Massenpunkte und fixieren so den Abstand zwischen diesen. Für $n \rightarrow \infty$ ist dies auch ein einfaches Modell für starre Körper.

Der Drehimpuls eines Massenpunktes ist definiert als

$$\bar{L}_a \equiv \bar{x}_a \times \bar{p}_a \quad \text{oder, äquivalenterweise, durch} \quad L_a^i = \varepsilon^{ijk} x_a^j p_a^k. \quad (3.6)$$

Falls nun $F_{ext} = 0$ und alle internen Kräfte parallel zur Verbindungslinie der jeweiligen zwei Massenpunkte wirken, so gilt **Drehimpulserhaltung**:

$$\bar{L} \equiv \sum_a \bar{L}_a = \sum_a m_a \bar{x}_a \times \dot{\bar{x}}_a = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{p}_a = const. \quad (3.7)$$

Dies lässt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{L}} &= \sum_a m_a (\dot{\bar{x}}_a \times \dot{\bar{x}}_a + \bar{x}_a \times \ddot{\bar{x}}_a) = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_a = \sum_{a \neq b} \bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} \\ &= \sum_{a > b} (\bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} + \bar{x}_b \times \bar{F}_{ba}) = \sum_{a > b} (\bar{x}_a - \bar{x}_b) \times \bar{F}_{ab} \\ &= 0, \quad \text{da} \quad \bar{F}_{ab} \parallel (\bar{x}_a - \bar{x}_b). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Falls nun doch äußere Kräfte wirken, so gilt

$$\dot{\bar{L}} = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_{a,\text{ext}} \equiv \bar{M}_{\text{ext}}. \quad (3.9)$$

Hierbei nennt man \bar{M}_{ext} das von den äußeren Kräften verursachte Drehmoment. Ganz allgemein ist das von einer einzelnen Kraft auf einen einzelnen Massenpunkt ausgeübte **Drehmoment** definiert als

$$\bar{M} = \bar{x} \times \bar{F}. \quad (3.10)$$

Drehimpulserhaltung bleibt also insbesondere dann bestehen, wenn alle äußeren Kräfte **Zentralkräfte** sind (also $\bar{F}_a \parallel \bar{x}_a$). Wie wir speziell am letzten Kommentar besonders deutlich sehen, hängt der Drehimpuls entscheidend vom gewählten Koordinatenursprung ab.

Wichtig ist außerdem, dass $\bar{L} = \bar{x} \times \bar{p}$ (sowie jedes andere Kreuzprodukt von Vektoren) ist ein **Axialvektor** oder **Pseudovektor** ist. Damit meint man, dass er sich bei Drehungen wie ein Vektor verhält (siehe später). Bei Reflexionen am Ursprung ändert er sein Vorzeichen im Gegensatz zu einem Vektor jedoch nicht:

$$\bar{a} \rightarrow -\bar{a}, \quad \bar{b} \rightarrow -\bar{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \times \bar{b} \rightarrow +\bar{a} \times \bar{b}. \quad (3.11)$$

3.3 Konservative Kräfte und Energieerhaltung

Definition: Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\bar{F}(\bar{x})$ heißt **konservativ**, falls es eine Funktion $V(\bar{x})$ (das ‘Potential’) gibt, sodass

$$\bar{F} = -\bar{\nabla}V. \quad (3.12)$$

Hierbei steht $\bar{\nabla}V$ für den Vektor

$$\bar{\nabla}V \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right), \quad (3.13)$$

welcher als **Gradient** von V bezeichnet wird.

Die Schreibweise $\bar{\nabla}V$ ist vor allem deshalb sinnvoll, weil wir $\bar{\nabla}$ als **vektorwertigen Differentialoperator** auffassen können. Einfachere Differentialoperatoren sind z.B. $\frac{\partial}{\partial x}$ oder auch $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Diese ordnen einer beliebigen Funktion deren erste Ableitung beziehungsweise zweite (partielle) Ableitung nach x zu:⁵

$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x, y) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{etc.} \quad (3.14)$$

$\bar{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$ fasst drei derartige Operatoren in einem Vektor zusammen. Ihre Anwendung auf eine Funktion (zum Beispiel $V(x^1, x^2, x^3)$) liefert somit den oben als $\bar{\nabla}V$ bezeichneten Vektor.

⁵ Genauer ist der Differentialoperator eine lineare Abbildung $C^\infty \rightarrow C^\infty$ auf dem Vektorraum der glatten (beliebig oft differenzierbaren) Funktionen.

Energieerhaltung: Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt:

$$E \equiv \underbrace{T}_{\text{kin. E.}} + \underbrace{V}_{\text{pot. E.}} \equiv \frac{m}{2} \dot{\bar{x}}(t)^2 + V(\bar{x}(t)) = \text{const.} \quad (3.15)$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^i) = \frac{m}{2} \cdot 2 \dot{x}^i \ddot{x}^i = m \cdot \dot{\bar{x}} \cdot \ddot{\bar{x}} \\ \frac{dV}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(x^1 + \Delta x^1, \dots, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, \dots, x^3)}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \Delta \bar{x} = \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot \Delta t. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Den Zähler können wir nun wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} &V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ &+ V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ &+ V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3) \\ &\simeq \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \cdot \Delta x^1 + \frac{\partial V}{\partial x^2}(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \cdot \Delta x^2 + \frac{\partial V}{\partial x^3}(\bar{x}) \cdot \Delta x^3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nach Teilen durch Δt und Grenzwertbildung finden wir

$$\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(\bar{x}(t)) \cdot \frac{dx^i}{dt} \quad (3.18)$$

Dies ist eine entscheidende allgemeingültige Rechenregel, die man auch als

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x^i} \cdot dx^i \quad (3.19)$$

schreiben kann.

Wir wollen dies kurz allgemein formulieren: Sei

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \bar{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (3.20)$$

Dann ergibt sich durch Verknüpfung die Funktion $f \circ \bar{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und für deren sogenanntes **totales** Differential gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot dx^i = (\bar{\nabla} f) \cdot d\bar{x}. \quad (3.21)$$

Wie früher steht df für den linearen Anteil der Änderung von f . Eine ‘nicht-infinitesimale’ Formulierung ergibt sich sofort durch Teilen der obigen Gleichung durch dt . Links steht dann die **totale** Ableitung df/dt nach t .

In unserem konkreten Anwendungsfall haben wir also:

$$\dot{E} = m \cdot \dot{\bar{x}} \cdot \ddot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i} \cdot \dot{x}^i = \bar{F} \cdot \dot{\bar{x}} + (\bar{\nabla} V) \dot{\bar{x}} = 0 \quad (3.22)$$

Schließlich wollen wir noch ein **Kriterium für die Konservativität** eines Kraftfeldes angeben: Für einfach zusammenhängende⁶ Gebiete gilt:

$$\overline{F} \text{ ist konservativ} \iff \overline{\nabla} \times \overline{F} = 0.$$

Das neue Vektorfeld $\overline{\nabla} \times \overline{F}$, welches mittels des Differentialoperators $\overline{\nabla}$ und des Vektorproduktes ‘ \times ’ aus dem gegebenen Vektorfeld \overline{F} gebildet wurde, heißt auch Rotation und wird gelegentlich als **rot** \overline{F} bezeichnet. Die obige Aussage ist also, dass ein Kraftfeld konservativ ist, wenn dessen Rotation verschwindet.

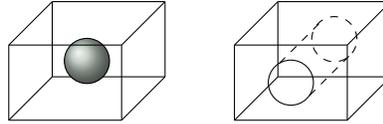


Abbildung 22: Beispiele für ein einfach zusammenhängendes (links) und ein nicht einfach zusammenhängendes (rechts) Gebiet.

Begründung (\Rightarrow):

$$\overline{F} = -\overline{\nabla}V \quad \Rightarrow \quad F^i = -\partial^i V \equiv -\frac{\partial}{\partial x^i} V. \quad (3.23)$$

Wir benutzen nun die Antisymmetrie von ε , die Vertauschbarkeit der Reihenfolge partieller Ableitungen (dieser wichtige Fakt bleibt im Moment unbewiesen) und die Umbenennbarkeit von Summationsindizes:

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla} \times \overline{F})^i &= \varepsilon^{ijk} \partial^j F^k = -\varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V = -\frac{1}{2}(\varepsilon^{ijk} - \varepsilon^{ikj}) \partial^j \partial^k V \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V + \frac{1}{2} \varepsilon^{ikj} \partial^k \partial^j V = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Begründung (\Leftarrow): Wähle beliebiges, festes \overline{x}_0 im relevanten Gebiet und definiere das Potential als minus die Arbeit am Massenpunkt, falls dieser sich auf einer Kurve wie in Abb. 23 bewegt:

$$V(\overline{x}) \equiv - \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}} \overline{F}(s) d\overline{s} \quad (3.25)$$

mit

$$d\overline{s} \equiv d\overline{x}(s) = \left(\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds} \right) \cdot ds. \quad (3.26)$$

Also gilt

$$\overline{F} \cdot d\overline{s} = F^i \left(\frac{dx^i}{ds} \right) \cdot ds \quad (3.27)$$

und wir haben es mit einem ganz gewöhnlichen Riemannschen Integral einer Funktion von s zu tun.

⁶ Das heißt jede geschlossene Kurve kann glatt auf Länge Null “zusammengezogen” werden, vgl. Abb. 22.

Wichtiger Kommentar: Das obige ist ein Beispiel für ein sogenanntes **Linienintegral**: Wann immer eine Kurve durch ein Gebiet verläuft, in dem ein Vektorfeld definiert ist, kann man dieses Vektorfeld (wie hier das Kraftfeld) entlang der Kurve integrieren. Dazu braucht man die (immer mögliche!) Parametrisierung der Kurve durch die Weglänge s und das Skalarprodukt.

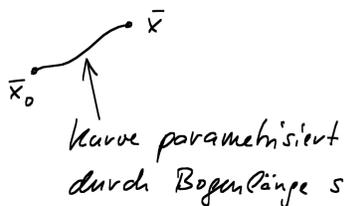


Abbildung 23: Zur Definition des Potentials.

Wir wählen nun einen beliebigen, infinitesimal kleinen Vektor \bar{l} und berechnen

$$\begin{aligned} \bar{l} \cdot \bar{F}(\bar{x}) &\simeq - \left(- \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{l}} d\bar{s} \cdot \bar{F} \right) & (3.28) \\ &= - \left(\left(- \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}+\bar{l}} d\bar{s} \cdot \bar{F} \right) + \left(\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} d\bar{s} \cdot \bar{F} \right) \right) \\ &= - (V(\bar{x} + \bar{l}) - V(\bar{x})) \simeq - \frac{\partial V}{\partial x^i} l^i = -\bar{l} \cdot (\nabla V). \end{aligned}$$

Also gilt $\bar{l}(\bar{F} + \nabla V) = 0$ und, da \bar{l} beliebig war, auch $\bar{F} + \nabla V = 0$. ✓

Unsere Herleitung hat jedoch eine entscheidende Lücke – die Eindeutigkeit unserer Definition von V . Um diese zu zeigen wählen wir mit L_1 und L_2 zwei unterschiedliche Wege von \bar{x}_0 nach \bar{x} und betrachten

$$\int_{L_2} d\bar{s} \cdot \bar{F} - \int_{L_1} d\bar{s} \cdot \bar{F} = \oint d\bar{s} \cdot \bar{F} = \int_{\Sigma} d\bar{f} \cdot (\nabla \times \bar{F}) = 0. \quad (3.29)$$

Hierbei beschreibt der vorletzte Ausdruck das Integral über eine von den beiden Wegen umschlossene Fläche (vgl. Abb. 24), mit infinitesimalem Flächenelement $d\bar{f}$). Das vorletzte Gleichheitszeichen ist die Aussage des **Satzes von Stokes**, den wir jetzt eingehend besprechen.



Abbildung 24: Von zwei unterschiedlichen Wegen eingeschlossene Fläche.

3.4 Satz von Stokes (M)

Wir interessieren uns für Linienintegrale über Ränder von Flächen. Betrachten wir zunächst eine kleine, rechteckige Fläche in der x^1 - x^2 -Ebene, siehe Abb. 25. Wir finden:

$$\oint d\bar{s} \cdot \bar{F} = \int_0^{\Delta x^1} ds \cdot F^1(s, 0) + \int_0^{\Delta x^2} ds \cdot F^2(\Delta x^1, s) - \int_0^{\Delta x^1} ds \cdot F^1(s, \Delta x^2) - \int_0^{\Delta x^2} ds \cdot F^2(0, s). \quad (3.30)$$

Die negativen Vorzeichen entstehen, weil z.B. für die dritte Kante $d\bar{s} = ds \cdot (-1, 0)$ gilt. Des Weiteren folgt

$$\begin{aligned} \oint d\bar{s} \cdot \bar{F} &= \int_0^{\Delta x^1} ds \cdot (F^1(s, 0) - F^1(s, \Delta x^2)) + \int_0^{\Delta x^2} ds \cdot (F^2(\Delta x^1, s) - F^2(0, s)) \\ &= \int_0^{\Delta x^1} ds \cdot \left(-\frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) \cdot \Delta x^2 + \int_0^{\Delta x^2} ds \cdot \frac{\partial F^2}{\partial x^1} \cdot \Delta x^1 + O(\Delta^3), \end{aligned} \quad (3.31)$$

wobei Δ für die kleinen Größen Δx^1 oder Δx^2 steht. Man hat also

$$\oint d\bar{s} \cdot \bar{F} \simeq \Delta x^1 \cdot \Delta x^2 \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right). \quad (3.32)$$

Jetzt benutzen wir

$$(\bar{\nabla} \times \bar{F})^3 = \varepsilon^{3ij} \partial^i F^j = \partial^1 F^2 - \partial^2 F^1 \quad (3.33)$$

und finden demnach

$$\oint d\bar{s} \cdot \bar{F} \simeq (\Delta x^1 \Delta x^2 \cdot \hat{e}_3) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}) = \Delta \bar{f} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}). \quad (3.34)$$

Hier ist \hat{e}_3 der Einheitsvektor in x^3 -Richtung und $\Delta \bar{f}$ ist ein kleiner Vektor senkrecht zum Flächenelement.

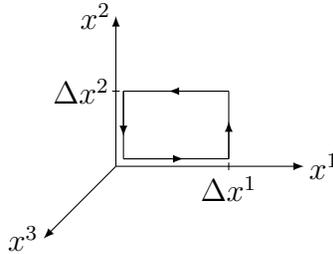


Abbildung 25: Rechteck in der x^1 - x^2 -Ebene

Ganz allgemein ordnen wir ab sofort jeder kleinen ($\Delta \bar{f}$) oder infinitesimalen ($d\bar{f}$) Fläche einen Vektor zu, dessen Länge der Größe der Fläche entspricht. Die Richtung definiert die **Orientierung** der Fläche ('oben sei da, wo der Pfeil hinzeigt'). Die Randkurve wird dann so definiert, dass man im mathematisch positiven Drehsinn herum läuft (linksherum), wenn man 'von oben' schaut. Das passt gerade zu den Pfeilen im Bild. Also gilt

$$\oint \bar{F} d\bar{s} = \int (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \cdot \Delta \bar{f} + O(\Delta^3) \equiv \int (\bar{\nabla} \times \bar{F}) \cdot d\bar{f} + O(\Delta^3) \quad (3.35)$$

für kleine Rechtecke.

Die spezielle Lage beim Ursprung und in der x^1 - x^2 -Ebene war für die Herleitung nicht wesentlich sondern diente nur der Vereinfachung der Rechnung. In der Tat können wir, gegeben eine beliebige Rechteckfläche, unser Koordinatensystem immer passend wählen. Des Weiteren können wir eine größere Fläche durch viele kleine Rechteckflächen annähern (vgl. Abb. 26):

$$\sum_{\text{Rechtecke}} \oint d\bar{s} \cdot \bar{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int d\bar{f} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}) + \underbrace{N \cdot O(\Delta^3)}_{\sim O(\Delta)}, \quad (3.36)$$

weil $N \sim \frac{1}{\Delta^2}$ bei fester Fläche. Also folgt für $\Delta \rightarrow 0$:

$$\oint_{\text{eckiger Rand}} d\bar{s} \cdot \bar{F} = \int d\bar{f} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}), \quad (3.37)$$

wobei wir benutzt haben, dass sich die ‘inneren Ränder’ paarweise wegheben.

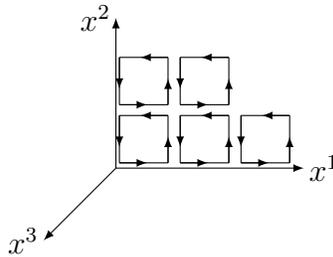


Abbildung 26: Annäherung einer Fläche durch viele kleine Rechtecke.

Schließlich glätten wir noch den Rand, wie in Abb. 27 skizziert. Offensichtlich gilt

$$\Delta\bar{s} = \Delta\bar{s}_1 + \Delta\bar{s}_2 \quad (3.38)$$

und demnach

$$\bar{F} \cdot \Delta\bar{s} = \bar{F} \cdot \Delta\bar{s}_1 + \bar{F} \cdot \Delta\bar{s}_2 \simeq \bar{F}_1 \cdot \Delta\bar{s}_1 + \bar{F}_2 \cdot \Delta\bar{s}_2, \quad (3.39)$$

weil wir $\bar{F}_1 \simeq \bar{F}_2 \simeq \bar{F}$ setzen können, wenn $\Delta \rightarrow 0$. Der Fehler ist $\sim \Delta \cdot |\Delta\bar{s}| \sim O(\Delta^2)$ und wird selbst nach Summation über alle Randelemente klein bleiben.

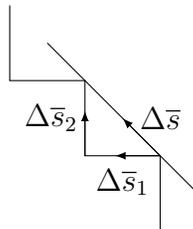


Abbildung 27: Glättung des Randes der umschlossenen Fläche.

Jetzt müssen wir uns nur noch klarmachen, dass wir auch eine gekrümmte Fläche durch kleine Rechtecke annähern können. Dies ist nicht ganz einfach, weil bei diesem Versuch

immer Lücken bleiben. Man arbeitet eigentlich besser mit Paralleogrammen oder sogar mit Dreiecken (Simplexe), was aber die involvierte Vektor-Algebra (den Schritt, in dem wir die dritte Komponente der Rotation identifiziert haben) etwas umständlicher. Wir begnügen uns daher hier mit der anschaulich relativ überzeugenden Feststellung, dass obiges auch für gekrümmte Flächen funktioniert. Damit haben wir den **Satz von Stokes**:

Für beliebige glatte Vektorfelder \bar{F} und Flächen Σ gilt:

$$\oint_{\partial\Sigma} d\bar{s} \cdot \bar{F} = \int_{\Sigma} d\bar{f} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F}), \quad (3.40)$$

wobei $\partial\Sigma$ der Rand von Σ ist, vgl. Abb. 28.

Damit haben wir den Beweis für (\bar{F} konservativ $\Leftrightarrow \bar{\nabla} \times \bar{F} = 0$) vervollständigt, wenn wir noch den (intuitiv sehr naheliegenden) Fakt akzeptieren, dass in einfach zusammenhängenden Gebieten jede geschlossene Kurve der Rand einer Fläche ist.

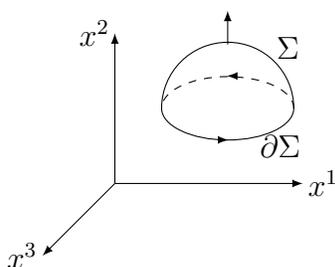


Abbildung 28: Zum Satz von Stokes.

3.5 Energieerhaltung für ein System von Massenpunkten

Die Massenpunkte seien durch \bar{x}_a , $a = 1, \dots, n$ beschrieben und die Kräfte zwischen ihnen sollen jeweils parallel zum Vektor $\bar{x}_a - \bar{x}_b$ wirken. (Lassen Sie uns solche Kräfte als Zentralkräfte bezeichnen, obwohl es genaugenommen natürlich nur dann eine Zentralkräfte für \bar{x}_1 ist, wenn z.B. Teilchen 2 im Ursprung festgehalten wird, $\bar{x}_2 \equiv \bar{0}$.)

Man kann solche Kräfte stets als

$$\bar{F}_{ab} = -\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) \quad \text{mit} \quad V_{ab} = V_{ba} \quad \text{und} \quad \bar{\nabla}_a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_a^1}, \frac{\partial}{\partial x_a^2}, \frac{\partial}{\partial x_a^3} \right) \quad (3.41)$$

schreiben.⁷

Dazu einige Kommentare: Die Zentralkraftbedingung ersetzt unsere obige Forderung der Konservativität (genaugenommen ist sie etwas stärker). Wie in den Übungen diskutiert gilt

$$-\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) = - \underbrace{\bar{\nabla}_a |\bar{x}_a - \bar{x}_b|}_{=\bar{\nabla}_a \sqrt{(\bar{x}_a - \bar{x}_b)^2} = \frac{\bar{x}_a - \bar{x}_b}{|\bar{x}_a - \bar{x}_b|}} \cdot V'_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|). \quad (3.42)$$

⁷Hier wird trotz des mehrfachen Auftretens der Indizes nicht über a, b summiert.

Dies bestätigt, dass wir in der Tat für eine beliebige Zentralkraft das passende V als wählen können: Wir berechnen einfach aus \bar{F} das entsprechende V' und dann V als dessen Stammfunktion. Schließlich prüfen wir noch, dass das unsere Annahme über \bar{F}_{ab} mit dem dritten Axiom konsistent ist:

$$-\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) = +\bar{\nabla}_b V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) = +\bar{\nabla}_b V_{ba}(|\bar{x}_b - \bar{x}_a|). \quad (3.43)$$

Es folgt also $\bar{F}_{ab} = -\bar{F}_{ba}$, wie es sein soll.

Wir behaupten, dass unter unseren obigen Annahmen **Energieerhaltung** gilt:

$$E \equiv \sum_a T_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a < b} V_{ab} = \text{const.} \quad (3.44)$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \sum_a \dot{\bar{x}}_a \bar{F}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} ((\bar{\nabla}_a V_{ab}) \dot{\bar{x}}_a + (\bar{\nabla}_b V_{ab}) \dot{\bar{x}}_b) \\ &= \sum_{a \neq b} \dot{\bar{x}}_a \cdot \bar{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \left(-\bar{F}_{ab} \cdot \dot{\bar{x}}_a - \underbrace{\bar{F}_{ba} \cdot \dot{\bar{x}}_b}_{\substack{\text{Umbenennung} \\ a \leftrightarrow b \\ \text{in dieser Summe}}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Schließlich bemerken wir noch, dass wir mit der Wahl eines $V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|)$ gemäß Abb. 29 näherungsweise das Modell der masselosen Stangen realisieren können. Das entsprechende Modell des starren Körpers fällt somit in die oben diskutierte Klasse von Systemen und wir haben Energieerhaltung für (unser Modell des) starren Körpers gezeigt.

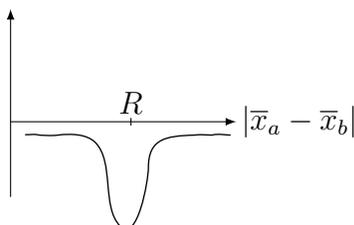


Abbildung 29: Potential für das Modell der masselosen Stangen.

3.6 Eindimensionale Bewegung

Mittels Energiesatz läßt sich die 1-dimensionale Bewegung allgemein lösen: Da jedes 1-dimensionale zeitunabhängige Kraftfeld konservativ ist, haben wir ganz allgemein:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{const.} \quad (3.46)$$

Also hat man (bis auf Vorzeichenwahl)

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \Rightarrow t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}. \quad (3.47)$$

Nun kann man das Integral lösen und die Integrationskonstante sowie E so wählen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt werden. Schließlich löst man das so gefundene $t = t(x)$ nach x auf, so dass man $x = x(t)$ erhält. Dies ist mag zwar im Einzelfall immer noch schwierig sein, es ist aber auf jeden Fall viel einfacher als das Lösen einer allgemeinen Dgl. 2. Ordnung.

4 Der Harmonische Oszillator in komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen lassen sich sehr physikalisch aus dem Wunsch motivieren, den harmonischen Oszillator mit Reibung zu verstehen. Die relevante Dgl. ist

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c \cdot \dot{x}. \quad (4.1)$$

Wir versuchen es mit einem exponentiellen Ansatz

$$x \sim e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0. \quad (4.2)$$

Die letzte Gleichung ist nach α aufzulösen. Betrachten wir dazu zwei Grenzfälle: Sei zunächst ω vernachlässigbar klein. Dann haben wir

$$\alpha^2 + c\alpha = 0 \Rightarrow [\alpha = -c \text{ oder } \alpha = 0] \Rightarrow x \sim A + Be^{-ct}. \quad (4.3)$$

Dies ist einleuchtend: Die Reibung dominiert über die Rückstellkraft und die Punktmasse nähert sich asymptotisch, ohne zu oszillieren, einem gewissen Grenzwert. (Diskutieren Sie selbständig den Übergang zu dem Fall, dass ω zwar klein aber nicht vernachlässigbar ist.)

Sei nun im Gegenteil ω groß bzw., was das gleiche ist, c klein. Dann ist

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad (4.4)$$

zu lösen, was aber nicht möglich ist. Wir wissen natürlich schon, dass in diesem Fall $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ Lösungen sind.

Wenn wir nun jede quadratische Gleichung lösen könnten (insbesondere auch die Gleichung $\alpha^2 = -1$, die für $\omega = 1$ und $c = 0$ entsteht), hätten wir vielleicht eine sehr elegante, einheitliche Beschreibung der beiden obigen Grenzfälle sowie aller Fälle dazwischen. ‘Im Komplexen’ ist dies in der Tat möglich.

4.1 Komplexe Zahlen (M)

Unser Ziel ist es, die reellen Zahlen so zu erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar wird.

Naiver Zugang: Definiere eine neue Zahl ‘ i ’ (die ‘imaginäre Einheit’), so dass

$$i^2 = -1. \quad (4.5)$$

Außerdem wollen wir immer noch die reellen Zahlen benutzen sowie Zahlen addieren und multiplizieren können. Also erklären wir die allgemeine komplexe Zahl z als

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \equiv x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &\equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Damit haben wir Summe und Produkt zweier Zahlen der Form $x + iy$ so erklärt, dass sie wieder in dieser Form schreibbar sind.

Jetzt geben wir dem Ganzen eine etwas präzisere mathematische Formulierung. Dazu definieren wir zunächst: Ein **Körper** (englisch ‘**Field**’) ist eine Menge K mit zwei binären Operationen ‘ $+$ ’ und ‘ \cdot ’, so dass gilt: $(\alpha, \beta, \gamma, \dots \in K)$

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ Assoziativität
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ Kommutativität
- $\exists 0 \in K$ so dass $\alpha + 0 = \alpha, \forall \alpha$ Null
- $\forall \alpha \exists (-\alpha) \in K$ so dass $\alpha + (-\alpha) = 0$ Additions-Inverses
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ Assoziativität
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ Kommutativität
- $\exists 1 \in K$ so dass $1 \cdot \alpha = \alpha \forall \alpha$ Eins
- $\forall \alpha \neq 0 \exists \alpha^{-1} \in K$ so dass $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ Multiplikations-Inverses
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ Distributivität.

Wir kennen bereits die Körper $K = \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die **komplexen Zahlen** sind die Menge $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &\equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &\equiv (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das ist äquivalent zu unserer naiven Definition:

$$(x, y) \equiv x + iy. \quad (4.9)$$

Es ist eine gute Aufgabe, sich klarzumachen, dass dies stimmt, dass $(0, 1) = i$ und dass die Körper-Axiome erfüllt sind. Der schwierigste Teil ist dabei die Existenz des Multiplikations-Inversen. Dazu geben wir die Hilfestellung bzw. den Vorschlag

$$z^{-1} = (x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.10)$$

Die Tatsache, dass $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ legt eine Darstellung durch Vektoren in der Ebene nahe, vgl. Abb. 30. Hierbei entspricht die Addition der Vektoraddition. Bei der Multiplikation komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge der entsprechenden Vektoren während sich die Winkel φ addieren (das sehen wir später).

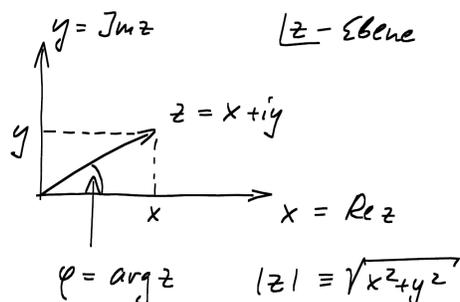


Abbildung 30: Komplexe Ebene.

Die üblichen Funktionen (\exp , \ln , \sin , \cos , \dots) können z.B. durch ihre in \mathbb{R} bekannte Taylorreihe auf \mathbb{C} erweitert werden. Besonders wichtig ist dabei

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.11)$$

Wir wollen mit dieser Definition die entscheidende Eigenschaft der e -Funktion,

$$e^{z+w} = e^z e^w, \quad (4.12)$$

nachrechnen. Zunächst gilt

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right], \quad (4.13)$$

wobei die im letzten Schritt benutzte Darstellung von $(z+w)^n$ mittels **Binomialkoeffizienten** (Deutsch auch: ‘ n über k ’; Englisch: ‘ n choose k ’),

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (4.14)$$

aus elementarer Kombinatorik folgt. Schließlich wird die Doppelsumme wie in Abb. 31 angedeutet umgeschrieben:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} = e^z e^w. \quad (4.15)$$

Damit haben wir insbesondere

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}, \quad (4.16)$$

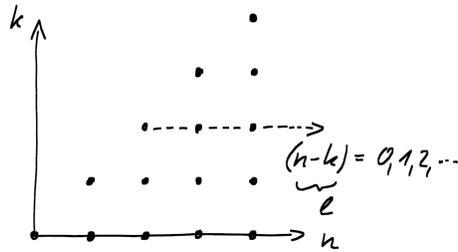


Abbildung 31: Zur Umschreibung der (n, k) -Doppelsumme in $(k, l = n - k)$.

wobei der erste Faktor eine reelle Zahl und der zweite Faktor eine komplexe Zahl vom Betrag 1 ist. Letzteres sehen wir sofort aus

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y,
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

vgl. auch Abb. 32. Mit $y \rightarrow \varphi$ hat man eine natürlichere Schreibweise für dieses sehr wichtige Ergebnis, die **Eulersche Formel**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \tag{4.18}$$

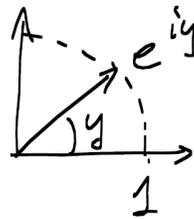


Abbildung 32: Zur Eulerschen Formel.

Zusammenfassend haben wir also gelernt, dass

$$w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w} \tag{4.19}$$

$$\ln w = z = x + iy = \ln |w| + i \arg w. \tag{4.20}$$

Etwas problematisch ist die Tatsache, dass das Argument (d.h. der Winkel) einer komplexen Zahl bzw. eines 2d-Vektors, $\arg w$, nicht eindeutig definiert ist: Das Argument eines Vektors auf der negativen reellen Achse könnte man genauso gut als π wie als $-\pi$ definieren. Die Abbildung $\ln : w \rightarrow \ln w = z$ springt an dieser Stelle. Obwohl es dazu eigentlich mehr zu sagen gäbe, begnügen wir uns im Moment mit einer etwas naiven Lösung: Wir definieren für jedes $w \in \mathbb{C}$ (**ohne** die negative reelle Achse)

$$\arg w \in (-\pi, \pi). \tag{4.21}$$

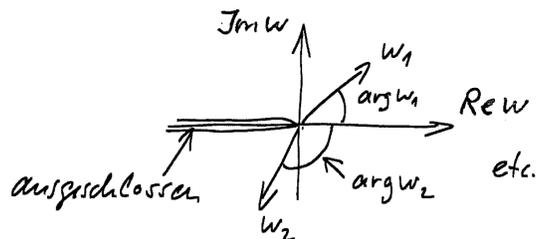


Abbildung 33: Zur Definition von ‘arg’ bzw. ‘ln’ einer komplexen Zahl.

Dies ist offensichtlich eindeutig und stetig und wir haben demnach, wieder unter Ausschluss der negativen reellen Achse, eine eindeutige und stetige Abbildung $w \rightarrow \ln w$, vgl. Abb. 33.

Es ist eine wichtige Tatsache, dass in \mathbb{C} jedes Polynom

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (n > 0) \quad (4.22)$$

eine Nullstelle z_0 hat. Man sagt auch, der ‘Körper \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen’. Aus diesem **Fundamentalsatz der Algebra** folgt nun leicht, dass P_n sogar n Nullstellen hat. Dazu schreibt man einfach

$$P_n(z) = (z - z_0) \cdot P_{n-1}(z) \quad (4.23)$$

und beruft sich für P_{n-1} wieder auf den Fundamentalsatz. Natürlich brauchen diese Nullstellen nicht verschieden zu sein, wie z.B. im Fall der n -fachen Nullstelle des Polynoms z^n bei $z = 0$.

Des Weiteren gibt es auf \mathbb{C} eine wichtige Abbildung, die **komplexe Konjugation**:

$$z \rightarrow z^* \quad (\text{oder auch } z \rightarrow \bar{z}). \quad (4.24)$$

Sie ist durch

$$(x + iy)^* = x - iy \quad \text{oder, äquivalenterweise, durch} \quad (\rho e^{i\varphi})^* = \rho e^{-i\varphi} \quad (4.25)$$

definiert. Anschaulich entspricht dies der Spiegelung an der reellen Achse. Es gilt $(z^*)^* = z$.

Als Schlusskommentar soll noch erwähnt werden, dass man die Konstruktion von allgemeineren Zahlen auch weitertreiben kann. So kommt man z.B. gemäß

$$1, i \rightarrow 1, i, j, k \quad (4.26)$$

zu ‘Quaternionen’, wobei die entscheidenden Annahmen als

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{und} \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad \text{etc.} \quad (4.27)$$

zusammengefasst werden können. Man gibt hierbei die Kommutativität auf und hat demnach nur noch eine ‘Schiefkörper’. Es gibt noch die ‘Oktonionen’, bei denen auch die Assoziativität opfert. Allerdings ist die Anwendungsrelevanz von \mathbb{C} im Vergleich zu diesen Konstruktionen überragend.

4.2 Anwendung auf den Oszillator

Zunächst ist relativ offensichtlich, dass wir mit komplexen Zahlen genauso ‘rechnen’, insbesondere auch Grenzwerte bilden und differenzieren können, wie mit reellen Zahlen. Wir werden dies im Folgenden ohne Weiteres nutzen.

Erinnern wir uns nun an unser eigentliches physikalisches Problem:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (4.28)$$

wobei

$$\text{Ansatz: } x \sim e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + c \cdot \alpha + \omega^2 = 0. \quad (4.29)$$

Falls $c/2 > \omega$ ist (der Fall starker Dämpfung oder auch **Kriechfall**), gewinnen wir aus

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2} \quad (4.30)$$

zwei Werte für α und damit zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl. Beide Lösungen und damit auch jede Lösung eines konkreten Anfangswertproblems zeigen ein exponentielles Abfallverhalten – das System nähert sich ohne Schwingungen der Ruhelage. Dazu brauchen wir natürlich keine komplexen Zahlen.

Für $c/2 < \omega$ (den **Schwingfall**) müssen wir die Wurzel einer negativen Zahl ziehen,

$$\sqrt{-x} = \pm i\sqrt{x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (4.31)$$

so dass

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i \cdot \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \equiv -\frac{c}{2} \pm i \cdot \tilde{\omega}. \quad (4.32)$$

Somit sind die Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= e^{-\frac{c}{2}t} \cdot e^{\pm i\tilde{\omega}t} \\ \Rightarrow x_{1,2} &= e^{-\frac{c}{2}t} \cdot (\cos(\pm\tilde{\omega}t) + i \cdot \sin(\pm\tilde{\omega}t)) \\ &= e^{-\frac{c}{2}t} \cdot (\cos(\tilde{\omega}t) \pm i \cdot \sin(\tilde{\omega}t)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Physikalisch interessieren wir uns natürlich für reelle Lösungen, und solche lassen sich durch Linearkombination der beiden obigen komplexen Lösungen leicht gewinnen. Wir behalten zur Vereinfachung die obigen Namen bei und schreiben

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\frac{c}{2}t} \cdot \cos(\tilde{\omega}t) \\ x_2 &= e^{-\frac{c}{2}t} \cdot \sin(\tilde{\omega}t). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Der Name Schwingfall wird nun offensichtlich: Wir werden es nach Lösung eines Anfangswertproblems durch Linearkombination von $x_{1,2}$ mit einer gedämpften Schwingung (mit exponentiell abfallender Amplitude) zu tun haben.

Für $c/2 = \omega$ (den **aperiodischen Grenzfall**) ist $\alpha_1 = \alpha_2$, so dass wir mit unserem exponentiellen Ansatz nur eine Lösung finden. Die zweite Lösung ergibt sich sofort, wenn

man, wie schon der Name nahelegt, den Grenzübergang $\tilde{\omega} \rightarrow 0$ ausgehend vom Schwingfall betrachtet. Aus (4.34) folgen unter Benutzung der Taylorreihen $\cos(x) = 1 + \mathcal{O}(x^2)$ und $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\frac{c}{2}t} \\ x_2 &= e^{-\frac{c}{2}t} \cdot \omega t. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Das x_1 eine Lösung ist wissen wir schon, für x_2 rechnet man dies schnell nach. Damit ist das Problem vollständig gelöst.

Interessant ist vielleicht noch folgende Bemerkung: Wenn ω fest gewählt ist, und man kann c technisch beeinflussen, so ist jeder der drei Fälle realisierbar. Will man nun eine möglichst schnelle, schwingungsfreie Annäherung an die Ruhelage, so wählt man den aperiodischen Grenzfall. Dieser hat daher wichtige technische Anwendungen, z.B. bei Stoßdämpfern für Autos (historisch auch bei Zeiger-Messinstrumenten).

Schließlich betrachten wir noch den praktisch sehr wichtigen Fall einer periodischen treibenden Kraft (man denke an eine im Gleichschritt über eine Brücke marschierende Kompanie oder, etwas weniger dramatisch, an verschiedenste Schaltungen und technische Geräte mit Wechselstrom oder mit einem leicht vibrierenden Motor). Wir haben nun die inhomogene Dgl.

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t) \quad \text{mit} \quad F(t) = f e^{i\omega t} \quad (4.36)$$

zu lösen (wir folgen hier [3], wo auch mehr Details zu finden sind). Es ist bequem, die Kraft komplex anzunehmen, obwohl wir uns natürlich nur für deren Real-(oder Imaginär-)Teil und entsprechend nur für die reelle oder imaginäre Lösung interessieren werden.

Mit dem naheliegenden Ansatz

$$x(t) = A e^{i\omega t} \quad (4.37)$$

finden wir

$$\left[A(-\omega^2 + ic\omega + \omega^2) - \frac{f}{m} \right] e^{i\omega t} = 0, \quad (4.38)$$

woraus wir A bestimmen können:

$$A \equiv |A| e^{i\varphi} = \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega^2 + ic\omega}. \quad (4.39)$$

Mit etwas elementarer Algebra findet man den Realteil der Lösung (welcher der treibenden Kraft $f \cos(\omega t)$ entspricht):

$$\text{Re } x(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.40)$$

mit

$$|A| = \frac{f/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{c\omega}{\omega^2 - \omega^2}. \quad (4.41)$$

Die Allgemeine Lösung ergibt sich nun einfach, indem wir zu dieser partikulären Lösung unsere beiden schon gefundenen Lösungen der homogenen Dgl. (mit frei wählbaren Koeffizienten) addieren.

Besonders interessant ist, dass wir, weil die ‘homogenen’ Lösungen abfallen, das Langzeitverhalten der Lösung eines beliebigen Anfangswertproblems direkt aus der obigen partikulären Lösung entnehmen können. Es ist sehr anschaulich, dass wir bei $\underline{\omega} \rightarrow \omega$ und $c \rightarrow 0$ eine Resonanzkatastrophe finden und dass die Phasenverschiebung φ zwischen Lösung und Kraft sich mit $\underline{\omega}$ ändert. In der Tat, bei kleinem $\underline{\omega}$ kann der Oszillator der Kraft folgen, anderenfalls bleibt er zurück (vgl. Abb. 34).

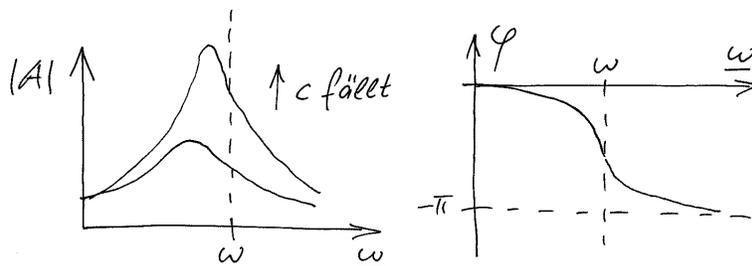


Abbildung 34: Amplitude und Phasenverschiebung des getriebenen Oszillators.

5 Symmetrie der Raumzeit

5.1 Der Euklidische Raum

Wir haben den physikalischen Raum bisher als 3-dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt $(\bar{x}, \bar{y} \mapsto \bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i)$ beschrieben. Jetzt interessieren wir uns für dessen **Symmetrie**, also Abbildungen

$$V \rightarrow V, \quad \bar{x} \mapsto \bar{x}'$$

welche die **Struktur des Raumes respektieren**. Struktur bedeutet hier zum einen die Vektorraumstruktur (die lineare Struktur), zum anderen das Skalarprodukt.

Sei nun $R : V \rightarrow V$ eine solche Symmetrietransformation. Dann muss also gelten:

$$R(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha R(\bar{x}) + \beta R(\bar{y}) \quad (5.1)$$

$$R(\bar{x} \cdot \bar{y}) \equiv \bar{x} \cdot \bar{y} = R(\bar{x}) \cdot R(\bar{y}). \quad (5.2)$$

Das ‘ \equiv ’ in der zweiten Zeile bedeutet, dass R nur auf V operiert – auf \mathbb{R} wirkt es trivial: $R(\alpha) = \alpha$.

Die Linearitäts-Bedingung (5.1) wird von den sogenannten **allgemeinen linearen Abbildungen** erfüllt:

$$x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

bei uns mit $n = 3$. Zum expliziten Rechnen ist es bequem, die Matrix, den Vektor und den Ergebnis-Vektor wie folgt anzuordnen:

$$\begin{pmatrix} R^{11} & R^{12} & R^{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Dann ist z.B. x'^1 das ‘Skalarprodukt’ der beiden ‘Vektoren’ (R^{11}, R^{12}, R^{13}) und (x^1, x^2, x^3) , die auf x'^1 ‘zeigen’:

$$x'^1 = R^{11}x^1 + R^{12}x^2 + R^{13}x^3. \quad (5.5)$$

Allgemeiner ergibt sich Element i als $x'^i = \sum_j R^{ij} \cdot x^j$ mit R^{ij} als j -tes Element der Zeile i der Matrix R . Als Kurzschreibweise für diese Matrixmultiplikation von R mit x benutzen wir

$$x \mapsto x' = R \cdot x,$$

mit R als $n \times n$ -Matrix und x als n -elementigem Spaltenvektor. Wir schreiben in solchen Formeln x und nicht \bar{x} , da wir x in Analogie zu R als $n \times 1$ -Matrix auffassen. Auch R trägt schließlich kein besonderes auch ‘Matrixsymbol’. Es ist allerdings verbreitet, in derartigen Ausdrücken mit Matrizen und Vektoren jeweils große bzw. kleine Buchstaben für die beiden Arten von Objekten zu benutzen.

Um Schreibarbeit zu sparen betrachten wir ein einfaches Beispiel mit $n = 2$. Zunächst gilt ganz allgemein

$$\begin{aligned} x'^1 &= R^{11}x^1 + R^{12}x^2 \\ x'^2 &= R^{21}x^1 + R^{22}x^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Konkret für

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{hat man} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

für die beiden Basisvektoren (vgl. Abb. 35).

Jeder andere Vektor lässt sich als

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

darstellen und transformiert entsprechend gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

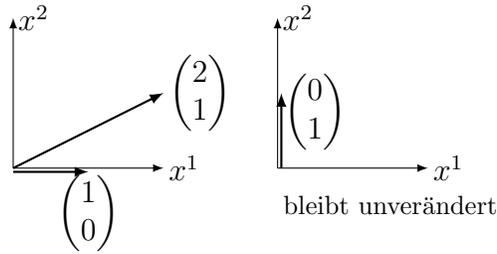


Abbildung 35: Transformation der Basisvektoren im beschriebenen Beispiel.

Als **Symmetrie des Vektorraums** können wir das aber nur auffassen, falls es auch eine Umkehrabbildung gibt. Man spricht dann auch von **Transformationen**. Um dies zu diskutieren lernen wir zunächst, zwei Transformationen zu verknüpfen:

$$R_1 : x \mapsto R_1 \cdot x, \quad R_2 : x \mapsto R_2 \cdot x \quad \text{und zusammen} \quad R_2 \circ R_1 : x \mapsto R_2 R_1 x. \quad (5.10)$$

Die Komponente i des letzten Vektors ist

$$R_2^{ij} (R_1 x)^j = R_2^{ij} (R_1^{jk} x^k). \quad (5.11)$$

Also hat man $R_2 \circ R_1 : x \mapsto x'$ mit $x'^i = R_2^{ij} R_1^{jk} x^k$. Die sich hierbei ergebende Matrix heißt **Produkt** von R_2 und R_1 :

$$(R_2 \cdot R_1)^{ik} = R_2^{ij} R_1^{jk}. \quad (5.12)$$

Zum expliziten Rechnen ordnen wir die Matrizen (wie schon oben) wie folgt an:

$$\begin{pmatrix} R_1^{11} & \cdot & \cdot \\ R_1^{21} & \cdot & \cdot \\ R_1^{31} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_2^{11} & R_2^{12} & R_2^{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Dann ist z.B. R_3^{11} das 'Skalarprodukt' der beiden 'Vektoren', die auf dieses Element der Matrix $R_3 = R_1 \cdot R_2$ 'zeigen'.

Wir nennen nun eine Abbildung oder Transformation (bzw. die entsprechende Matrix) invertierbar ist, falls es eine zweite Transformation R^{-1} gibt, sodass $R^{-1} \circ R = id$, also als Identität auf V . Für die entsprechenden Matrizen heißt das:

$$(R^{-1})^{ij} R^{jk} = \mathbb{1}^{ik} \equiv \delta^{ik}. \quad (5.14)$$

Das auch als Kronecker- δ bezeichnete Symbol δ^{ij} ist 1 falls $i = j$, sonst 0. R^{-1} heißt die zu R inverse Matrix. Es gilt auch $R \cdot R^{-1} = \mathbb{1}$, wie wir bald explizit sehen werden. Um inverse Matrizen zu berechnen, fassen wir zusammen und erweitern unsere Diskussion um das zentrale Konzept der Matrix-Determinante:

5.2 Matrix, Determinante, inverse Matrix (M)

Eine $(n \times m)$ -Matrix ist ein Schema von Zahlen A^{ij} , die jeweils Eintrag in Zeile i und Spalte j bezeichnen. Man kann eine $(n \times m)$ -Matrix mit einer $(m \times p)$ -Matrix **multiplizieren**:

$$(AB)^{ij} = \sum_{k=1}^m A^{ik} B^{kj}. \quad (5.15)$$

Das Ergebnis ist eine $(n \times p)$ -Matrix.

Für quadratische (also $(n \times n)$ -) Matrizen definieren wir die **Determinante**:

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}. \quad (5.16)$$

Hierbei ist ε das **n -dimensionale Levi-Civita-Symbol**. Um dieses zu definieren brauchen wir zunächst den Begriff der **Permutation**. Eine Permutation von n Elementen, die wir mit σ bezeichnen wollen, ist eine umkehrbare Abbildung einer Menge von n Elementen auf sich selbst. Naheliegenderweise denkt man an die Menge $\{1, \dots, n\}$ und somit an

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto \sigma(i). \quad (5.17)$$

Es ist oft nützlich, sich die Permutation als das Ergebnis der elementweisen Anwendung von σ auf $\{1, \dots, n\}$ vorzustellen, also als $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$.

Eine Permutation heißt **gerade** ($\text{sgn}(\sigma) = +1$), falls sie sich aus geradzahlig vielen Vertauschungen von Nachbarn ergibt. Zum Beispiel ist $123 \rightarrow 312$ ist Produkt von $123 \rightarrow 132$ und $123 \rightarrow 213$:

$$123 \rightarrow 132 \rightarrow 312$$

also gerade.

Wir definieren nun

$$\varepsilon^{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)} \equiv \text{sgn}(\sigma).$$

Damit ist klar, dass $\varepsilon^{12\dots n} = 1$ (Null Vertauschungen).

Jetzt zurück zur Determinante. Zunächst ist klar, dass man für eine (1×1) -Matrix oder Zahl, die Zahl selbst erhält. Das erste nichttriviale Beispiel bekommt man für (2×2) -Matrizen:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2!} \varepsilon^{ij} A^{ik} A^{jl} \varepsilon^{kl} \\ &= \frac{1}{2!} (\varepsilon^{12} A^{11} A^{22} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{12} A^{12} A^{21} \varepsilon^{21} + \varepsilon^{21} A^{21} A^{12} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} A^{22} A^{11} \varepsilon^{21}) \\ &= \frac{1}{2} (A^{11} A^{22} - A^{12} A^{21} - A^{21} A^{12} + A^{22} A^{11}) = A^{11} A^{22} - A^{12} A^{21} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Man überlegt sich außerdem leicht, dass aus der ursprünglichen Definition

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) A^{1\sigma(1)} A^{2\sigma(2)} \dots A^{n\sigma(n)} \quad (5.19)$$

folgt. Dies bedeutet, dass man $n!$ Summanden hat. Jeder ist das Produkt von je einem Element aus jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix. Das Vorzeichen ist das Vorzeichen der Permutation der Spaltennummern, wenn man die Zeilennummern von 1 bis n geordnet hat. Für (3×3) -Matrizen ergibt sich damit ein immer noch recht anschauliches Rechenschema, wie in Abb. 36 skizziert.

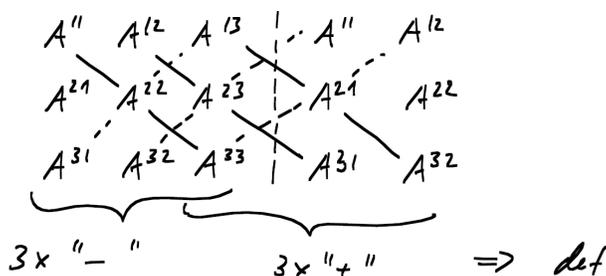


Abbildung 36: Rechenschema für die Determinante einer (3×3) -Matrix.

Betrachten wir nun den Ausdruck $\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n}$. Dieser hängt von den Indizes $j_1 \dots j_n$ ab und wechselt sein Vorzeichen bei Vertauschung zweier dieser Indizes. Man sieht dies z.B. durch

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots} A^{i_2 j_2} A^{i_1 j_1} \dots = \varepsilon^{i_2 i_1 \dots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots = -\varepsilon^{i_1 i_2 \dots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots \quad (5.20)$$

Man sagt, der Ausdruck ist **total antisymmetrisch**. Dies ist natürlich auch die Eigenschaft von des Levi-Civita-Symbols und diese Eigenschaft fixiert auch jeden mathematischen Ausdruck bis auf den Vorfaktor. Also hat man

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c \cdot \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \quad (5.21)$$

Den Vorfaktor bestimmt man, indem man mit $\varepsilon^{j_1 \dots j_n}$ multipliziert und über die Indizes summiert. Man findet

$$n! \cdot \det A = c \cdot \varepsilon^{j_1, \dots, j_n} \varepsilon^{j_1, \dots, j_n} = c \cdot n! \quad \Rightarrow \quad c = \det A \quad (5.22)$$

und somit

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = (\det A) \cdot \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \quad (5.23)$$

Dies ist eine nützliche alternative Definition der Determinante.

Eine zentraler Fakt ist nun

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0. \quad (5.24)$$

Wir zeigen \Leftarrow indem wir die **inverse Matrix** explizit angeben:

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{j i_2 \dots i_n} \varepsilon^{i j_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \cdot \frac{1}{\det A} \quad (5.25)$$

Nun prüfen wir, dass dies wirklich das Inverse von A ist:

$$(A^{-1})^{ij} A^{jk} = \frac{1}{(n-1)! \cdot \det A} \cdot \varepsilon^{ji_2 \dots i_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n} A^{jk} \cdot A^{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot A^{i_n j_n} \quad (5.26)$$

$$= \frac{1}{(n-1)! \cdot \det A} \cdot \det A \cdot \underbrace{\varepsilon^{kj_2 \dots j_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n}}_{(n-1)! \delta^{ki}} = \delta^{ik}. \quad \checkmark \quad (5.27)$$

Die Gegenrichtung, \Rightarrow , ist zumindest naheliegend, weil das oben definierte A^{-1} divergiert, wenn $\det A \rightarrow 0$. Wir verzichten auf einen Beweis. Wir bemerken noch, dass

$$\frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{ii_2 \dots i_n} \varepsilon^{jj_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot A^{i_n j_n} \quad (5.28)$$

gerade $(-1)^{i+j} \cdot \det(M(i, j))$ ist, wobei $M(i, j)$ aus A durch Streichung von Zeile i und Spalte j hervorgeht. A^{-1} ist durch obige Formel also mit dieser **Matrix der Cofaktoren** verbunden.

Der Euklidische Raum (Fortsetzung)

Wäre nun Linearität die einzige wichtige Eigenschaft des Raumes, so wären unsere Symmetrietransformationen also alle invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen bzw. die **allgemeinen linearen (General Linear) Transformationen**, d.h. $R \in GL(n)$.

Wir brauchen aber zusätzlich

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = R(\bar{x}) \cdot R(\bar{y}) \quad (\text{mit } R(\bar{x})^i = R^{ij} x^j). \quad (5.29)$$

Dies läßt sich bequemer diskutieren, wenn wir die Schreibweise $(M^T)^{ij} = M^{ji}$ (Transposition) einführen. Im Spezialfall von Vektoren haben wir:

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}; \quad x^T = \underbrace{(x^1, \dots, x^n)}_{\text{Zeilenvektor}}. \quad (5.30)$$

Wenn nichts anderes gesagt ist, betrachten wir jeden Vektor x zunächst als Spaltenvektor. Damit gilt

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x^T \cdot y = x^i y^i \quad (5.31)$$

und weiterhin

$$R(\bar{x}) \cdot R(\bar{y}) = (Rx)^T (Ry) = (x^T R^T) (Ry) = x^T R^T Ry. \quad (5.32)$$

Hierbei benutzen wir die allgemeine Tatsache, dass

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (5.33)$$

für beliebige Matrizen. Dies folgt aus

$$((AB)^T)^{ij} = (AB)^{ji} = A^{jk} B^{ki} = B^{ki} A^{jk} = (B^T)^{ik} (A^T)^{kj} = (B^T A^T)^{ij}. \quad (5.34)$$

Außerdem haben wir im letzten Schritt von (5.32) die einfache aber wichtige Tatsache benutzt, dass Matrixmultiplikation assoziativ ist.

Unsere Forderung ist demnach, dass $x^T y = x^T R^T R y$ für beliebige x, y erfüllt sein soll. Dies gilt genau dann, wenn

$$R^T R = \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad (R^T)^{ik} R^{kj} = \delta^{ij} \quad \text{bzw.} \quad R^{ki} R^{kj} = \delta^{ij}. \quad (5.35)$$

Dies sind äquivalente Formulierungen der Forderung, dass die Matrix R **orthogonal** sein soll.

Zusammenfassend sehen wir, dass die Symmetrien des euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 durch

$$x \rightarrow Rx \quad (\text{gleichzeitig für alle } x \in \mathbb{R}^3) \quad (5.36)$$

gegeben sind, wobei R die Bedingung $R^T R = \mathbb{1}$ erfüllt bzw.

$$R \in O(3) \subset GL(3). \quad (5.37)$$

Hier sind $O(3)$ die orthogonalen und $GL(3)$ die allgemeinen linearen Transformationen in 3d.

5.3 Symmetriegruppen (M)

Symmetrien werden in Physik und Mathematik durch Gruppen beschrieben. Wir haben bisher gelernt, dass $GL(n)$ die Symmetriegruppe des Vektorraums \mathbb{R}^n und $O(n)$ die Symmetriegruppe des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n (also des \mathbb{R}^n mit Skalarprodukt) sind. Beides sind sogenannte Matrix-Gruppen. Allgemeiner definiert man:

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer binären Operation $G \times G \rightarrow G$, für die gilt:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\exists e \in G$ (“Eins”), so dass $a \cdot e = e \cdot a = a \forall a$
- $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$, sodass $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Eine Gruppe heißt abelsch, falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b . Beispiele dafür sind $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wenn man nicht “ \cdot ” sondern “ $+$ ” zur Gruppenoperation erklärt, sind außerdem $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ Gruppen bezüglich dieser Operation. Unter Benutzung des Gruppenbegriffs können wir folgende alternative Definition eines Körpers geben:

Eine Menge K mit Operationen $+, \cdot$ ist ein Körper, wenn gilt:

- $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (mit Einselement 0)
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
- Distributivität.

$GL(n)$ ist eine (nichtabelsche) Gruppe. Dazu müssen wir insbesondere wissen, dass mit A und B auch $A \cdot B$ invertierbar ist. Dies ist aber offensichtlich, da $B^{-1} \cdot A^{-1}$ das inverse Element zu $A \cdot B$ ist:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot B = \mathbb{1}. \quad (5.38)$$

Als $GL^+(n)$ bezeichnet man die orientierungserhaltende Untergruppe, das heißt alle $A \in GL(n)$ mit $\det A > 0$.

$O(n)$ ist eine Untergruppe von $GL(n)$. Wir müssen dazu prüfen, dass mit A und B auch $A \cdot B$ orthogonal⁸ ist. In der Tat:

$$(A \cdot B)^T \cdot (A \cdot B) = B^T \cdot A^T \cdot A \cdot B = B^T \cdot B = \mathbb{1}. \quad (5.39)$$

Eine weitere wichtige Gruppe ist die der **speziellen** orthogonalen Transformationen $SO(n) \subset O(n)$, welche durch die Zusatzbedingung $\det(R) = 1$ definiert ist. Dazu zunächst zwei wichtige Fakten:

$$\det A^T = \det A \quad \text{und} \quad \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B). \quad (5.40)$$

für beliebige quadratische Matrizen. Aus $R^T R = \mathbb{1}$ folgt damit

$$\det(R^T R) = (\det R^T) \cdot (\det R) = (\det R)^2 = 1, \quad (5.41)$$

also $\det R = \pm 1$. Um ein Beispiel zu geben: Speziell für $n = 3$ wird die Reflexion bezüglich der y - z -Ebene durch

$$R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

beschrieben. Man sieht sofort, dass $\det R_x = -1$. Wir stellen als interessanten Fakt fest: Jedes Element von $O(3)$ ist als $R \cdot R_x$ mit $R \in SO(3)$ (also einer echten Drehung R) schreibbar. Dies überträgt sich sinngemäß auf $SO(n) \subset O(n)$.

Überlegen Sie sich selbst, dass $R \in SO(2)$ allgemein als

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

darstellbar ist und identifizieren Sie $SO(2)$ mit $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Die Gruppenoperation soll dann mit der komplexen Multiplikation identifiziert werden.

Für uns sind im Folgenden vor allem $O(n)$ und $SO(n)$ (letzteres sind Drehungen) wichtig. Die Tatsache, dass jedes Element von $SO(3)$ eine Drehung im anschaulichen Sinn ist, beweisen wir im Moment nicht.

5.4 Tensoren (M)

Mathematisch gesprochen ist ein Tensor vom Rang m im n -dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ eine multilineare Abbildung⁹

$$t : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{m\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.44)$$

⁸Man kann orthogonale Matrizen auch als quadratische, reelle Matrizen definieren, deren Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise zueinander orthonormal sind. Sie stellen Kongruenzabbildungen, also Spiegelungen und Drehungen, dar. Der analoge Begriff bei komplexen Matrizen ist die unitäre Matrix.

⁹Das heisst linear in jedem Argument.

In der Praxis kann jede solche Abbildung als

$$t : (\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \dots, \bar{x}_{(m)}) \mapsto t_{i_1 \dots i_m} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(m)}^{i_m} \in \mathbb{R} \quad (5.45)$$

realisiert werden. Ab sofort ist also für uns ein Tensor ein Zahlenschema $t_{i_1 \dots i_m}$, welches, wie wir gleich sehen werden, auf eine bestimmte Art unter $O(n)$ transformiert. Wir haben die Indizes von t aus gutem Grund unten geschrieben – das wird gleich klarer werden.

Zunächst geben wir einige Beispiel: Wir haben mit dem euklidischen Skalarprodukt bereits eine bilineare Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ kennengelernt,

$$\delta : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \delta_{ij} x^i y^j \equiv \bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathbb{R}. \quad (5.46)$$

Wir sehen, dass in diesem einfachen Fall das dem Tensor entsprechende Zahlenschema schlicht aus den Elementen des ‘Kronecker- δ ’, also aus den δ_{ij} besteht.

Das einfachste Beispiel ergibt sich jedoch für $m = 1$. Dann haben wir es einfach mit linearen Abbildungen

$$t : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{also} \quad t : \bar{x} \mapsto t_i x^i \in \mathbb{R} \quad (5.47)$$

zu tun. Die Menge solcher Abbildungen bildet auch einen n -dimensionalen Vektorraum, den sogenannten **Dualraum** V^* zu V . Wenn wir also Elemente des Dualraums V^* (im Gegensatz zu Elementen von V) durch unterstreichen kennzeichnen, dann haben wir

$$\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\} \in V^*. \quad (5.48)$$

Es ist außerdem bequem, die Indizes der Komponenten von \underline{t} unten zu schreiben, so dass man bei der ‘natürlichen’ Wirkung von \underline{t} auf \bar{x} immer untere mit oberen Indizes summiert (man sagt auch **Indizes kontrahieren**). Oft werden die oberen Indizes auch als kontravariant und die unteren (die zum ‘Co-Vektor’ gehörigen) als kovariant bezeichnet. Die unten geschriebenen Indizes der Tensoren höherer Stufe sind schlicht die logische Verallgemeinerung der eben erklärten unteren Indizes dualer Vektoren.

Nun ergibt sich aber für uns eine enorme Vereinfachung: Wir werden immer im euklidischen Raum arbeiten und also immer die besondere Rolle von δ_{ij} und von deren inversen Matrix δ^{ij}

$$(\text{definiert durch} \quad \delta^{ij} \delta_{ij} = \delta^i_j \equiv (\mathbb{1})^i_j) \quad (5.49)$$

nutzen können. Dies erlaubt uns aber, Indizes beliebig ‘zu heben’ und ‘zu senken’:

$$t^i \equiv \delta^{ij} t_j \quad \text{oder auch} \quad x_i \equiv \delta_{ij} x^j. \quad (5.50)$$

Wir können also mittels des Skalarproduktes jederzeit V mit V^* identifizieren, und müssen uns um die obere oder untere Position der Indizes keine Sorgen machen. Ebenso können wir mittels δ_{ij} und δ^{ij} die Indizes jedes Tensors in die gewünschte Position bringen.

Wir werden zur Vereinfachung weiterhin

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i \quad (5.51)$$

schreiben, obwohl wir uns jetzt der korrekteren Schreibweise

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^j \delta_{ij} \quad (5.52)$$

bewusst sind. Die weitere Ausführung des oben angerissenen Dualraum-Konzeptes überlassen wir der Linearen Algebra.

In unserer vereinfachten Sprache und Denkweise ist also ein **Tensor der Stufe** $m = 1$ schlicht ein Vektor: $t = \bar{t}$. Die obige, den Tensor definierende lineare Abbildung ist

$$t : \bar{x} \mapsto t^i x^i = \bar{t} \cdot \bar{x} = t^T x. \quad (5.53)$$

Für uns ist besonders wichtig, dass das Resultat unter Drehungen invariant ist, falls

$$x \mapsto Rx \quad \text{und} \quad t \mapsto Rt, \quad (5.54)$$

beziehungsweise genauer,

$$x \mapsto x' = Rx \quad \text{mit} \quad x'^i = R^{ij} x^j \quad (5.55)$$

und entsprechend für t . Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass wir eigentlich $x'^i = R^i_j x^j$ schreiben müssten, es aber wie oben erklärt zur Vereinfachung nicht tun.

Ein einfaches Beispiel für einen **Tensor der Stufe** $m = 2$ ist das sogenannte Tensorprodukt zweier Vektoren: $t \equiv u \otimes w \in V \otimes V$.¹⁰

$$t : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (u^i \cdot w^j) \cdot (x^i \cdot y^j) = (\bar{u} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{w} \cdot \bar{y}) = t^{ij} x^i y^j. \quad (5.56)$$

Also gilt $t^{ij} = u^i w^j$. Die Transformation unter Drehungen ist demnach

$$t^{ij} = u^i w^j \rightarrow R^{ik} u^k R^{jl} w^l = R^{ik} R^{jl} t^{kl}. \quad (5.57)$$

Die Invarianz von $t(\bar{x}, \bar{y})$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} t(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow Rt(Rx, Ry) &= (R^{ik} R^{jl} t^{kl})(R^{ip} x^p)(R^{jq} y^q) \\ &= (R^{ik} R^{ip}) R^{jl} R^{jq} t^{kl} x^p y^q = \delta^{kp} \delta^{lq} t^{kl} x^p y^q \\ &= x^k y^l t^{kl} = t(\bar{x}, \bar{y}). \quad \checkmark \end{aligned} \quad (5.58)$$

Nur um Missverständnissen vorzubeugen: Nicht jeder Rang-2-Tensor lässt sich als $u \otimes w$ schreiben. Aber: Jeder solcher Tensor kann als endliche Summe $\sum_{\alpha} u_{\alpha} \otimes w_{\alpha}$ geschrieben werden.

Ganz allgemein gilt nun (und das wird gelegentlich als Definition eines Tensors aufgefasst): Ein Tensor vom Rang m transformiert sich gemäß

$$t \rightarrow t' = Rt \quad \text{mit} \quad t'^{i_1 \dots i_m} = R^{i_1 j_1} \dots R^{i_m j_m} t^{j_1 \dots j_m}. \quad (5.59)$$

Die Invarianz von $t(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ folgt wie eben bei $m = 2$.

¹⁰ Der letzte Ausdruck steht für das Tensorprodukt von V mit sich selbst, was wieder ein Vektorraum ist. Es enthält grob gesagt alle Linearkombinationen von Elementen vom Typ $u \otimes w$ – mehr brauchen wir im Moment nicht.

Fortgeschrittener Kommentar:

Eine Gruppe wirkt auf einen Vektorraum natürlicherweise als Matrix. Die Abbildung Gruppenelement \mapsto Matrix heißt (unter gewissen Bedingungen, die bei uns stets erfüllt sind) **Darstellung**. Bisher waren unsere Gruppen selbst Matrixgruppen und die obige Darstellung war die Identitätsabbildung. Deshalb war die Terminologie “Darstellung” unnötig. Tensoren (zum Beispiel für $m = 2$) bilden auch einen Vektorraum und die Darstellung ist jetzt nichttrivial:

$$\underbrace{R \in SO(n)}_{\text{mit Elementen } R^{ij}} \mapsto \underbrace{D(R) \in (n^2 \times n^2)\text{-Matrizen}}_{\text{mit Elementen } D(R)^{ij,kl} = R^{ik}R^{jl}} \quad (5.60)$$

wobei $D(R)^{ij,kl}$ im ersten Index n^2 Werte hat und im zweiten ebenfalls n^2 . Dieses $D(R)$ wirkt wie oben beschrieben auf Tensoren:

$$t^{ij} \mapsto D(R)^{ij,kl} t^{kl}. \quad (5.61)$$

Kehren wir noch einmal zum Kronecker-Delta zurück, das wir jetzt zur Vereinfachung (wie oben diskutiert) mit oberen Indizes schreiben,

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \delta^{ij} x^i y^j = x^i y^i. \quad (5.62)$$

Es transformiert gemäß

$$\delta^{ij} = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = \delta^{ik}. \quad (5.63)$$

Das Kronecker-Delta ist also ein **invarianter Tensor**. Ein weiteres wichtiges Beispiel mit $m = n$ ist $\varepsilon^{i_1 \dots i_m}$ – der Levi-Civita-Tensor. Zur notationellen Vereinfachung diskutieren wir nur den Fall $m = n = 3$:

$$\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \varepsilon^{ijk} x^i y^j z^k = x^i \varepsilon^{ijk} y^j z^k = \bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z}). \quad (5.64)$$

Es transformiert gemäß

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} = R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} R^{i_3 j_3} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3} = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \cdot \det(R) = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3}. \quad (5.65)$$

Hier haben wir im vorletzten Schritt unsere alternative Definition von \det , aber mit $R \leftrightarrow R^T$, benutzt. Im letzten Schritt haben wir $R \in SO(3)$ angenommen und sehen damit dass ε^{ijk} unter $SO(3)$ ein **invarianter Tensor** ist. Unter Reflexionen hätten wir im letzten Schritt ein extra Vorzeichen bekommen – also keine Invarianz!

Als wichtigen Fakt erwähnen wir noch: Falls t_1, t_2 Tensoren vom Rang m_1, m_2 sind, ist

$$t_1^{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{m_1}} t_2^{i_1 \dots i_l j_{l+1} \dots j_{m_2}} \equiv t^{i_{l+1} \dots i_{m_1} j_{l+1} \dots j_{m_2}} \quad (5.66)$$

ein Tensor vom Rang $m_1 + m_2 - 2l$. Der Beweis der Invarianz der Kontraktion mit Vektoren ist wie bei $t(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$. Man muss einfach $R^{ij} R^{ik} = \delta^{jk}$ vielfach benutzen.

Als Anwendung der Tensoren zeigen wir schließlich noch, dass $\bar{a} \times \bar{b}$ Pseudovektor ist:

$$(\bar{a}' \times \bar{b}')^i = \varepsilon^{ijk} a'^j b'^k = \pm \varepsilon^{ijk} a^j b^k = \pm R^{il} \varepsilon^{ljk} a^j b^k = \pm R^{il} (\bar{a} \times \bar{b})^l. \quad \checkmark \quad (5.67)$$

Hierbei ist $\pm = +$ für $R \in SO(3)$, sonst $-$. Wir haben die oben gezeigte Invarianz (bis auf ein evtl. Vorzeichen) des Levi-Civita-Tensors benutzt. Es ist eine gute Übung, *direkt* nachzurechnen, dass $\varepsilon^{ijk} a^j b^k = R^{il} \varepsilon^{ljk} a^j b^k$ ist.

5.5 Galilei-Transformationen

Bisher haben wir rein mathematisch über den Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 mit Symmetriegruppe $O(3)$ gesprochen. Jetzt gehen wir zur physikalischen Raumzeit und deren Symmetriegruppe - der Gruppe der **Galilei-Transformationen** über. Hinzu kommt zunächst die Zeit $t \in \mathbb{R}$. Wir reden nicht mehr von Punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, sondern von **Ereignissen** $(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Es geht auch etwas verloren – die Sonderrolle von $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$. In der Tat sind $|\bar{x}|$ und $|\bar{y}|$ unphysikalisch, nur $|\bar{x} - \bar{y}|$ hat physikalische Realität. Das gilt natürlich auch für t – nur Zeitdifferenzen sind physikalisch real.

Damit haben wir als Symmetrietransformationen:

- (1) Rotationen: $(t, x) \mapsto (t, Rx)$ mit $R \in O(3)$
- (2) Translationen: $(t, x) \mapsto (t + s, x + y)$ mit $s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3$
- (3) Boosts: $(t, x) \mapsto (t, x + vt)$ mit $v \in \mathbb{R}^3$

Klarerweise ist (1) schlicht die Symmetrie des Raumes, wie oben im Detail besprochen. (2) entspricht der Abschaffung der $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$ und $0 \in \mathbb{R}$. (3) bedeutet, dass die in (2) enthaltenen Translationen in \mathbb{R}^3 auch (**und zwar nur linear**) von t abhängen dürfen. Physikalisch bedeutet dies, dass Ruhe äquivalent zu geradlinig gleichförmiger Bewegung ist.

Die Galilei-Gruppe G ist die von (1), (2) und (3) “generierte” Gruppe. Man meint damit alle Elemente von (1), (2) und (3) sowie beliebige Verknüpfungen. Wir haben folgenden nichttrivialen Fakt: Jedes $g \in G$ ist als

$$g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \tag{5.68}$$

darstellbar, wobei g_1 eine Rotation, g_2 eine Translation und g_3 ein Boost ist. Um dies zu beweisen (was wir hier nicht tun wollen) muss man sich unter anderem folgendes überlegen: Betrachte eine Galilei-Transformation der Form $g_2 \circ g_1 \circ g'_2$, aufgebaut aus Rotation g_1 und Translationen g_2, g'_2 . Dann gibt es eine Rotation g''_1 und eine Translation g''_2 , sodass $g_2 \circ g_1 \circ g'_2 = g''_2 \circ g''_1$. Wir begnügen uns mit der Feststellung, dass dies anschaulich klar ist.

Das Wort ‘Boost’ heißt Zunahme, gemeint ist die Zunahme der Geschwindigkeit. Das sieht man zum Beispiel am Boost einer Trajektorie,

$$(t, x(t)) \mapsto (t, x(t) + v_0 t) \quad \text{impliziert} \quad v = \dot{x}(t) \mapsto v' = \dot{x}(t) + v_0, \tag{5.69}$$

mit v_0 als extra Beitrag zur Geschwindigkeit.

Boosts zerstören das Konzept der **Gleichörtlichkeit**:

$$\begin{array}{l} (t, x) \quad , \quad (t', x) \quad \text{zwei Ereignisse am gleichen Ort} \\ \downarrow \text{ Boost} \end{array} \quad (5.70)$$

$$(t, x + vt) \quad , \quad (t', x + vt') \quad \text{im Allgemeinen nicht am gleichen Ort.}$$

Während dies schon eine Art ‘Mischung’ von Ort und Zeit darstellt, ist diese Mischung jedoch noch eingeschränkt: Die analoge Mischung

$$(t, x) \mapsto (t + c \cdot x, x) \quad (5.71)$$

ist nämlich verboten. Sie würde auch die **Gleichzeitigkeit** relativieren und tritt erst mit den **Lorentz-Boosts** der Speziellen Relativitätstheorie auf.

5.6 Affiner Raum

Unsere Einführung der $O(3)$ als Symmetriegruppe des euklidischen Raums war elegant: Es sind alle umkehrbaren Transformationen, die die lineare Struktur und das Skalarprodukt respektieren. Unsere Einführung der Galilei-Gruppe G war nicht so elegant: Das ‘Ignorieren der Null’ im Vektorraum ist gewissermaßen ‘von Hand’ passiert. Das geht aber besser:

Dazu definieren wir den **affinen Raum**: Gegeben sei eine Menge A , ein Vektorraum V und eine Abbildung

$$A \times A \rightarrow V \quad , \quad (P, Q) \mapsto \overline{PQ} \quad , \quad (5.72)$$

so dass

$$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR} \quad . \quad (5.73)$$

Außerdem soll es zu jedem $P \in A$ und $\bar{v} \in V$ eindeutig ein $Q \in A$ geben, so dass $\bar{v} = \overline{PQ}$. Das Paar (A, V) heißt affiner Raum.

Intuitiv gesehen bedeutet diese Definition, dass Paaren von Punkten in A Vektoren zugeordnet sind, ohne jedoch einen besonderen Punkt in A , so wie die Vektorraum-Null auszuzeichnen. Das ist natürlich genau das, was wir wollten.

Als einfaches Beispiel machen wir uns klar, dass jedem Vektorraum V wie folgt einen affinen Raum zugeordnet werden kann: Wir definieren $A \equiv V$ als Menge und erklären die zur Definition gehörende Abbildung als

$$V \times V \rightarrow V \quad , \quad (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{y} - \bar{x} \quad . \quad (5.74)$$

Nun definieren wir die physikalische Raumzeit wie folgt (siehe z.B. [4]): Sei (A^4, V^4) ein 4-dimensionaler affiner Raum. (Man denke etwa, wie im Beispiel beschrieben, an den zum Vektorraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ gehörenden affinen Raum. Dann ist insbesondere $A^4 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ als Menge.) Des Weiteren definieren wir

(1) eine lineare Abbildung $V^4 \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte **Zeitfunktion**. Ihre Aufgabe ist es, zwei Ereignissen einen zeitlichen Abstand zuzuordnen. (Im Beispiel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ können wir einfach $(t, x), (t', x') \mapsto t - t'$ nehmen.)

(2) ein Skalarprodukt auf dem 3d-Unterraum von V^4 , welcher zu gleichzeitigen Ereignissen gehört (d.h. auf dem die Zeitfunktion verschwindet). Dieses Skalarprodukt erlaubt uns, den Abstand zwischen gleichzeitigen Ereignissen zu messen. Man nennt es die **Abstandsfunktion**. (Im Beispiel nehme man $(t, x), (t', x') \mapsto |x - x'|$.)

Zusammen bilden (1) und (2) eine **Galileische Struktur**. Die physikalische Raumzeit ist ein affiner Raum A^4 mit Galileischer Struktur. Wichtig ist, dass die Zeitfunktion den Raum in jeweils elementfremde Untermengen gleichzeitiger Ereignisse einteilt. Dies ist in Abb. 37 für eine 2d-Welt, also für A^3 , illustriert.

Die Symmetriegruppe G sind alle Transformationen des A^4 , welche dessen Struktur als affinen Raum und seine Galileische Struktur respektieren.

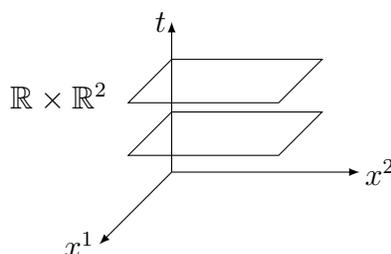


Abbildung 37: Gleichzeitigkeit in der Galileischen Struktur

5.7 Dynamik

Unsere bisherige Diskussion war rein beschreibend (kinematisch). Die entscheidende physikalische Forderung ist nun, dass auch die Dynamik unter der bisher identifizierten Symmetriegruppe G invariant ist. Dazu betrachten wir eine Trajektorie $(t, \bar{x}(t))$, welche die Bewegungsgleichung erfüllt:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{F}(t, x). \quad (5.75)$$

Wir wollen prüfen, ob dies auch für die transformierte Trajektorie

$$(t', \bar{x}'(t')) = (t + s, R\bar{x}(t) + \bar{y} + \bar{v} \cdot (t + s)) \quad (5.76)$$

gilt. Dazu berechnen wir

$$m \frac{d^2 \bar{x}'}{dt'^2} = m \frac{d^2 \bar{x}'}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} (R\bar{x}(t) + \bar{y} + \bar{v}(t + s)) = mR \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = R\bar{F}(t, x), \quad (5.77)$$

wobei wir im ersten Schritt $t' = t + s$ benutzt haben.

Wir finden also

$$m \frac{d^2 \bar{x}'}{dt'^2} = \bar{F}'(t', x') \quad \text{genau dann wenn} \quad \bar{F}'(t', x') = R\bar{F}(t, x). \quad (5.78)$$

Demnach ist Newtonsche Dynamik unter Galilei-Transformation invariant, wenn Kräfte unter Drehungen wie Vektoren transformieren. Das hatten wir natürlich schon gefordert.

Unsere Symmetriediskussion wird noch eleganter, wenn wir uns auf ein System von Massenpunkten mit ausschließlich Zentralkräften zwischen diesen Punkten beschränken. Dann folgen die Kräfte als Gradienten aus den Potentialen und transformieren damit automatisch als Vektoren. Die obige Annahme wird unnötig.

In der zweiten Gleichung von (5.78) haben wir nicht nur den Vektor gedreht, sondern auch die Argumente von \bar{F} ersetzt. Dies impliziert insbesondere, dass $\bar{F}(t, \bar{x})$ selbst dann nichttrivial transformiert, wenn wir $R = \mathbb{1}$ wählen:

$$\bar{F}'(t, \bar{x}) \neq \bar{F}(t, \bar{x}) \quad , \quad \text{stattdessen} \quad \bar{F}'(t', \bar{x}') = \bar{F}(t, \bar{x}) \quad . \quad (5.79)$$

Dies ist auch anschaulich klar: wenn wir den Massenpunkt verschieben, muss das (nichtkonstante) Kraftfeld mitverschoben werden – sonst hätten wir nicht mehr die gleiche physikalische Situation (vgl. Abb. 38).

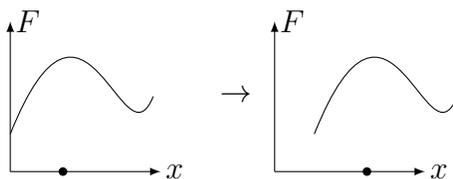


Abbildung 38: Kraftfeldtransformation.

Bei geschwindigkeitsabhängigen Kräften (z.B. Reibung $\sim -\dot{\bar{x}}$ im Medium) wird es komplizierter. Wir müssen einen Vektor \bar{u} einführen, der die Geschwindigkeit des Mediums beschreibt. Jetzt können wir die Reibung als $\bar{F}_R = -\alpha(\dot{\bar{x}} - \bar{u})$ beschreiben. Nach einem Boost um \bar{v} , bei dem wir natürlich das Medium mitboosten, ist dann

$$\bar{F}'_R = -\alpha((\dot{\bar{x}} + \bar{v}t)' - (\bar{u} + \bar{v})) = -\alpha(\dot{\bar{x}} - \bar{u}) \quad , \quad (5.80)$$

so dass wir wieder die gleiche Physik haben.

Das oben durchgespielte Schema

- Beschreibung der Bewegung festlegen (Spielfeld)

hier: affine Raumzeit mit Galileischer Struktur

- Symmetriegruppe identifizieren

hier: Galilei-Gruppe

- Invarianz der Dynamik fordern/prüfen (Spielregeln)

hier: Newtonsches Grundgesetz

wiederholt sich in der theoretischen Physik in vielen Variationen.

Wir haben viel mehr Zeit in Drehungen investiert (investieren müssen), als in Translationen und Boosts. Dies ist kein Zufall: Im Folgenden (in circa einem Jahr) werden Sie in der Speziellen Relativitätstheorie lernen, dass die volle Symmetrie eigentlich die **Drehungen und Translationen** des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$ sind. Die Galilei-Boosts werden als Teil der allgemeineren Drehungen mit abfallen. Die Translationen bleiben relativ einfach.

6 Wechsel des Koordinatensystems und Scheinkräfte

6.1 Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum

Zunächst konzentrieren wir uns auf den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ (z.B. $n = 3$) als den anschaulichen physikalischen Raum, vgl. Abb. 39. Das heißt die Null sei fest gewählt und wir betrachten im Moment keine Translationen.

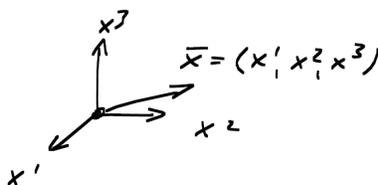


Abbildung 39: Vektor in \mathbb{R}^3 .

Unsere bisherige Beschreibung von \bar{x} durch Komponenten hängt eigentlich an einer ganz bestimmten Vektorraum-Basis (vgl. Lineare-Algebra-Vorlesung):

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^i \bar{e}^i. \quad (6.1)$$

Wichtig ist, dass wir unter $\{\bar{e}^i\}$ einen durch i nummerierten Satz von drei Vektoren der Länge 1 verstehen, nicht die Komponenten eines Vektors wie bei x^i .

Da wir unseren Vektorraum als \mathbb{R}^n definiert haben, war bisher stets eine ‘natürliche’ Basis ausgezeichnet. Im Allgemeinen, z.B. für den Ortsraum der Physik, gibt es keine solche besondere Basis.

Gegeben eine Basis, können wir immer eine andere Basis und damit ein anderes Koordinatensystem wählen (Abb. 40):

$$\bar{e}'^i = R^{ik} \bar{e}^k. \quad (6.2)$$

Das ist völlig analog zur obigen Formel $\bar{x} = x^i \bar{e}^i$: Wir schreiben \bar{e}'^i einfach als Linearkombination von $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$. Von der Matrix R müssen wir nur Invertierbarkeit fordern: Es gilt (hier ohne Beweis):

$$\{\bar{e}'^i\} \text{ ist wieder eine Basis} \quad \Leftrightarrow \quad R \in GL(n). \quad (6.3)$$

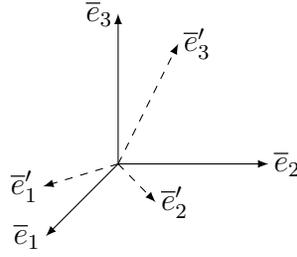


Abbildung 40: Basiswechsel.

Wir sind primär am euklidischen Raum und deshalb an **Orthonormalbasen** interessiert:

$$\bar{e}^i \cdot \bar{e}^j = \delta^{ij}. \quad (6.4)$$

Wenn nun $\{\bar{e}^i\}$ eine Orthonormalbasis ist, so wird $\{\bar{e}'^i\}$ auch eine sein, falls $R \in O(n)$. Dies folgt aus

$$\bar{e}'^i \cdot \bar{e}'^j = (R^{ik}\bar{e}^k) \cdot (R^{jl}\bar{e}^l) = R^{ik}R^{jl}\delta^{kl} = \delta^{ij}. \quad (6.5)$$

Wir können einen festen Vektor \bar{x} bezüglich der neuen Basis zerlegen

$$\bar{x} = x^i \bar{e}'^i = x'^i R^{ij} \bar{e}^j = x^j \bar{e}^j \quad \Rightarrow \quad x^j = x'^i R^{ij}. \quad (6.6)$$

Multiplikation mit $(R^T)^{jk}$ liefert

$$x^j (R^T)^{jk} = x'^i R^{ij} (R^T)^{jk} \quad \Rightarrow \quad x'^k = R^{kj} x^j. \quad (6.7)$$

Dass bei diesem 'Koordinatenwechsel' das gleiche R auftaucht, ist natürlich kein Zufall.

In der Tat, man überlegt sich leicht, dass \bar{e}'^i aus \bar{e}^i durch die Drehung R^{-1} hervorgeht. Drehung ist dabei im Sinne von Kapitel 5 zu verstehen. Um dies explizit zu sehen, müssen wir uns zunächst klarmachen, dass die Vektoren \bar{e}^i bezüglich der Basis $\{\bar{e}^j\}$ die Komponenten δ^{ij} haben:

$$\bar{e}^i = \delta^{ij} \bar{e}^j \quad \text{bzw.} \quad (\bar{e}^i)^j = \delta^{ij}. \quad (6.8)$$

Die Vektoren \bar{e}'^i haben aber per Definition bezüglich $\{\bar{e}^j\}$ die Komponenten R^{ij} :

$$\bar{e}'^i = R^{ij} \bar{e}^j \quad \text{bzw.} \quad (\bar{e}'^i)^j = R^{ij}. \quad (6.9)$$

Also ist

$$(\bar{e}'^i)^j = R^{ij} = (R^{-1})^{ji} = (R^{-1})^{jk} \delta^{ki} = (R^{-1})^{jk} (\bar{e}^i)^k, \quad (6.10)$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Wenn nun also die Basis $\{\bar{e}'^i\}$ aus $\{\bar{e}^i\}$ durch R^{-1} hervorgeht, sieht ein fester Vektor \bar{x} im Koordinatensystem von $\{\bar{e}'^i\}$ wie um R gedreht aus:

$$x'^i = R^{ij} x^j. \quad (6.11)$$

6.2 Aktive und Passive Beschreibung von Symmetrien

Aktiv heißt: Wir transformieren das physikalische Objekt (das Koordinatensystem bleibt fest). **Passiv** heißt: Wir wechseln das Koordinatensystem beziehungsweise die Vektorraum-Basis (das Objekt bleibt fest).

Beispiel (1): Vektoren im euklidischen Raum.

- Aktiv: $x \rightarrow x' = Rx$. Die Symmetrieforderung ist $\bar{x}' \cdot \bar{y}' = \bar{x} \cdot \bar{y}$, d.h. das Skalarprodukt soll **invariant** sein.
- Passiv: \bar{x} fest. Die Komponenten sind x^i in der Basis $\{\bar{e}^i\}$ und $x'^i = R^{ij}x^j$ in der Basis $\{\bar{e}'^i\}$. Es gilt $\bar{e}'^i = R^{ij}\bar{e}^j$.

Die Symmetrieforderung lautet nun anders: Der mathematische Ausdruck für das Skalarprodukt soll in alten und neuen Komponenten **die gleiche Form haben**. In der Tat haben wir:

$$\text{alt: } \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i \quad (6.12)$$

$$\text{neu: } \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = x^i y^i = [(R^{-1})^{ij} x'^j] \cdot [(R^{-1})^{ik} y'^k] = x'^i y'^i. \quad \checkmark \quad (6.13)$$

Beispiel (2): Galilei-Transformation.

- Aktiv: $(t, x(t)) \rightarrow (t + s, Rx(t) + y + (t + s)v)$. Die Symmetrieforderung lautet: Falls die alte Trajektorie eine mögliche physikalische Bewegung beschreibt, dann beschreibt auch die neue Trajektorie eine mögliche physikalische Bewegung.
- Passiv: Sei $\{\bar{x}_0 = \bar{a} + \bar{b}t\}$ der Vektor, welcher vom alten zum neuen Koordinatenursprung zeigt (vgl. Abb. 41). Das Koordinatensystem sei außerdem um die Drehmatrix A gedreht. Wir sehen sofort

$$\bar{x}_n = \bar{x} - (\bar{a} + \bar{b}t), \quad (6.14)$$

wobei der Index n von \bar{x}_n für ‘Vektor bezüglich des **neuen** Koordinatenursprungs’ steht. Wir wollen jetzt die Komponenten von \bar{x}_n bezüglich der neuen (gedrehten) Basis mit \bar{x}'^i bezeichnen. Dann gilt:

$$x'(t) = A^{-1}(x - a - tb) = Rx + y + t \cdot v$$

mit $R \equiv A^{-1}$, $y \equiv -A^{-1}a$, $v \equiv -A^{-1}b$. Wir stellen fest: Das sieht formal genauso aus, wie die aktive Transformation (bis auf das s , welches wir auch noch einführen könnten, wenn wir die Uhr im neuen Koordinatensystem umstellen).

Aber die physikalische Interpretation ist eine andere und die Symmetrieforderung ist eine andere: Die Bewegungsgleichungen für x' sollen die gleiche Form haben, wie die für x . Wir prüfen dies nach:

$$\ddot{x}' = R\ddot{x} = R \cdot \frac{F}{m} = \frac{F'}{m}. \quad \checkmark$$

Hier haben wir $F' = RF$ benutzt, was korrekt ist, weil F' die Komponenten des Vektors \bar{F} aus Sicht des um R^{-1} gedrehten Systems sind.

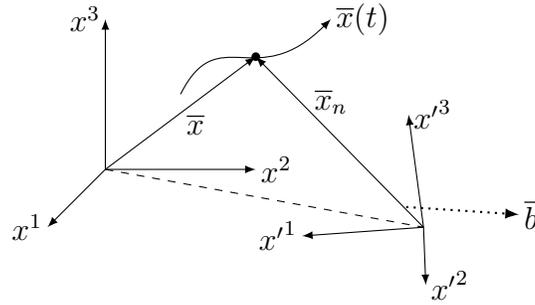


Abbildung 41: Zur passiven Sicht der Galilei-Transformation: Ein verschobenes, gedrehtes und um \bar{b} geboostetes Koordinatensystem.

6.3 Beschleunigte, nichtrotierende Bezugssysteme

Jetzt wird es erst richtig spannend: Wir verlassen das Gebiet der Symmetrietransformationen und erlauben **Nichtinertialsysteme**. Wie Abb. 42 illustrieren soll, beschreibt $\bar{x}_0(t)$ die Bewegung des Ursprungs des neuen Systems aus Sicht des Inertialsystems I. Demnach gilt

$$\bar{x}_I = \bar{x}_0 + \bar{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\bar{x}} = \ddot{\bar{x}}_I - \ddot{\bar{x}}_0, \quad (6.15)$$

und weiterhin

$$m \cdot \ddot{\bar{x}} = m \cdot \ddot{\bar{x}}_I - m \cdot \ddot{\bar{x}}_0 = \bar{F} + \bar{F}_s \quad \text{mit} \quad \bar{F}_s \equiv -m \cdot \ddot{\bar{x}}_0. \quad (6.16)$$

Im Nichtinertialsystem bewegt sich der Körper also so, als gäbe es eine zusätzliche Kraft \bar{F}_s (die **Scheinkraft**):

$$m\ddot{\bar{x}} = \bar{F} + \bar{F}_s. \quad (6.17)$$

Wenn das System nicht rotiert, ist $\bar{F}_s = -m\ddot{\bar{x}}_0$.

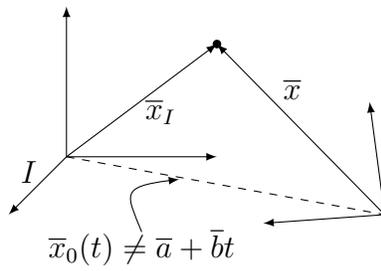


Abbildung 42: Koordinatentransformation in Nichtinertialsystemen

Als Beispiel denke man an das Anfahren eines Autos: Man wird (von der Scheinkraft) nach hinten gedrückt. Wenn man zurückgelehnt war, bleibt man im Auto in Ruhe, was aber auf die **echte** Kraft der Rückenlehne zurückzuführen ist, welche die Scheinkraft kompensiert.

6.4 Kleine Drehungen

Noch interessanter wird es, wenn das Bezugssystem auch rotieren darf. Um dies mathematisch zu beschreiben, müssen wir Drehungen R für kleine Drehwinkel genauer zu beschreiben lernen.

Sei zum Beispiel $R(t) \in SO(3)$ mit $R(0) = \mathbb{1}$ eine zeitabhängige Drehmatrix (Man denke an ein Koordinatensystem, das bei $t = 0$ mit dem alten zusammenfällt, dann aber kontinuierlich gedreht wird)

Für Werte von $t = \varepsilon$ klein gilt mit Taylor (elementweise angewandt):

$$R(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon \cdot M + O(\varepsilon^2), \quad (6.18)$$

wobei M eine (3×3) -Matrix ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} R(\varepsilon)R(\varepsilon)^T = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{1} + \varepsilon \cdot M + O(\varepsilon^2))(\mathbb{1} + \varepsilon \cdot M + O(\varepsilon^2))^T &= \mathbb{1} \\ \mathbb{1} + \varepsilon(M + M^T) + O(\varepsilon^2) &= \mathbb{1} \\ M + M^T &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Also ist M antisymmetrisch. Die antisymmetrischen Matrizen bilden einen Vektorraum. Eine Basis ist z.B.

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass $M = \alpha^i T^i$. Wir können wir diese Basis als

$$(T^i)^{jk} = \varepsilon^{ijk} \quad (6.20)$$

schreiben.

Betrachtet man analog kleine Drehungen $R(t) \in SO(n)$ mit $n \neq 3$, so stellt man fest, dass es entsprechend mehr Basis-Matrizen T^a gibt. Die allgemeine Dimension des Raumes der antisymmetrischen Matrizen ist $n(n-1)$ und eine zur obigen analoge Basis ist leicht anzugeben. Man hat zwar immer noch $M = \alpha^a T^a$, der Index a hat aber jetzt nichts mehr mit dem Index i des zugrundeliegenden \mathbb{R}^n zu tun. Eine zu (6.20) analoge Formel mit ε -Tensor existiert nicht.

Zurück zum Fall $n = 3$: Das bisher definierte $R(\varepsilon)$ hängt sowohl von der reellen variablen ε als auch von der Wahl von M (also vom Vektor $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)^T$) ab. Wir können dies durch die neue Definition (das Vorzeichen ist eine bequeme Konvention)

$$R(\bar{\varepsilon}) \equiv \mathbb{1} - \epsilon^i T^i \equiv \mathbb{1} - \bar{\varepsilon} \cdot \bar{T} \quad (6.21)$$

vereinfachen. Hier ist ε ein kleiner Vektor und \bar{T} der oben erklärte ‘Vektor’ aus drei Basis-Matrizen. Die entscheidende Behauptung ist nun, dass $R(\varepsilon)$ eine **Drehung um die durch ε definierte Achse mit Drehwinkel $\Delta\varphi = |\varepsilon|$** beschreibt.

Zur Begründung begnügen wir uns mit der speziellen Wahl $\varepsilon = |\varepsilon| \cdot (1, 0, 0)^T$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R(\varepsilon) &= \mathbb{1} - |\varepsilon| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -|\varepsilon| \\ 0 & |\varepsilon| & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos |\varepsilon| & -\sin |\varepsilon| \\ 0 & \sin |\varepsilon| & \cos |\varepsilon| \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Fortgeschrittener Kommentar:

Die antisymmetrischen Matrizen bilden die mit $\mathfrak{so}(n)$ oder $Lie(SO(n))$ bezeichnete **Lie-Algebra**¹¹ der **Lie-Gruppe**¹² $SO(n)$. Die $\mathfrak{so}(n)$ ist ein Vektorraum und es gibt für eine Umgebung $0 \in \mathfrak{so}(n)$ und der $\mathbb{1} \in SO(n)$ eine eindeutige Abbildung

$$\mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n), \quad H \mapsto e^H. \quad (6.23)$$

Für letztere haben wir mit $\varepsilon T \mapsto R(\varepsilon) \approx \mathbb{1} + \varepsilon T$ gerade die linearisierte Näherung betrachtet. Diese Struktur von Lie-Gruppe und Lie-Algebra existiert - grob gesagt - für alle 'kontinuierlichen' Gruppen beziehungsweise Symmetrien. (Kommentar endet.)

Als Anwendung diskutieren wir, wie sich Vektoren bei kontinuierlicher Drehung um eine feste Achse ändern: Als alternative Notation führen wir $\overline{\Delta\varphi} \equiv \bar{\varepsilon}$ ein und schreiben

$$R_{\overline{\Delta\varphi}} = \mathbb{1} - \Delta\varphi^i T^i \quad \text{bzw.} \quad (R_{\overline{\Delta\varphi}})^{jk} = \delta^{jk} - (\Delta\varphi)^i \varepsilon^{ijk}. \quad (6.24)$$

Jetzt wenden wir diese Drehung um den (als Vektor definierten) Winkel $\overline{\Delta\varphi}$ auf einen beliebigen sonstigen Vektor \bar{v} an:

$$(R_{\overline{\Delta\varphi}})^{jk} v^k = \delta^{jk} v^k + \varepsilon^{ijk} (\Delta\varphi)^i v^k \quad \text{bzw.} \quad R_{\overline{\Delta\varphi}} \cdot \bar{v} = \bar{v} + \overline{\Delta\varphi} \times \bar{v}. \quad (6.25)$$

Nun fassen wir die Drehung als kontinuierlichen Prozess mit

$$v(t=0) = v \quad \text{und} \quad v(t=\Delta t) = R_{\overline{\Delta\varphi}} v \quad (6.26)$$

auf. Wir finden, im Limes $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{(R_{\overline{\Delta\varphi}} - \mathbb{1}) \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t} \times \bar{v} \equiv \bar{\omega} \times \bar{v}, \quad (6.27)$$

wobei wir im letzten Schritt die **Winkelgeschwindigkeit** definiert haben:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t}. \quad (6.28)$$

¹¹ Eine Lie-Algebra ist ein Vektorraum \mathfrak{g} über einem Körper K zusammen mit einer bilinearen, antisymmetrischen Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$, welche **Lie-Klammer** genannt wird. Man hat also $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ und $[x, y] = -[y, x]$ für alle $a, b \in K$ und alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Außerdem fordert man die sogenannte **Jacobi-Identität**: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

¹² Eine Lie-Gruppe (nach Sophus Lie) ist eine Menge, die gleichzeitig eine Gruppe und eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Letzteres ist, sehr grob gesagt, ein Raum, der lokal wie \mathbb{R}^n aussieht. Man denke z.B. an die Sphäre S^2 welche, wie aus Erdkunde bekannt, zwar lokal aber nicht global durch eine 2-dimensionale Karte (ein Stück aus \mathbb{R}^2) beschrieben werden kann. Entscheidend ist, dass die Gruppenoperationen in den Kartenkoordinaten differenzierbar sein müssen. Lie-Gruppen sind in fast allen Teilen der theoretischen Physik wichtige Werkzeuge.

6.5 Rotierende Koordinatensysteme

Ganz analog zu 6.3 betrachten wir nun ein *allgemeines* Nichtinertialsystem (vgl. Abb. 43). Oben hatten wir geschrieben $x_I = x_0 + x$, wobei x die Lage des Punktes aus Sicht des Nichtinertialsystems war. Wir machen das jetzt noch deutlicher, indem wir $x \rightarrow x_N$ ersetzen. Der Index N sagt, dass diese der Vektor vom Ursprung von N zum interessierenden Massenpunkt ist:

$$x_I = x_0 + x_N. \quad (6.29)$$

Für abstrakte Vektoren gilt diese Gleichung immer - sie beschreibt schlicht das entsprechende Dreieck von Pfeilen im Bild. Wir wollen sie nun auch als Gleichung für Komponenten interpretieren - x_N ist damit einfach ein Satz von drei Zahlen.

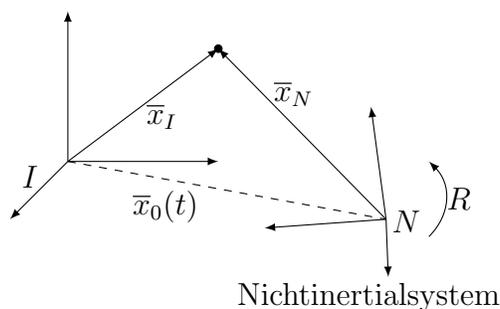


Abbildung 43: Koordinatentransformation in ein allgemeines Nichtinertialsystemen

Jetzt ist für die Richtigkeit von (6.29) aber entscheidend, dass wir für alle Vektoren die gleiche Basis benutzen. Wir dürfen N also nicht drehen. Tun wir das doch, so müssen wir beachten, dass

$$x_N = Rx \quad (6.30)$$

gilt, wobei x die Komponenten des Vektors x_N im System N ist. R ist die Matrix, welche auf das ursprüngliche System I wirken muss, um es in die Lage von N zu bringen. (Dies ist analog zu 6.1, wobei die dort 'gestrichene' Basis unserem I und die ungestrichene unserem N entspricht.)

Also haben wir

$$x_I = x_0 + Rx, \quad (6.31)$$

wobei wir $x_0 = x_0(t)$ und $R = R(t)$ ganz allgemein lassen. Nach Newton gilt $m\ddot{x}_I = F_I$, also

$$m\ddot{x}_0 + m(Rx)'' = F_I. \quad (6.32)$$

Nun haben wir aber

$$F_I = F_N = RF, \quad (6.33)$$

wobei wir im ersten Schritt benutzt haben, dass sich die Kraft durch Translation nicht ändert, und im zweiten (ganz analog zu $x_N = Rx$) zu den Kraftkomponenten F aus Sicht des gedrehten Systems N übergegangen sind. Also gilt schließlich

$$m\ddot{x}_0 + m(Rx)'' = RF. \quad (6.34)$$

Ab sofort ersetzen wir $\bar{x}_0 \rightarrow \bar{r}_0$; $\bar{x} \rightarrow \bar{r}$, um Verwechslungen zwischen x und dem Kreuzprodukt \times vorzubeugen. Wir konzentrieren uns nun auf den Term $(Rx)'' \equiv (Rr)''$. Zunächst haben wir

$$\dot{R} \approx \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \equiv \frac{R_{\Delta t} \cdot R(t) - R(t)}{\Delta t}, \quad (6.35)$$

wobei $R_{\Delta t}$ in Analogie zum $R_{\Delta\varphi}$ eine kleine Drehung ist, die unser Koordinatensystem bei t in das bei $t + \Delta t$ überführt. Des Weiteren folgt

$$\dot{R}r \approx \frac{R_{\Delta t} - \mathbb{1}}{\Delta t} \cdot Rr \approx \omega_I \times Rr. \quad (6.36)$$

Hier haben wir uns auf den letzten Abschnitt berufen und die Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz ω_I der Drehung im Inertialsystem eingeführt.

In Analogie zu $x' = Rx$ (bzw. $r' = Rr$) gilt auch $\omega_I = R\omega$, wobei $\bar{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems aus Sicht des rotierenden Systems ist. Damit gewinnen wir das wichtige Zwischenergebnis

$$\dot{R}r = (R\omega) \times (Rr) = R(\omega \times r). \quad (6.37)$$

Jetzt müssen wir nur noch systematisch weiterrechnen:

$$\begin{aligned} (Rr)'' &= (R\dot{r} + \dot{R}r)' = (R\dot{r} + R(\omega \times r))' \\ &= R\ddot{r} + \dot{R}\dot{r} + \dot{R}(\omega \times r) + R(\dot{\omega} \times r) + R(\omega \times \dot{r}) \\ &= R(\ddot{r} + \omega \times \dot{r} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}) \\ &= R(\ddot{r} + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Einsetzen in $m\ddot{r}_0 + m(Rr)'' = RF$, auflösen nach $mR\ddot{r}$ und multiplizieren mit R^{-1} ergibt

$$m\ddot{r} = F - m \underbrace{\left[\underbrace{R^{-1}\ddot{r}_0}_{\text{Kraft durch Beschl. d Ursprungs}} + \underbrace{\omega \times (\omega \times r)}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{2\omega \times \dot{r}}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{\dot{\omega} \times r}_{\text{tang. Beschl.}} \right]}_{\text{Scheinkräfte}}. \quad (6.39)$$

Dies ist ein fundamentales Ergebnis, zu dem wir noch einige Bemerkungen machen:

Die tangentielle Beschleunigung verschwindet zum Beispiel dann, wenn $\bar{\omega} = \text{const.}$ oder $\bar{r} = 0$. Die Zentrifugalkraft lässt sich wie folgt umschreiben:

$$-[\omega \times (\omega \times r)]^i = -\varepsilon^{ijk}\omega^j\varepsilon^{klm}\omega^l r^m = -[\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}]\omega^j\omega^l r^m \quad (6.40)$$

$$= -\omega^i(r \cdot \omega) + r^i(\omega^2). \quad (6.41)$$

Speziell für $\bar{r} \perp \bar{\omega}$ findet man die einfachere bekannte Formel

$$\bar{F}_Z = m\omega^2 \cdot \bar{r}. \quad (6.42)$$

Zur Diskussion der Corioliskraft nehmen wir vereinfachend an, dass $\dot{\bar{r}} \perp \bar{\omega}$ (man betrachte etwa $\bar{\omega} \parallel \hat{e}_3$; $\dot{\bar{r}} \parallel \hat{e}_1$). Dann folgt

$$\bar{F}_C = -2m|\omega| \cdot |v| \cdot \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -2m|\omega| \cdot |v| \cdot \hat{e}_2. \quad (6.43)$$

Das ist auch intuitiv klar (vgl. Abb. 44): Der nach außen laufende Massenpunkt hat die Tendenz, gegenüber der sich drehenden Scheibe zurückzubleiben. Berühmte Beispiele für die Rolle der Corioliskraft sind die bevorzugte Drehrichtung im Abfluss, die vorherrschende Windrichtung auf N- bzw. S-Halbkugel, die unterschiedliche Abnutzung von Gleisen, Flus-sufern etc.

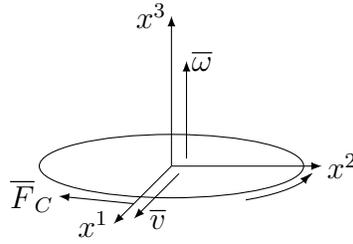


Abbildung 44: Corioliskraft auf rotierender Scheibe.

6.6 Trägheitstensor

Wir können die Methoden dieses Kapitels benutzen, um ein physikalisch sehr wichtiges Beispiel für das im letzten Kapitel eingeführte Konzept des Tensors zu geben: Es handelt sich hierbei um den Trägheitstensor, der unter anderem zur Berechnung der kinetischen Energie eines rotierenden starren Körpers benutzt werden kann. Unser Modell soll dabei eine Ansammlung von Massenpunkten sein, die (z.B. durch masselose Stangen) miteinander verbunden sind. Außerdem soll ein Punkt des Körpers fest im Koordinatenursprung fixiert sein. Der Körper kann aber um eine beliebig wählbare, feste Achse gedreht werden (vgl. Abb. 45).

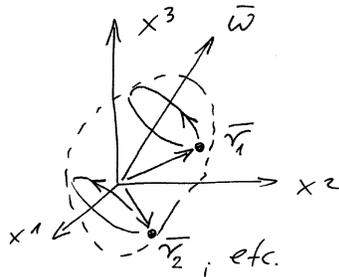


Abbildung 45: Rotierender starrer Körper.

Sei also der Körper eine Ansammlung von Punktmassen m_a an Orten \bar{r}_a . Die Drehachse ist durch die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ gegeben, so dass es im Laufe der Zeit Δt zu einer Drehung um $\overline{\Delta\varphi} = \bar{\omega} \Delta t$ kommt. Die Position eines Massenpunktes ändert sich dabei um (vgl. (6.25))

$$\Delta \bar{r}_a = \overline{\Delta\varphi} \times \bar{r}_a, \quad (6.44)$$

und seine Geschwindigkeit ist demnach

$$\bar{v}_a = \bar{\omega} \times \bar{r}_a. \quad (6.45)$$

Damit ergibt sich als kinetische Energie

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} \bar{v}_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} (\bar{\omega} \times \bar{r}_a)^2. \quad (6.46)$$

Mithilfe der Relation

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ilm} = \delta^{jl} \delta^{km} - \delta^{jm} \delta^{kl} \quad (6.47)$$

finden wir

$$(\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = \varepsilon^{ijk} \omega^j r^k \varepsilon^{ilm} \omega^l r^m = (\delta^{jl} \bar{r}^2 - r^j r^l) \omega^j \omega^l. \quad (6.48)$$

Für die kinetische Energie haben wir also

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2} (\delta^{jl} \bar{r}_a^2 - (\bar{r}_a)^j (\bar{r}_a)^l) \omega^j \omega^l = \frac{1}{2} I^{jl} \omega^j \omega^l, \quad (6.49)$$

mit dem **Trägheitstensor**

$$I^{ij} \equiv \sum_a m_a (\delta^{ij} \bar{r}_a^2 - (\bar{r}_a)^i (\bar{r}_a)^j). \quad (6.50)$$

Dieser tut genau das, was wir von einem Tensor (in unserem Fall zweiter Stufe) erwarten: Er ‘nimmt’ zwei Vektoren, hier ist das zweimal $\bar{\omega}$, und ‘gibt’ uns eine Zahl (man sagt auch einen Skalar), hier die kinetische Energie. Die Information, welche der Tensor kodiert, ist die Lage und die Masse aller Bestandteile des Körpers. Man kann auch leicht nachprüfen, dass sich der Trägheitstensor unter Drehungen des Körpers so transformiert, wie von einem Tensor im Allgemeinen gefordert.

Man kann von der obigen Summen-Definition auch zu einer Kontinuums-Definition mit Integration über den Körper und dessen Dichte übergehen. Das tun wir jetzt aus Zeitgründen nicht. Wir werden im kommenden Semester noch mehr über den Trägheitstensor und dessen Anwendung zu sagen haben.

7 Zentralkraftproblem

7.1 Motivation

Wie wir bereits gelernt haben, können Kräfte zwischen zwei Massenpunkten, die parallel zur Verbindungslinie wirken, durch ein Potential beschrieben werden:

$$\bar{F}_1 = -\bar{\nabla}_1 V(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|). \quad (7.1)$$

Eine besondere Rolle spielen Kräfte mit $V(r) \sim 1/r$. Das erste Beispiel ist die Gravitation:

$$V(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}, \quad \bar{F}_1 = -\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^3} \cdot G_N m_1 m_2 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|} \cdot \frac{G_N m_1 m_2}{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2}. \quad (7.2)$$

Das Auftreten der ‘trägen Masse’ in dieser Formel (also die Aussage ‘träge Masse = schwere Masse’) ist nichttrivial und erst in der Allgemeinen Relativitätstheorie zu verstehen. Das zweite Beispiel ist die Elektrostatik:

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon \cdot |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}, \quad (7.3)$$

mit entsprechenden analogen Formeln für die Kraft.

Die Situation ist einfacher, wenn zum Beispiel m_2 bei $\bar{0}$ fixiert ist (dies wir auch ohne Fixierung zu einer guten Näherung, wenn $m_2 \gg m_1$):

$$V(\bar{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\bar{x}|} \quad \text{oder auch} \quad V(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r}. \quad (7.4)$$

7.2 Zweikörperproblem

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall nur zweier wechselwirkender Massen, lassen aber die Bewegung von beiden zu. Dies ist das sogenannte Zweikörperproblem:

$$m_1 \ddot{\bar{x}}_1 = -\bar{\nabla}_1 V(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|) \quad , \quad m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = -\bar{\nabla}_2 V(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|) . \quad (7.5)$$

Eine passend gewählte Linearkombination dieser beiden Gleichungen liefert sofort eine einfache Gleichung für die **Relativkoordinate**,

$$\ddot{\bar{x}}_1 - \ddot{\bar{x}}_2 = \frac{1}{m_1} (-\bar{\nabla}_1 V) - \frac{1}{m_2} (-\bar{\nabla}_2 V) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (-\bar{\nabla}_1 V) = \frac{1}{m} (-\bar{\nabla}_1 V) \quad , \quad (7.6)$$

wobei wir mit

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.7)$$

die sogenannte **reduzierte Masse** eingeführt haben.

Die Addition der beiden ursprünglichen Gleichungen gibt

$$m_1 \ddot{\bar{x}}_1 + m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = 0 . \quad (7.8)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\ddot{\bar{x}}_s = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{x}_s \equiv \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad (7.9)$$

was schlicht besagt, dass sich die **Schwerpunktcoordinate** \bar{x}_s frei bewegt.

Das zu lösende Problem ist also die Bewegung der Relativkoordinate $\bar{x} \equiv \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ gemäß

$$m \ddot{\bar{x}} = -\bar{\nabla} V(|\bar{x}|) . \quad (7.10)$$

Dies ist ein Zentralkraftproblem mit dem Potential des ursprünglichen 2-Körper-Problems, aber mit reduzierter Masse. Wir können uns also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf das Zentralkraftproblem konzentrieren.

7.3 Zentralkraftproblem

Obwohl unser Hauptinteresse schlussendlich dem $1/r$ -Potential gelten wird, können wir $V(r)$ vorerst noch allgemein lassen. Wir wissen bereits, dass

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \text{const.} \quad (\text{mit } \bar{p} = m \cdot \dot{\bar{r}}) \quad , \quad (7.11)$$

wobei \bar{r} der Vektor vom Ursprung zum Massenpunkt ist. Da $\bar{r} \perp \bar{L}$ und \bar{L} fixiert ist, verläuft die Bewegung in einer festen Ebene (Abb. 46). Diese wählen wir o.B.d.A. als (1-2)-Ebene. Da wir ein rotationssymmetrisches Problem und eine Bewegung in der Ebene vorliegen haben, ist eine Beschreibung in Polarkoordinaten (also durch Winkel und Radius) angemessen. Wir solche allgemeinen (nicht-kartesischen) Koordinatensysteme zunächst aus mathematischer Sicht diskutieren.

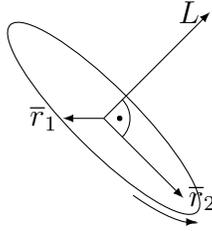


Abbildung 46: Drehimpulserhaltung im Zentralkraftproblem. Der Vektor \bar{r} wird zu allen Zeiten ($\bar{r}_i = \bar{r}(t_i)$) in der gleichen Ebene bleiben.

7.4 Allgemeine Koordinatensysteme (M)

Wir haben im Zusammenhang mit \mathbb{C} bereits gelernt, dass wir die Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ durch $x^1 = \text{Re}(z)$ und $x^2 = \text{Im}(z)$ **oder** $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ beschreiben können. Letzteres heißt **Polarkoordinaten** und ist das einfachste Beispiel für die allgemeine Tatsache, dass wir (Teile des) \mathbb{R}^n auf verschiedene Weise **parametrisieren** können.

Ein fast ebenso einfaches Beispiel sind **Zylinderkoordinaten** (vgl. Abb. 47):

$$x^1 = r \cdot \cos(\varphi), \quad x^2 = r \cdot \sin(\varphi), \quad x^3 = z. \quad (7.12)$$

Das sind also schlicht Polarkoordinaten für die x^1 - x^2 -Ebene zusammen mit der Beibehaltung von $x^3 \equiv z$. Wichtig ist (und das gilt ganz allgemein) dass wir zumindest im relevanten Teil des Raumes eine **eineindeutige Abbildung** haben:

$$(x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow (r, \varphi, z). \quad (7.13)$$

In unserem Beispiel können wir in der Tat durch

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{x^2}{x^1}, \quad z = x^3 \quad (7.14)$$

zu den kartesischen Koordinaten zurückkehren.

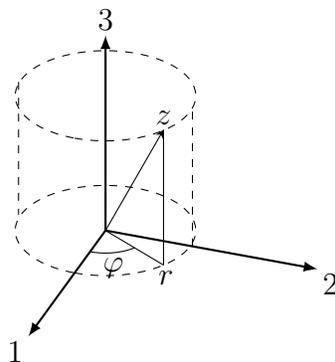


Abbildung 47: Zylinderkoordinaten - Darstellung

Das nächste wichtige Beispiel sind die **Kugelkoordinaten**, vgl. Abb. 48:

$$x^1 = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad x^2 = r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad x^3 = r \cdot \cos(\theta). \quad (7.15)$$

Natürlich können Sie sich mit ein wenig Trigonometrie leicht überlegen, wie man r , θ und φ durch $x^{1,2,3}$ ausdrückt. Schaffen Sie es auch, rein algebraisch (also ‘ohne auf das Bild zu schauen’) nach r , φ , θ aufzulösen?

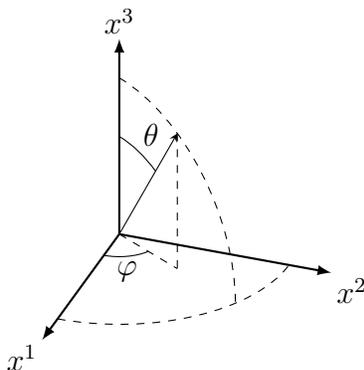


Abbildung 48: Kugelkoordinaten.

Zentralkraftproblem (Fortsetzung)

Wie schon gesagt, in unserem Fall sind Polarkoordinaten angemessen. Wir könnten nun einfach $m\ddot{\vec{x}} = \overline{F}(\vec{x})$ hinschreiben, \vec{x} durch r, φ ausdrücken und losrechnen. Aber es geht viel eleganter (wobei wir jetzt wieder $\vec{x} \equiv \vec{r}$ benutzen). Es gilt nämlich

$$\overline{L} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad |\overline{L}| = m|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = mr \cdot r \cdot \dot{\varphi} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} = \text{const.}, \quad (7.16)$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\dot{\vec{r}} = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))' = \underbrace{(\dot{r} \cos(\varphi), \dot{r} \sin(\varphi))}_{\|\dot{\vec{r}}\|} + \underbrace{(r(-\sin(\varphi)), r \cos(\varphi)) \cdot \dot{\varphi}}_{\perp \vec{r}, \text{ Länge: } r\dot{\varphi}}, \quad (7.17)$$

und die letzten beiden Ausdrücke die Radial- und die Tangentialgeschwindigkeit sind. Demnach ist $r\dot{\varphi}$ der Betrag der Tangentialgeschwindigkeit.

Die Konstanz von $|\overline{L}|$ lässt die folgende geometrische Interpretation zu: Betrachten wir die ‘vom Leitstrahl überstrichene Fläche’ df , welche zu einer Winkeländerung $d\varphi$ des Körpers gehört. Gemäß Abb. 49 gilt

$$df = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi \quad \text{und somit} \quad \frac{df}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (7.18)$$

Man findet also ‘**Die Flächengeschwindigkeit ist konstant**’ (2. Keplersches Gesetz) als unmittelbare Konsequenz der Drehimpulserhaltung.

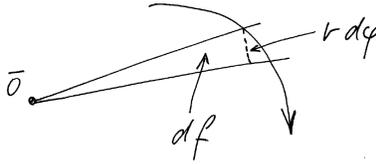


Abbildung 49: Drehimpulserhaltung im Zentralkraftproblem vs. 2. Keplersches Gesetz.

Als nächstes wollen wir auch die Energieerhaltung nutzen, welche in unserem Fall die Form

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.} \quad (7.19)$$

annimmt.

Diese beiden Erhaltungssätze genügen zur Lösung. Wir leiten aus ihnen unmittelbar die beiden Gleichungen

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \quad \text{und} \quad E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (7.20)$$

ab. Des Weiteren definieren wir

$$U(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (7.21)$$

und schreiben numehr die Energieerhaltung in der Form

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U(r). \quad (7.22)$$

Dies hat aber exakt die Form einer Energieerhaltungsgleichung für ein sogenanntes **effektives eindimensionales Problem** mit dem **effektiven Potential** $U(r)$. Wir wissen schon, dass nur nach dt aufzulösen und zu integrieren braucht:

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}}. \quad (7.23)$$

Damit ist zunächst $t = t(r)$ und dann auch $r = r(t)$ im Prinzip bekannt. Aus der ersten Gleichung in (7.20) erhält man auch $\dot{\varphi}(t)$ und nach Integration $\varphi(t)$.

Explizit lösbar sind zum Beispiel $V \sim \pm \frac{1}{r}$ (siehe unten) und $V \sim r^2$ (3-dimensionaler harmonischer Oszillator).

7.5 Qualitative Lösung des Zentralkraftproblems

Wir analysieren das äquivalente 1-dimensionale Problem mittels Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U(r) \quad \text{mit} \quad U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (7.24)$$

Speziell im Fall des Kepler-Problems gilt natürlich

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = G_N m_1 m_2. \quad (7.25)$$

Die zu erwartende Bewegung lässt sich aus Abb. 50 ableiten: Im Fall (1) gibt es zwar ein minimales aber kein maximales r . Im Fall (2) muss sich der Massenpunkt hingegen stets innerhalb zweier Extremwerte des Radius bewegen. Die entsprechenden Bahnen sind in Abb. 51 dargestellt.

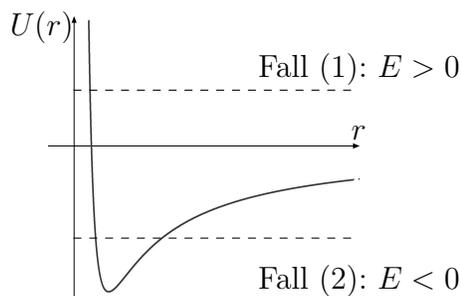


Abbildung 50: Effektives Potential des äquivalenten 1-dimensionalen Problems.

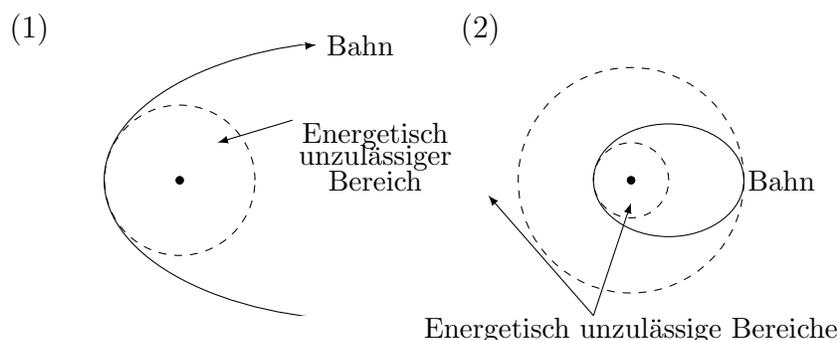


Abbildung 51: Bahnformen für $V \sim 1/r$.

Für Fall (2) haben wir angenommen, dass sich die Bahn schließt, wie es speziell beim Newtonschen Potential $V \sim 1/r$ tatsächlich der Fall ist (siehe später). Bei allgemeinem $V(r)$ schließt sich die Bahn nicht – es kommt zu einer **Periheldrehung** – siehe Abb. 52. Für Planetenbahnen ist die Periheldrehung ein kleiner Effekt, der auf allgemein-relativistische Korrekturen zum Newtonschen Potential zurückgeht.

7.6 Kepler-Problem: Bahnform

Wir könnten für das konkrete $1/r$ -Potential das Integral (7.23) und damit nach und nach das ganze Problem explizit lösen. Aber es geht eleganter. Dazu leiten wir zunächst die

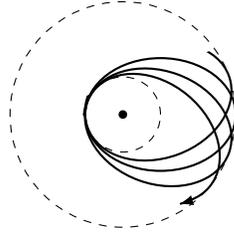


Abbildung 52: Periheldrehung.

Energieerhaltungs-Gleichung nach der Zeit ab,

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \Rightarrow \quad 0 = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}, \quad (7.26)$$

und schreiben das Resultat als Bewegungsgleichung für r um:

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}. \quad (7.27)$$

Des Weiteren können wir Ableitungen (d/dt) in ($d/d\varphi$) umschreiben:

$$\frac{d}{dt}(\dots) = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi}(\dots) = \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{d}{d\varphi}(\dots). \quad (7.28)$$

Insbesondere gilt

$$\dot{r} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}(r) = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (7.29)$$

wie man sofort sieht, indem man die Ableitung im letzten Ausdruck mittels Kettenregel ausführt.

Damit finden wir

$$m\ddot{r} = m \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (7.30)$$

Nach Einsetzen in die Bewegungsgleichung (7.27) wird daraus

$$-\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{L^2}. \quad (7.31)$$

Mit dem Variablenwechsel $u \equiv 1/r$ und der Notation $d/d\varphi(\dots) = (\dots)'$ folgt

$$u'' = -u + \frac{m\alpha}{L^2} \quad (7.32)$$

Dies entspricht einem harmonischen Oszillator im Kraftfeld. Mit $w \equiv u - \frac{m\alpha}{L^2}$ wird daraus

$$w'' = -w, \quad \text{mit der allgemeinen Lösung} \quad w = A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (7.33)$$

und schließlich

$$\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} = A \cdot \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (7.34)$$

Wir wählen o.B.d.A. $\varphi_0 = 0$, so dass

$$r = \frac{1}{\frac{m\alpha}{L^2} + A \cos(\varphi)} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi)} \quad (7.35)$$

folgt. Dabei haben wir

$$\underbrace{p = \frac{L^2}{m\alpha}}_{\text{offensichtlich}} \quad \text{und} \quad \underbrace{e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}_{\text{zu prüfen durch explizite Berechnung von } E} \quad (7.36)$$

eingeführt. Wir bemerken dass (7.35) gerade die **Kegelschnitte** beschreibt.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die explizite Herleitung der oben angegebenen Formel für e : Zunächst sieht man durch Ableiten von $r = p/(1 + e \cos(\varphi))$ nach t sofort, dass $\dot{r} = 0$ bei $\varphi = 0$. An diesem Punkt gilt also

$$E = U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \text{und} \quad r = \frac{p}{1 + e} = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + e}. \quad (7.37)$$

Also erhält man

$$E = \frac{1 + e}{\frac{L^2}{m\alpha}} \cdot \left(\frac{L^2}{2m} \cdot \frac{1 + e}{\frac{L^2}{m\alpha}} - \alpha \right) = \frac{m\alpha(1 + e)}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot (1 + e - 2) \quad (7.38)$$

sowie

$$E = (e^2 - 1) \frac{m\alpha^2}{2L^2} \quad \text{und schließlich} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \quad \checkmark \quad (7.39)$$

7.7 Kegelschnitte (M)

Die Kegelschnitte, also Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel werden von der allgemeinen Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi)} \quad (7.40)$$

beschrieben.

Der **Kreisbahn** entspricht $e = 0$, so dass $r = \text{const.}$ Diese Bahn kommt zustande, $E = U_{\min}$ im äquivalenten 1-dimensionalen Problem (vgl. Abb. 50).

Die **Ellipse** tritt für $0 < e < 1$ auf. In der Tat, r bleibt bei dieser Parameterwahl für alle φ beschränkt, so dass Parabel und Hyperbel nicht in Frage kommen. Die genauere Analyse liefert

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\Rightarrow r = \frac{p}{1+e} \\ \varphi = \pi &\Rightarrow r = \frac{p}{1-e} \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} &\Rightarrow r = p, \end{aligned} \quad (7.41)$$

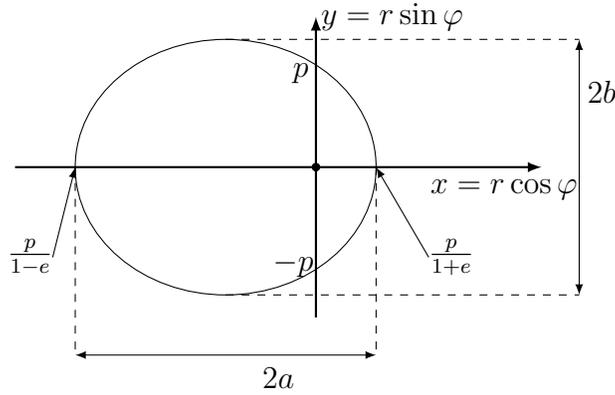


Abbildung 53: Ellipsenbahn.

was zu der Skizze in Abb. 53 Anlass gibt.

Man sieht, dass $p/(1+e)$ der Perihelabstand ist. Außerdem hat man

$$2a = p \left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) = \frac{2p}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p}{1-e^2}, \quad (7.42)$$

mit a als großer Halbachse. Die kleine Halbachse b erhalten wir als Maximalwert von y . Wir können dazu natürlich ebensogut y^2 maximieren. Wir fordern also

$$\frac{dy^2}{dr} = 0, \quad (7.43)$$

wobei

$$y^2 = (r \sin(\varphi))^2 = r^2(1 - \cos^2(\varphi)) = r^2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)^2 \right) = r^2 - \frac{1}{e^2} (p - r)^2. \quad (7.44)$$

Also folgt

$$0 = 2 \left(r + \frac{1}{e^2} (p - r) \right) \quad \text{und damit} \quad r_0 = \frac{-\frac{p}{e^2}}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (7.45)$$

Diesen Radius setzen wir nun in die obige Formel für y ein und finden

$$y_{max}^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{1}{e^2} p^2 \left(1 - \frac{1}{1 - e^2} \right)^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \left(1 - \frac{(-e^2)^2}{e^2} \right) \quad (7.46)$$

bzw.

$$y_{max} = \frac{p}{1 - e^2} \cdot \sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad \text{und somit} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (7.47)$$

Eine andere Definition der Ellipse ist

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1. \quad (7.48)$$

Um die Äquivalenz der beiden Definitionen zu zeigen, muss man von obigem Koordinatensystem x, y zu einem neuen System \tilde{x}, \tilde{y} übergehen, da der Koordinatenursprung der letztgenannten Darstellung im Zentrum der Ellipse liegt.

Die **Parabel** ergibt sich für $e = 1$, was physikalisch der Bedingung $E = 0$ entspricht. Der Körper kommt 'im Unendlichen' zur Ruhe, weil $\frac{m}{2}v^2 = E - U(r)$ und $U(\infty) = 0$. Um eine Skizze zu erstellen folgern wir aus $r = p/(1 + \cos \varphi)$:

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\Rightarrow r = \frac{p}{2} \\ \varphi = \pi &\Rightarrow r = \infty \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} &\Rightarrow r = p. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Die entsprechende Kurve ist eine nach links geöffnete Parabel, siehe Abb. 54. Es gilt $\tilde{y} \sim \tilde{x}^2$ in einem geeignet gewählten neuen Koordinatensystem \tilde{x}, \tilde{y} .

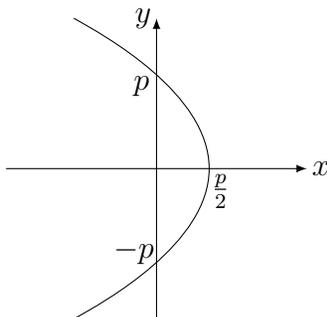


Abbildung 54: Parabelbahn.

Die **Hyperbel** ergibt sich für $e > 1$ und somit $E > 0$. Der Körper hat selbst asymptotisch für $r \rightarrow \infty$ noch eine von Null verschiedene Geschwindigkeit. Für die genauere Analyse notieren wir

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\Rightarrow r = \frac{p}{1+e} \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} &\Rightarrow r = p \\ r = \infty &\Rightarrow 0 = 1 + e \cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \arccos(-1/e). \end{aligned} \tag{7.50}$$

Wir definieren den **Streuwinkel** θ gemäß Abb. 55 und finden

$$\theta = \pi - 2(\pi - \varphi) = 2\varphi - \pi \quad \text{mit} \quad \cos(\varphi) = \frac{-1}{e}. \tag{7.51}$$

Eine andere Darstellung der Hyperbel ist

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \tag{7.52}$$

wobei wir $a = a(p, e)$ und $b = b(p, e)$ analog zur Ellipse leicht berechnen könnten.

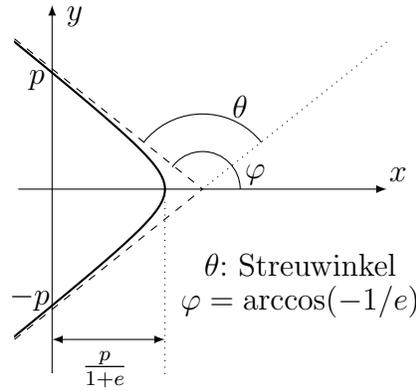


Abbildung 55: Hyperbelbahn.

7.8 Die Trajektorie

Wir kennen nun die Bahn $r = r(\varphi)$ beziehungsweise $\varphi = \varphi(r)$. Die Trajektorie, also $r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$, berechnen wir jetzt mittels des in (7.23) angegebenen Integrals:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L}{m^2 r^2}}} \quad \text{mit} \quad V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (7.53)$$

also

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} r^2 + \frac{2\alpha}{m} r - \frac{L^2}{m^2}}}. \quad (7.54)$$

Um den Vorfaktor $2E/m$ aus der Wurzel herauszuziehen, brauchen wir eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens:

7.8.1 Ellipse

Für $E < 0$ haben wir

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{L^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot \int \frac{r dr}{\sqrt{-\left(r - \frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}}}. \quad (7.55)$$

Wir finden mittels oben hergeleiteter Formeln die Beziehungen

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{\frac{-2EL^2}{m\alpha^2}} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (7.56)$$

sowie

$$a^2 e^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) = \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|} \quad (7.57)$$

und erhalten damit

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}}. \quad (7.58)$$

Wir ersetzen nun die Integrationsvariable r durch s , welches durch $r - a \equiv sae$ definiert ist. Damit gilt $dr = dsae$ und es folgt

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot ae \cdot \int \frac{ds \left(s + \frac{1}{e}\right)}{\sqrt{1 - s^2}}. \quad (7.59)$$

Wir substituieren weiter mittels $s \equiv -\cos(\eta)$ und $ds = \sin(\eta)d\eta$:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot ae \int d\eta \left(\frac{1}{e} - \cos(\eta)\right) = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot ae \cdot \left(\frac{\eta}{e} - \sin(\eta)\right) \quad (7.60)$$

Die Integrationskonstante entspricht hier einer irrelevanten Verschiebung in t . Damit haben wir die folgende **Parameter-Darstellung** (mit η als Parameter) des radialen Teils der Trajektorie im Ellipsen-Fall:

$$t = \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} \cdot (\eta - e \sin(\eta)) \quad \text{und} \quad r = a(1 - e \cos(\eta)). \quad (7.61)$$

Wir müssen uns also mit dieser Parameterdarstellung der Funktion $r = r(t)$ begnügen, da ein Auflösen der ersten Gleichung nach η nicht gelingt. Der Winkelteil $\varphi = \varphi(t)$ folgt sofort, da wir $\varphi = \varphi(r)$ explizit kennen.

7.8.2 Hyperbel

Eine analoge Rechnung (siehe S. 46 von [5]) liefert

$$t = \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} \cdot (e \sinh(\eta) - \eta) \quad \text{und} \quad r = a(e \cosh(\eta) - 1) \quad (7.62)$$

im Hyperbelfall.

7.9 Umlaufzeit

Im Fall der Ellipsenbahn können wir die Umlaufzeit definieren und berechnen:

$$T = \int_{1Umlauf} dt = \frac{2m}{L} \int_{1Umlauf} df = \frac{2m}{L} \cdot F_{\text{Ellipse}} = \frac{2m}{L} \cdot \pi \cdot ab, \quad (7.63)$$

wobei wir $df/dt = r^2 \dot{\varphi}/2$ und $L = mr^2 \dot{\varphi}$ benutzt haben. Die hier benutzte Formel für die Fläche einer Ellipse lässt sehr leicht herleiten: Wir starten mit

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.64)$$

und bemerken, dass dies in neuen, durch $x = ax'$, $y = by'$ definierten Koordinaten in

$$\text{Kreis: } (x')^2 + (y')^2 = 1 \quad (7.65)$$

übergeht. Also folgt

$$F_{\text{Ellipse}} = \int_{\text{Ellipse}} dx dy = ab \int_{\text{Einheitskreis}} dx' dy' = \pi \cdot a \cdot b. \quad \checkmark \quad (7.66)$$

Wir können die Umlaufzeit mit bekannten Formeln gemäß

$$T = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{p^2}{\sqrt{1-e^2}^3} = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{\left(\frac{L^2}{m\alpha}\right)^2}{\left(\frac{2|E|L^2}{m\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad (7.67)$$

umschreiben. Unter Ausnutzung von $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ folgt schließlich

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}. \quad (7.68)$$

Die damit gezeigte Proportionalität von T zu $a^{3/2}$ ist auch als **drittes Keplersches Gesetz** bekannt. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass das **erste Keplersche Gesetz** schlicht besagt, dass sich die Planeten auf Ellipsen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Wir beenden diese Kapitel mit einigen Bemerkungen: Eine Analoge Analyse des abstoßenden Potentials $V = +\alpha/r$ liefert *stets* Hyperbelbahnen:

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos(\varphi)}. \quad (7.69)$$

Diese Formel ist nur im Bereich mit $r > 0$ physikalisch relevant.

Der **Lenzsche Vektor** (auch Runge-Lenz oder Laplace-Runge-Lenz-Vektor)

$$\bar{v} \times \bar{L} - \frac{\alpha \bar{r}}{r} \quad (7.70)$$

ist eine zusätzliche Erhaltungsgröße. Er kann für eine noch elegantere Analyse des Keplerproblems benutzt werden.

Im System Erde-Mond gilt die Annahme $m_2 \gg m_1$ nicht sehr gut. Obige Analyse beschreibt als wirklich nur die Bewegung der Relativkoordinate. Tatsächlich rotieren beide Körper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Die dabei auftretende Zentrifugalkraft führt, in Kombination mit der örtlich variierenden Anziehungskraft des Mondes zu den **Gezeitenbergen** der Wasseroberfläche, vgl. Abb. 56.

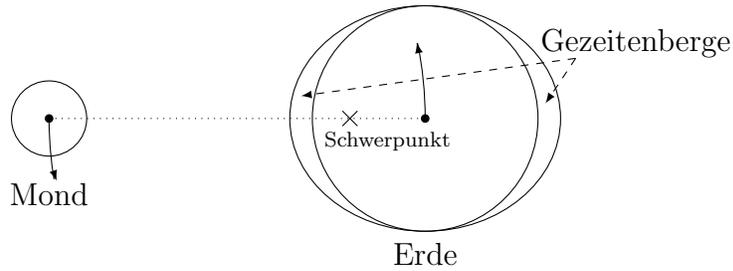


Abbildung 56: Gezeitenberge des Wassers im System Erde-Mond.

8 Zerfalls- und Stoßprozesse

Zerfalls und Stoßprozesse sind u.a. in Chemie, Kernphysik und Teilchenphysik wichtig. Dabei spielen meist quantenmechanische Aspekte, die wir im Moment noch ignorieren, eine entscheidende Rolle. Bei astrophysikalischen Stoßprozessen ist die klassische Beschreibung eine ausgezeichnete Näherung. Beispiele sind der Vorbeiflug einer Raumsonde an einem Planeten oder die kollisionsfreie ‘Begegnung’ zweier Himmelskörper. Die technischen Mittel zur Behandlung stehen uns seit dem letzten Kapitel zur Verfügung (vgl. Abb. 57 und die Diskussion der Hyperbelbahn im Zentralkraftproblem).

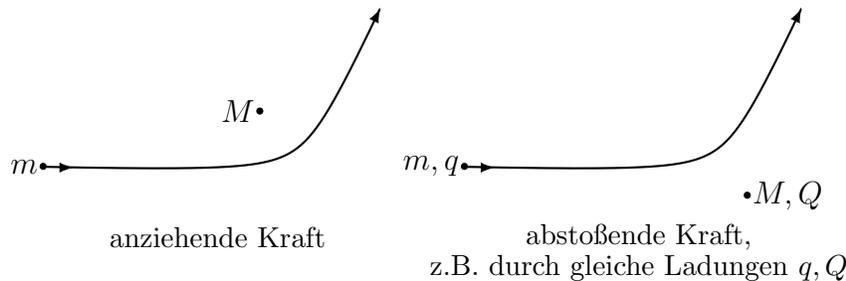


Abbildung 57: Stoßprozesse mit anziehender und abstoßender Kraft.

8.1 Stoßparameter und Streuwinkel

In vielen einfachen mechanischen Systemen folgt der Streuwinkel eindeutig aus dem **Stoßparameter (impact parameter)**. Man denke z.B. an die Streuung eines Massenpunktes an einer perfekt reflektierenden (unbeweglichen) Kugel, vgl. Abb. 58. Offensichtlich lässt sich hier die Funktion $\theta = \theta(b)$ bei gegebenem Kugelradius R durch elementare Geometrie ermitteln: Es gilt

$$\pi = 2\Delta\varphi + \theta \quad \text{sowie} \quad b = R \cdot \sin(\Delta\varphi). \quad (8.1)$$

Auflösen nach θ liefert

$$\theta(b) = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right) = 2 \arccos\left(\frac{b}{R}\right). \quad (8.2)$$

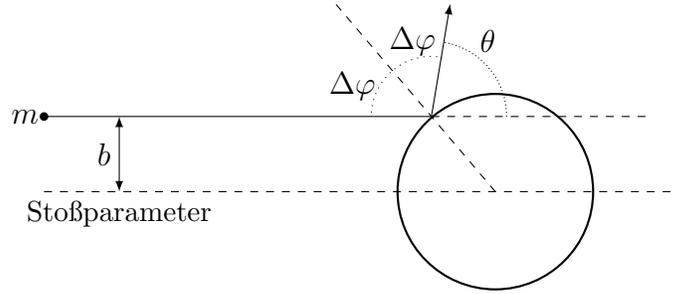


Abbildung 58: Streuung an perfekt reflektierender Kugel.

Allgemeiner betrachtet man die Streuung am Zentralpotential $V(r)$ mit abstoßender Kraft. Die obige starre Kugel entspricht dabei dem Grenzfall

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r \leq R. \end{cases} \quad (8.3)$$

Für ein allgemeines Potential (welches allerdings $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ erfüllen soll) bestimmt sich der Streuwinkel mit den Ideen des letzten Kapitels gemäß

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}} \quad \text{und} \quad L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (8.4)$$

woraus folgt

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}. \quad (8.5)$$

Hierbei haben wir $E = (m/2)v_\infty^2$ und $L = m \cdot v_\infty b$, und b ist der Stoßparameter ist.

Wir integrieren nun (vgl. Abb. 59) über den Bahnabschnitt von “ ∞ ” bis zum zentrumsnächsten Punkt, was der analog zu Abb. 58 definierten Winkeländerung $\Delta\varphi$ entspricht:

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b \cdot \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}. \quad (8.6)$$

Wir haben hier auch schon L durch E ausgedrückt. Der als untere Integrationsgrenze auftretende minimale Radius r_{min} ist die Lösung zu

$$1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2} = 0, \quad (8.7)$$

es ist also genau das r , für welches der Nenner in (8.6) verschwindet. Man versteht dies sofort, wenn man sich erinnert, dass r_{min} dem Umkehrpunkt im äquivalenten eindimensionalen Problem entspricht. An diesem Punkt gilt also $d\varphi \neq 0$ obwohl $dr = 0$. Wenn man sich nun die differentielle Version von (8.6) vorstellt, ist sofort klar, dass die Wurzel an diesem Punkt verschwinden muss:

$$d\varphi \sqrt{\dots} \sim dr \quad (8.8)$$

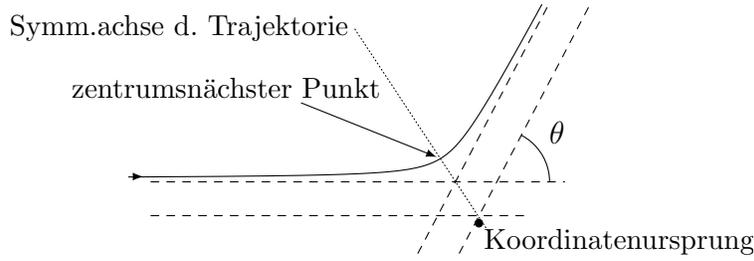


Abbildung 59: Streuung am Zentralpotential.

mit $d\varphi \neq 0$ und $dr = 0$ erzwingen dies.

Damit haben wir durch (8.6) und (8.7) die Größe $\Delta\varphi = \Delta\varphi(b)$ und also auch $\theta(b) = \pi - 2\Delta\varphi(b)$ bestimmt.

Für das konkrete Potential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (8.9)$$

brauchen wir das Integral nicht einmal mehr zu lösen. Wir erinnern uns dazu an die Diskussion der Hyperbelbahn im letzten Kapitel, wo wir

$$\theta = 2\varphi - \pi \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = -\frac{1}{e} \quad (8.10)$$

hergeleitet hatten.¹³ Damit haben wir

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} \quad (8.11)$$

mit $L = mv_\infty b$ und $E = \frac{m}{2}v_\infty^2$. Also folgt

$$\theta(b) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2}}\right). \quad (8.12)$$

8.2 Der Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten einen Versuchsaufbau gemäß Abb. 60, wobei wir das **Target** (Ziel) nur zur Vereinfachung fixieren – prinzipiell kann und muss natürlich der Rückstoß berücksichtigt werden. Der **Teilchenstrahl** sei homogen und zeitunabhängig, mit gleicher Geschwindigkeit \bar{v} für jedes Teilchen. Man kann charakterisiert ihn durch die Teilchenfluss(dichte) oder Teilchenstrahldichte

$$n = \frac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}, \quad [n] = m^{-2} \cdot s^{-1}. \quad (8.13)$$

Dabei ist ‘Fläche’ die senkrecht zum Strahl stehende Fläche des Strahls und die Teilchenzahl die Anzahl der durch diese Fläche hindurchtretenden Teilchen.

¹³ Unser $\Delta\varphi$ übersetzt sich in das dort benutzte φ gemäß $\Delta\varphi = \pi - \varphi$.

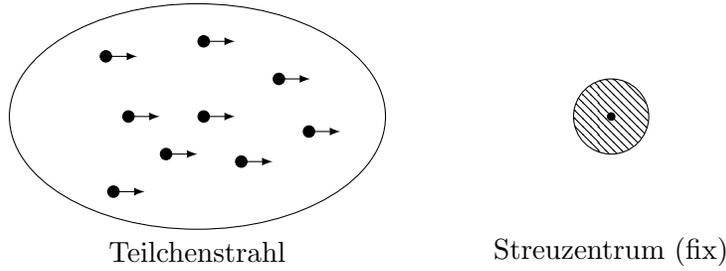


Abbildung 60: Wirkungsquerschnitt - Teilchenstrahl trifft ruhendes Target.

Multipliziert man n mit der Größe einer im Strahl stehenden Fläche, so bekommt man offensichtlich die Zahl der Teilchen, die pro Zeit diese Fläche treffen. Insbesondere findet man für ein Target mit Querschnittsfläche σ_{tot} die Zahl der pro Zeit gestreuten Teilchen als

$$N = n \cdot \sigma_{tot} , \quad [N] = s^{-1} . \quad (8.14)$$

Allgemeiner (ohne geometrische Anschauung, die in modernen Anwendungen oft keinen Sinn hat) gilt: Der **totale Wirkungsquerschnitt** σ_{tot} ist definiert als der Proportionalitätsfaktor zwischen Streurrate N und Strahldichte n :

$$N = n \cdot \sigma_{tot} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{tot} \equiv \frac{N}{n} . \quad (8.15)$$

Noch allgemeiner gilt: Der **differentielle Wirkungsquerschnitt** charakterisiert die Rate dN , mit der Teilchen in einem kleinen Winkelbereich $d\theta$ gestreut werden (vgl. Abb. 61):

$$dN = n \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) \right) \cdot d\theta . \quad (8.16)$$

Hier ist $(d\sigma/d\theta)$ nur ein intuitives Symbol für den differentiellen Wirkungsquerschnitt – wir müssen nicht an eine Funktion $\sigma(\theta)$ und deren Ableitung denken.¹⁴ Man stellt sich gewöhnlich auf den Standpunkt, dass obige Formel den Ausdruck $(d\sigma/d\theta)(\theta)$ definiert. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ('differential cross section') kann aus der Funktion $\theta = \theta(b)$ wie folgt berechnet werden.

Der Ring im Bild hat die Fläche $2\pi b \cdot |db| = d\sigma$. Der zugehörige Winkelbereich ist

$$|d\theta| = \left| \frac{d\theta(b)}{db} \right| \cdot |db| , \quad (8.17)$$

wobei wir überall Betragsstriche setzen, um die Minuszeichen zu umgehen, welche ständig auftreten, weil $(d\theta)/(db) < 0$.

Jetzt folgt dN aus der Formel für Streuraten, angewandt auf unseren differentiellen Ring:

$$dN = n \cdot d\sigma = n \cdot 2\pi b \cdot |db| = n \cdot 2\pi b \cdot \left| \frac{d\theta}{db} \right|^{-1} \cdot d\theta \equiv n \cdot \frac{d\sigma}{d\theta} \cdot d\theta \quad (8.18)$$

¹⁴ So eine Interpretation ist natürlich möglich: Z.B. ist im Fall der harten Kugel als Streuzentrum klar, dass zu $\theta = 0$ der Querschnitt πR^2 und zu $\theta = \pi$ der Querschnitt Null gehört. Will man dies durch eine Funktion $\sigma(\theta)$ beschreiben, so hat diese negative Ableitung und man muss oben $|d\sigma|$ statt $d\sigma$ schreiben.

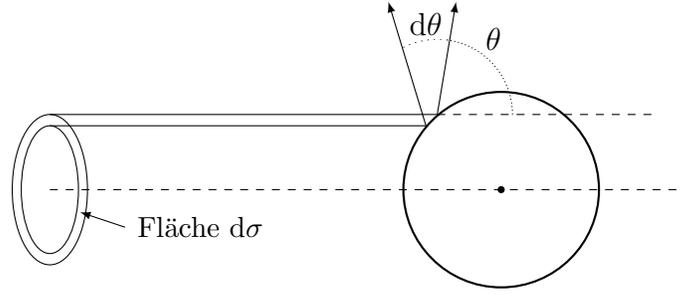


Abbildung 61: Zur Veranschaulichung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

und demnach

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b \left| \frac{d\theta}{db} \right|^{-1} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (8.19)$$

Wenn wir uns jetzt an (8.2) erinnern, also an

$$b(\theta) = R \cos(\theta/2), \quad (8.20)$$

so folgt speziell für die starre Kugel

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \pi b R \sin(\theta/2). \quad (8.21)$$

Schließlich geht man noch (und das ist die verbreitetste Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts) zum differentiellen Raumwinkel,

$$d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta, \quad (8.22)$$

über, vgl. Abb. 62. Man findet dann mit (8.20) und (8.21) das interessante Ergebnis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}. \quad (8.23)$$

Die Tatsache, dass es auf der rechten Seite keine θ -Abhängigkeit gibt, besagt, dass bei der Streuung an harten Kugeln gleichberechtigt in alle Richtungen gestreut wird. Integration über den Raumwinkel liefert

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi \frac{R^2}{4} = \pi R^2, \quad (8.24)$$

wie erwartet.

Dieses Ergebnis hängt natürlich nicht an der speziellen Form der Kugel und dem entsprechenden $\theta(b)$. Es folgt ganz allgemein, wenn $\theta(b)$ bei einem gewissen maximalen Radius R verschwindet, vgl. Abb. 63):

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\theta} \right) = \int_0^\pi d\theta 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \int_0^R db \cdot 2\pi b = \pi R^2. \quad (8.25)$$

In vielen realistischeren Fällen wird allerdings $\theta(b)$ nicht bei endlichem b verschwinden, so dass σ_{tot} nicht definiert ist, $\sigma_{tot} = \infty$.

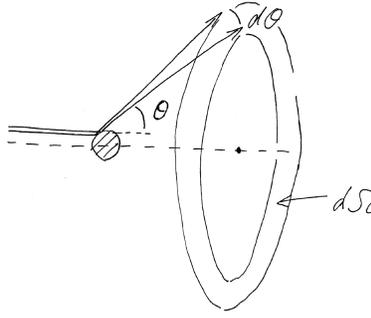


Abbildung 62: Zur Beziehung zwischen differentiellem Streuwinkel $d\theta$ und differentiellem Raumwinkel $d\Omega$ (siehe auch Abb. 64).

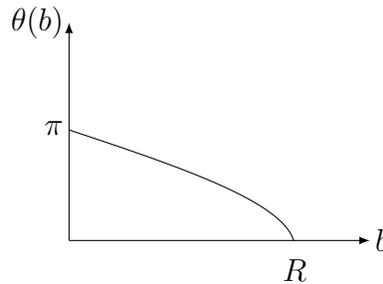


Abbildung 63: Skizze der Funktion $\theta(b)$.

8.3 Rutherford-Streuung

Ein berühmtes Beispiel ist die Streuung am Coulomb-Feld. Dies ist völlig analog zum Kepler-Problem, aber mit abstoßender *oder* anziehender Kraft:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (8.26)$$

Auch rechnerisch läuft alles wie bisher, nur dass unser früheres $\alpha = G_N m_1 m_2$ gemäß obiger Formel zu ersetzen ist. Analog zu (8.12) haben wir

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv^2 b}{\alpha}\right)^2}}. \quad (8.27)$$

Hierbei ist das Vorzeichen von α irrelevant. Weiterhin gilt

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi \cdot b \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| = 2\pi \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| x \frac{dx}{d\theta} \right|, \quad (8.28)$$

wobei wir $x \equiv \frac{mv^2 b}{\alpha}$ definiert haben. Dies ist bequem, weil wir mit x die einfachen Beziehungen

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \left| x \cdot \frac{dx}{d\theta} \right| = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \quad (8.29)$$

finden. Folglich gilt

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \pi \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}. \quad (8.30)$$

Die weiter oben schon praktizierte ‘natürliche’ Umschreibung in das Raumwinkelement ($d\theta \rightarrow d\Omega$, vgl. auch Abb. 64),

$$d\Omega = d\theta \cdot 2\pi \sin \theta = d\theta \cdot 4\pi \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, \quad (8.31)$$

liefert die **Rutherford-Formel**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (8.32)$$

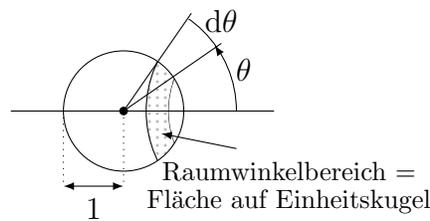


Abbildung 64: Raumwinkelement $d\Omega$.

Wichtige Eigenschaften dieses Wirkungsquerschnitts sind die äußerst starke Konzentration bei $\theta = 0$ (vgl. Abb. 65) und die Tatsache, dass $\sigma_{tot} = \infty$.

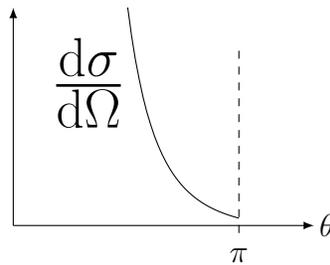


Abbildung 65: Rutherford-Formel - graphische Darstellung.

Berühmt ist die Formel durch das historische Experiment zur Streuung von α -Teilchen an einer Goldfolie (Abb. 66). Die beobachtete, mit obiger Formel übereinstimmende Winkelverteilung zeigt, dass Atome praktisch ‘leer’ sind: Die positive Ladung und die gesamte Masse ist im Atomkern konzentriert, der praktisch punktförmig ist. Die Elektronenhülle ist wegen der kleinen Masse unwichtig. Obwohl prinzipiell quantenmechanische Korrekturen und der Boost ins Schwerpunktsystem hinzukommen, beschreibt obige einfache Rechnung das Experiment gut.

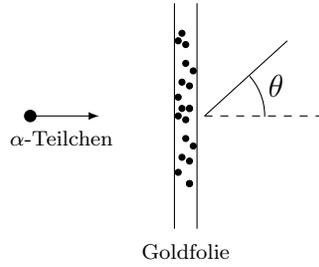


Abbildung 66: Rutherford-Streuung an Goldfolie.

8.4 Teilchenzerfall

Zum Teilchenzerfall gibt es viele wichtige Beispiele: den Zerfall instabiler Isotope, den Mesonen-Zerfall (z.B. $\rho \rightarrow \pi\pi$), das klassische (nicht-quantenmechanische) Beispiel von Explosionen und aktuell natürlich den Zerfall der am LHC produzierten Higgs-Teilchen: $H \rightarrow \gamma\gamma$, $H \rightarrow b\bar{b}$ etc.

Mit Masse M und innerer Energie U können wir symbolisch schreiben

$$M, U \rightarrow m_1, U_1 \text{ ' + ' } m_2, U_2. \quad (8.33)$$

Die Analyse stützt sich auf Massenerhaltung (Achtung: gilt nicht mehr in der Speziellen Relativitätstheorie),

$$M = m_1 + m_2, \quad (8.34)$$

Energieerhaltung,

$$U + \frac{M}{2}\bar{v}^2 = \left(U_1 + \frac{m_1}{2}\bar{v}_1^2\right) + \left(U_2 + \frac{m_2}{2}\bar{v}_2^2\right), \quad (8.35)$$

und Impulserhaltung,

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \quad (8.36)$$

wobei wie üblich $\bar{p} = M\bar{v}$ etc.

O.B.d.A. ruhe M vor dem Zerfall: $\bar{p} = 0$ bzw. $\bar{v} = 0$ (der Übergang in dieses **Schwerpunktssystem** kann stets durch einen Galilei-Boost erreicht werden). Also gilt:

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = 0 \quad \text{und} \quad U - U_1 - U_2 = |\Delta U| = \frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2}. \quad (8.37)$$

Eliminieren von \bar{p}_2 liefert

$$|\Delta U| = \frac{\bar{p}_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right), \quad (8.38)$$

was sich auch als

$$|\bar{p}_1| = |\bar{p}_2| = \sqrt{\frac{2|\Delta U|m_1m_2}{M}} \quad \text{mit} \quad \bar{p}_1 = -\bar{p}_2 \quad (8.39)$$

schreiben lässt. Es folgt außerdem

$$\frac{|\bar{v}_1|}{|\bar{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (8.40)$$

Diese Beschreibung durch Erhaltungssätze bleibt allerdings unvollständig: Die Flugrichtung der Produkte bleibt unbekannt (vgl. Abb. 67). Um Aussagen über den entsprechenden Winkel θ machen zu können, braucht man (1) **zusätzliche mikroskopische Information** oder zumindest (2) **eine Wahrscheinlichkeitsverteilung** für das zu erwartende θ . Eine sehr einfache mechanische Realisierung von (1) ist in Abb. 68 illustriert. In ‘echten’ physikalischen Beispielen spielen oft Spin oder Drehimpuls des zerfallenden Teilchens die Rolle der Richtung der Feder. Außerdem hat man es mit Quantenmechanik zu tun, so dass man selbst mit Kenntnis des Ausgangszustandes nur Wahrscheinlichsaussagen über das erwartete θ machen kann. Ein klassisches Analogon dazu wäre ein Ensemble zufällig ‘orientierter’ Ausgangsteilchen (wobei jede Richtung gleichwahrscheinlich sein oder es alternativ auch eine Vorzugsrichtung geben kann).



Abbildung 67: Flugrichtung der Produkte beim Teilchen-Zerfall.

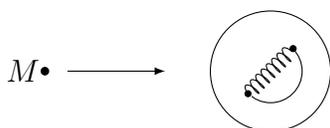


Abbildung 68: Mechanischer Zerfall: Feder wird mit einem (durchzuschneidenden) Gummiband festgehalten – die Richtung θ ist somit im Ausgangszustand kodiert.

8.5 Schwerpunkts- vs. Laborsystem

Es ist interessant, den Fall zu analysieren, in dem $\theta = \theta_S$ im **Schwerpunktssystem** (wie im letzten Abschnitt besprochen) bekannt ist, wir aber am Winkel θ_L im **Laborsystem** interessiert sind, vgl. Abb. 69. Außerdem seien die Massen und die freiwerdende Energie ΔU bekannt.

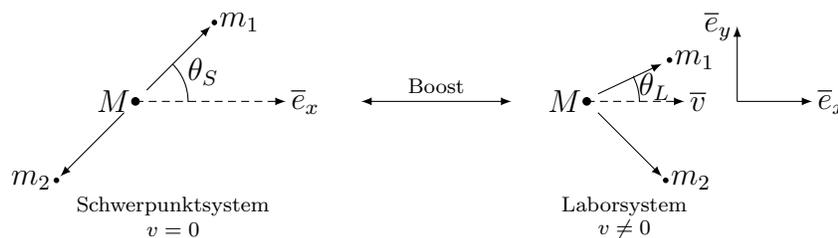


Abbildung 69: Laborsystem und Schwerpunktssystem.

Wie wir bereits wissen, gilt

$$|\bar{p}_{1,S}| = \sqrt{\frac{2|\Delta U|m_1m_2}{M}}, \quad \bar{p}_{1,S} = |\bar{p}_{1,S}| \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_S \\ \sin \theta_S \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_{1,S} = \frac{\bar{p}_{1,S}}{m_1}. \quad (8.41)$$

Damit folgt nach einem Boost um \bar{v} , der uns per Definition zum Laborsystem bringen soll:

$$\bar{v}_{1,L} = \bar{v}_{1,S} + \bar{v} = |\bar{v}_{1,S}| \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_S \\ \sin \theta_S \end{pmatrix} + |\bar{v}| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\bar{v}_{1,S}| \cos \theta_S + |\bar{v}| \\ |\bar{v}_{1,S}| \sin \theta_S \end{pmatrix}. \quad (8.42)$$

Damit ergibt sich für den Laborsystem-Winkel des ersten Zerfallsprodukts, θ_L :

$$\tan \theta_L = \frac{|\bar{v}_{1,S}| \sin \theta_S}{|\bar{v}_{1,S}| \cos \theta_S + |\bar{v}|}. \quad (8.43)$$

Wenn gewünscht, kann man jetzt $|\bar{v}_{1,S}|$ durch die ursprünglich gegebenen Größen ausdrücken und vereinfachen.

Wir bemerken zum Abschluß noch, dass beim Zerfall in mehr als 2 Teilchen (z.B. $M \rightarrow m_1, m_2, m_3$) die Erhaltungssätze i.A. nicht mehr genügen, um auch nur die Beträge der Geschwindigkeiten der Zerfallsprodukte zu bestimmen. Mann muss sich dann mit einer Geschwindigkeitsverteilung zufrieden geben. Ein wichtiges Beispiel für so einen Prozess ist der β -Zerfall:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (8.44)$$

8.6 Elastischer Stoß

Für einen allgemeinen Zweiteilchen-Stoßprozess (auch '2 → 2-Streuung') gilt

$$(m_1, U_1), (m_2, U_2) \rightarrow (m'_1, U'_1), (m'_2, U'_2), \quad (8.45)$$

wobei wir in der klassischen Mechanik zumindest noch Massenerhaltung, also $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$, haben (in der Relativitätstheorie nicht einmal mehr das).

Als weitere Einschränkung können wir fordern, dass kein Massenaustausch auftritt:

$$m_1 = m'_1 \quad \text{und} \quad m_2 = m'_2. \quad (8.46)$$

Zum **elastischen Stoß** kommen wir schließlich, wenn wir auch noch verlangen, dass sich die innere Energie nicht ändert, also

$$U = U' \quad (\text{wobei } U \equiv U_1 + U_2 \text{ und } U' \equiv U'_1 + U'_2). \quad (8.47)$$

Damit folgt

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}'_1 + \bar{p}'_2 \quad \text{und} \quad \frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\bar{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}'_2{}^2}{2m_2}. \quad (8.48)$$

Eine mögliche prinzipielle Vorgehensweise zur Bestimmung von $\bar{p}'_{1,2}$ bei gegebenem $\bar{p}_{1,2}$ ist die folgende:

Wir gehen zunächst ins Schwerpunktsystem S , so dass

$$\bar{p}_{1,S} + \bar{p}_{2,S} = \bar{p}_S = 0. \quad (8.49)$$

Im Moment des Stoßes können wir uns dann einen zwischenzeitlich entstandenen Zustand (ein **ruhendes** ‘instabiles Teilchen’) mit $\bar{p}_S = 0$ vorstellen. Dieses ‘zerfällt’ dann (vgl. 8.4) unter Freisetzung des Energieüberschusses

$$|\Delta\tilde{U}| \equiv \frac{\bar{p}_{1,S}^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_{2,S}^2}{2m_2}. \quad (8.50)$$

Wie in Abschnitt 8.4 folgt dann

$$\bar{p}'_{1,S} = -\bar{p}'_{2,S} \quad (8.51)$$

und (unter Ausnutzung von $|\bar{p}_{1,S}| = |\bar{p}_{2,S}|$)

$$|\bar{p}'_{1,S}| = |\bar{p}'_{2,S}| = \sqrt{\frac{2|\Delta\tilde{U}|m_1m_2}{M}} = \sqrt{\frac{2(m_2\bar{p}_{1,S}^2 + m_1\bar{p}_{2,S}^2)m_1m_2}{2m_1m_2(m_1 + m_2)}} = |\bar{p}_{1,S}| = |\bar{p}_{2,S}|. \quad (8.52)$$

Der Stoß, also der Übergang

$$\bar{p}_{1,S}, \bar{p}_{2,S} \rightarrow \bar{p}'_{1,S}, \bar{p}'_{2,S} \quad (8.53)$$

entspricht also in S nur einer Drehung (ohne Betragsänderung!), vgl. Abb. 70.

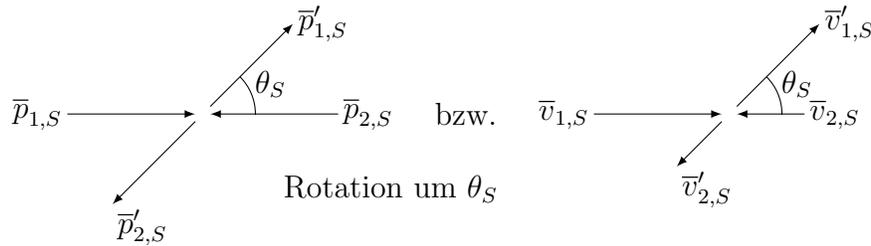


Abbildung 70: Elastischer Stoß im Schwerpunktsystem – Rotation um θ_s .

Der Wert von θ_s muss als zusätzliche Information vorgegeben werden. (Im Prinzip folgt dieser aus unserer vorherigen Diskussion der Streuung, wenn wir diese noch von der Streuung am Potential auf das Zweikörperproblem erweitern).

Die so gefundenen Impulse $\bar{p}'_{1,S}$ und $\bar{p}'_{2,S}$ können, falls gewünscht, wieder in das (im Allgemeinen von S verschiedene) Laborsystem L übersetzt werden. Wir erhalten dann schließlich $\bar{p}'_{1,L}$ und $\bar{p}'_{2,L}$.

8.7 Elastischer Stoß am ruhenden Target

Wir wollen nun speziell den Fall des im Laborsystem ruhenden Targets betrachten. Es soll im Labor also gelten:

$$\text{Projektil: } m_1, \bar{p}_1 \neq 0 \quad ; \quad \text{Target: } m_2, \bar{p}_2 = 0. \quad (8.54)$$

Unser Ziel soll nun sein, $|\vec{p}'_1|$ zu berechnen, wenn \vec{p}_1 und θ gegeben sind. In diesem Kapitel benutzen wir die Notation, dass ein Index S für Schwerpunktsystem steht; kein Index heißt Laborsystem (vgl. Abb. 71).

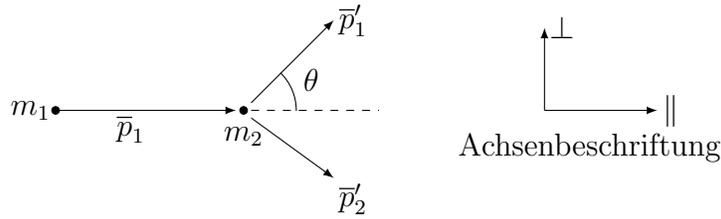


Abbildung 71: Elastischer Stoß am ruhenden Target

(a) Analyse durch Übergang zu S

Das Schwerpunktsystem ist durch $0 = \vec{p}_S$ definiert. Wir haben also

$$0 = \vec{p}_s = \vec{p}_{1,s} + \vec{p}_{2,s} = (\vec{p}_1 - m_1 \vec{v}) + (0 - m_2 \vec{v}) . \quad (8.55)$$

und demnach (mit $M \equiv m_1 + m_2$)

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}_1}{M} \quad \text{sowie} \quad \vec{p}_{1,s} = -\vec{p}_{2,s} = -(-m_2 \vec{v}) = \frac{m_2}{M} \cdot \vec{p}_1 . \quad (8.56)$$

Jetzt ergeben sich $\vec{p}'_{1,s}$ und $\vec{p}'_{2,s}$ durch Drehung um θ_s . Danach transformieren wir zurück nach L . Wir erhalten somit $|\vec{p}'_1|$ und θ als jeweils als Funktion von θ_s . Durch Eliminieren von θ_s finden wir $|\vec{p}'_1|$ als Funktion von θ . Wir führen das nicht aus sondern wenden uns stattdessen der alternativen und auch sehr interessanten direkt in L zu:

(b) Analyse direkt in L

Wir wollen in diesem Abschnitt die vereinfachende Notation $p_1 \equiv |\vec{p}_1|$ etc. benutzen. Damit schreibt sich die Energieerhaltung als

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad \text{bzw.} \quad p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2) . \quad (8.57)$$

Die Impulserhaltung lautet

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 . \quad (8.58)$$

Da ein Dreieck stets eine Ebene definiert, können wir alles in dieser Ebene betrachten und in parallelen und orthogonalen Anteil zerlegen (vgl. Abb. 71):

$$p_{1,\parallel} = p'_{1,\parallel} + p'_{2,\parallel} \quad , \quad p'_{1,\perp} = -p'_{2,\perp} . \quad (8.59)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} p_1 = p_{1,\parallel} &= p'_1 \cos \theta + \sqrt{(p_2')^2 - (p'_{2,\perp})^2} = p'_1 \cos \theta + \sqrt{(p_2')^2 - (p'_{1,\perp})^2} \\ &= p'_1 \cos \theta + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2) - (p'_1)^2 \sin^2 \theta} . \end{aligned} \quad (8.60)$$

Jetzt formen wir so um, dass die Wurzel rechts allein steht, quadrieren anschließend beide Seiten und lösen nach p'_1 auf:

$$p'_1 = p_1 \cdot \frac{m_1 \cos \theta \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta}}{M}. \quad (8.61)$$

Es gibt zu dieser analytischen Lösung eine schöne graphische Interpretation – vgl. Landau/Lifshitz [5] und viele andere Bücher.

Man beachte, dass es, falls beide Lösungen positiv sind, physikalisch wirklich zwei verschiedene mögliche p'_1 bei gleichem θ gibt. Um dies besser zu verstehen, analysieren wir den besonders einfachen Fall $\theta = 0$, $m_1 \geq m_2$:

Lösung (1) ist dann $p'_1 = p_1$ – also kein echter Stoß.

Lösung (2) ist $p'_1 = p_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ – dies bedeutet maximalen Energieübertrag (vollständig bei $m_1 = m_2$ – wie bei einem zentralen Stoß beim Billard).

In weniger trivialen Fällen ($\theta \neq 0$) ist die Situation analog: ein fest vorgegebenes θ kann durch einen ‘starken’ oder einen ‘schwachen’ Stoß realisiert werden. Falls hingegen eine der beiden Lösungen in (8.61) negativ ist, gibt es wirklich nur ein physikalisch mögliches p'_1 (das der positiven Lösung) zum gegebenen θ .

Interessant ist auch der spezielle Fall zweier exakt gleicher Massen $m_1 = m_2 = m$: Dann findet man $p'_1 = p_1(1 \pm 1) \cos(\theta)/2$. Die Lösung mit $p'_1 = 0$ entspricht dabei immer dem zentralen Stoß, wie beim Billiard, bei dem die stoßende Kugel liegenbleibt und ihr damit ein beliebiger Winkel θ zugeordnet werden kann. Um zwei verschiedene *positive* p'_1 zum gleichen θ zu erhalten, muss demnach $m_1 > m_2$ gelten.

9 Gravitation ausgedehnter Körper

Die Punktmassenannahme ist oft nicht gut gerechtfertigt (zum Beispiel schon für das System Erde-Mond oder, noch deutlicher, Erde-Satellit). Dies ist aber leicht korrigierbar, da Kräfte (und damit die zugrundeliegenden Potentiale) additiv sind.

Vorausschauend sei angemerkt, dass dies in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr stimmen wird, da die dort auftretenden Gleichungen für das **Gravitationsfeld** nicht mehr linear sind. Die hier behandelte Newtonsche Gravitation entspricht der **linearen Näherung** dieser Theorie, so dass nichtlineare Effekte per Definition nicht auftreten.

9.1 Potential einer Massenverteilung

Erinnern wir uns an das Potential (die potentielle Energie) der Gravitation zwischen zwei Punktmassen m_0 und m_1 :

$$V(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = -\frac{m_0 m_1 G_N}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}. \quad (9.1)$$

Daraus lesen wir die von Masse m_1 auf Masse m_0 ausgeübten Gravitationskraft ab:

$$\bar{F}_{01} = -\bar{\nabla}_0 V(\bar{r}_0 - \bar{r}_1) \equiv - \left(\frac{\partial}{\partial(r_0)^1}, \frac{\partial}{\partial(r_0)^2}, \frac{\partial}{\partial(r_0)^2} \right)^T V(\bar{r}_0 - \bar{r}_1). \quad (9.2)$$

Wir werden in diesem Kapitel eine der Massen als klein betrachten (m_0 sei eine ‘Testmasse’), so dass wir gewissermaßen an ihrer Bewegung im von den anderen Massen (im Moment nur m_1) erzeugten und unveränderlichen **Gravitationsfeld** interessiert sind. Die **Rückwirkung** von m_0 auf m_1 wird also vernachlässigt. Es ist dann naheliegend,

$$V(\bar{r}_0) = -\frac{m_0 m_1 G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_1|} \quad \text{und} \quad \bar{F} = -\bar{\nabla}_0 V(\bar{r}_0) \quad (9.3)$$

zu schreiben.

In diesem Zusammenhang ist es üblich, ein von der Testmasse m_0 unabhängiges **Gravitationspotential** ϕ zu definieren: $\phi \equiv V/m_0$. Dann gilt

$$\phi(\bar{r}_0) = -\frac{m_1 G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_1|} \quad \text{und} \quad \bar{F} = -m_0 \bar{\nabla}_0 \phi(\bar{r}_0). \quad (9.4)$$

Die Masse m_0 verschwindet völlig, wenn wir gleich nach der Beschleunigung des Testteilchens fragen:

$$\ddot{\bar{r}}_0 = -\bar{\nabla}_0 \phi(\bar{r}_0). \quad (9.5)$$

Dies war aber nur das Vorspiel. Eigentlich interessieren wir uns für das Potential (ab jetzt ‘Gravitationspotential’) einer Ansammlung von Punktmassen (vg. Abb. 72):

$$\phi(\bar{r}_0) = \sum_{a=1}^N \left(-\frac{m_a G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_a|} \right). \quad (9.6)$$

Der Übergang zum ausgedehnten Körper fällt besonders leicht, wenn wir uns diesen als Ansammlung vieler kleiner Elemente mit Massen

$$m_a = \rho(\bar{r}_a) \cdot \Delta V_a \quad (9.7)$$

denken. Dann gilt

$$\phi(\bar{r}_0) = \sum_{a=1}^N \left(-\frac{G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_a|} \right) \cdot \rho(\bar{r}_a) \cdot \Delta V_a. \quad (9.8)$$

Wenn wir jetzt den Grenzwert zu sehr vielen, sehr kleinen Volumenelementen vollziehen, wird aus obiger Summe das Volumenintegral

$$\phi(\bar{r}_0) = -G_N \int \frac{d^3 \bar{r} \rho(\bar{r})}{|\bar{r}_0 - \bar{r}|}. \quad (9.9)$$

Aus dem diskreten Satz von Vektoren \bar{r}_a ist die kontinuierliche vektorwertige Integrationsvariable \bar{r} geworden.

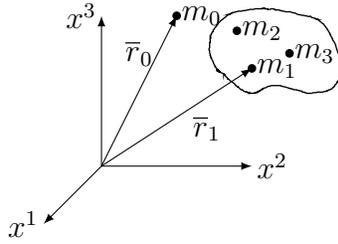


Abbildung 72: Gravitation ausgedehnter Körper: Eine Ansammlung von Massenpunkten (m_1, m_2, \dots) übt auf die Probemasse m_0 eine Kraft aus.

Um das hier benutzte, anschaulich einfache, aber eventuell technisch noch nicht gut vertraute Konzept des Volumenintegrals genauer zu erklären, beginnen wir beim Flächenintegral (vgl. Abb. 73):

$$\int_A d^2\bar{x} f(\bar{x}) \equiv \int_{x^1_{min}}^{x^1_{max}} dx^1 \int_{x^2_{min}(x^1)}^{x^2_{max}(x^1)} dx^2 f(x^1, x^2).$$

Die Grundidee besteht darin, unserer Fläche in infinitesimal dünne Streifen zu zerlegen, deren Beitrag sich jeweils über ein gewöhnliches eindimensionales Riemann-Integral brechnet. Im zweiten Schritt wird dann über die Gesamtheit dieser Streifen summiert bzw. integriert. Falls $f \equiv 1$, erhält man schlicht die Fläche, sonst das Flächenintegral der entsprechenden Funktion.

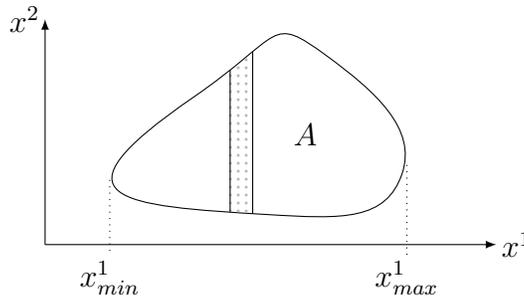


Abbildung 73: Flächenintegral.

Natürlich müssen die Streifen keineswegs gerade sein. In der Praxis ist es oft sehr hilfreich (zur Symmetrie des Problems) passende Koordinatensysteme zu benutzen. Beispiel berechnet man die Kreisfläche in Polarkoordinaten, so dass die obigen Streifen durch Kreisringe der Dicke dr ersetzt werden:

$$\int_{\text{Kreisfläche}} d^2\bar{x} f(\bar{x}) = \int_0^R dr \underbrace{\int r d\varphi f(r, \varphi)}_{\text{Kreis mit Radius } r} = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi). \quad (9.10)$$

Das Volumenintegral geht nun im Prinzip völlig analog (vgl. Abb. 74): Erst das Flächenintegral über (x^1, x^3) , danach die Integration über dx^2 über die im Flächenintegral benutzten

dünnen Scheiben:

$$\int_V d^3\bar{x} f(\bar{x}) \equiv \int_{x^2_{min}}^{x^2_{max}} dx^2 \int_A d^2\bar{y} f(x^1, x^2, x^3). \quad (9.11)$$

Hierbei ist $\bar{y} \equiv (x^1, x^3)^T$ der zweidimensionale Vektor, der die einzelnen Scheiben parametrisiert.

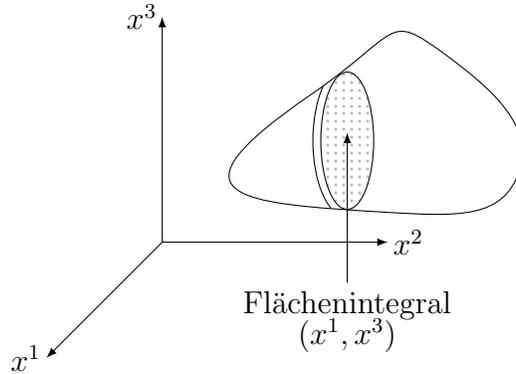


Abbildung 74: Volumenintegral.

Wie schon beim Flächenintegral kann man natürlich angepasste, i.A. gekrümmte 'Scheiben' benutzen. Für eine Kugel benutzt man z.B. dünne Kugelschalen:

$$\int_{\text{Kugel}} d^3\bar{x} f(\bar{x}) = \int_0^R dr r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{\text{Sphäre mit Radius } r} f(r, \theta, \varphi). \quad (9.12)$$

Wir werden im kommenden Semester beim Berechnen von Trägheitstensoren vielen weiteren Beispielen für Volumenintegrale begegnen.

9.2 Gravitationspotential einer Kugelschale

Die Kugelschale (vgl. Abb. 75) sei dünn, mit Flächendichte ρ_F (gemessen z.B. in kg/m²). Wir müssen in diesem Fall das Volumenintegral gemäß

$$\int d^3\bar{r} \rho(\bar{r}) \dots = \int d^2\bar{r} \rho_F(\bar{r}) \dots \quad (9.13)$$

ersetzen. Eine sorgfältigere Herleitung beginnt mit Kugelkoordinaten (r, θ, φ) und macht die Annahme, dass die Kugelschale den Bereich zwischen $r \in (R, R + \Delta R)$ ausfüllt. Das Volumenintegral ist dann

$$\int_R^{R+\Delta R} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\bar{r}) \dots \simeq R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho_F(\bar{r}) \dots, \quad (9.14)$$

wobei wir ΔR als sehr klein angenommen und $\rho_F \equiv \Delta R \rho$ definiert haben. Anhand des Bildes kann man sich gut vorstellen, dass φ den schraffierten Ring parametrisiert, die Achse entspricht der früheren z -Achse.

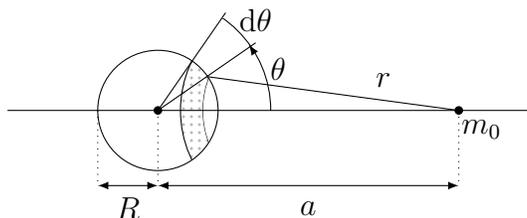


Abbildung 75: Gravitationspotential der Kugelschale - Skizze

Wir bemerken noch (obwohl wir das hier im Moment nicht brauchen), dass

$$\int_0^{2\pi} d\varphi d\theta \sin \theta = 2\pi \sin \theta d\theta = d\Omega \quad (9.15)$$

gerade das Raumwinkelelement von Kapitel 8.3 ist.

Wir könnten nun den Integranden von (9.13) bzw. (9.14) gemäß unserer Formel für das Gravitationspotential eines ausgedehnten Körpers ergänzen und losrechnen. Aber wir wollen vorher eine noch anschaulichere und physikalischere Herleitung des gleichen Integrals geben. Dazu schreiben wir einen infinitesimalen Beitrag zum Potential als, wie er von einem der schraffierten Ringe in Abb. 75 kommt, hin:

$$d\phi = -G_N \frac{dM}{r} = -G_N \frac{\rho_F dA}{r} = -\frac{G_N \rho_F}{r} \cdot \underbrace{(R d\theta)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{2\pi R \sin \theta}_{\text{Umfang}}. \quad (9.16)$$

Das Integral über φ ist hier bereits ausgeführt und für den Faktor 2π verantwortlich. Entscheidend ist, dass für jeden Punkt des Ringes der gleiche Abstand r zur Probemasse gilt:

$$r = \sqrt{(a - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2} = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}. \quad (9.17)$$

Die einzige Integration ist die über θ von 0 bis π , also

$$\phi = -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{A - B \cos(\theta)}} \quad \text{mit} \quad A = a^2 + R^2, \quad B = 2aR. \quad (9.18)$$

Mit der Substitution $\cos(\theta) = x$, $-\sin \theta d\theta = dx$ folgt $\theta = 0 \Rightarrow x = 1$ sowie $\theta = \pi \Rightarrow x = -1$. Demnach haben wir

$$\begin{aligned} \phi &= -G_N \rho_F 2\pi R^2 \int_1^{-1} \frac{-dx}{\sqrt{A - Bx}} \quad (9.19) \\ &= -G_N \rho_F 2\pi R^2 \left(-\frac{1}{-B} 2 \cdot \sqrt{A - Bx} \Big|_1^{-1} \right) \\ &= -G_N \rho_F 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{B} \left(\sqrt{A + Bx} - \sqrt{A - Bx} \right) \\ &= -G_N \rho_F 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{2aR} \left(\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR} - \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR} \right) \\ &= -G_N \rho_F 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{aR} \left((a + R) - (a - R) \right) \\ &= -G_N \rho_F 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{a} = -G_N \frac{A \rho_F}{a} = -\frac{G_N M}{a}. \quad (9.20) \end{aligned}$$

Wir sehen, das Potential ist genau so, als sei die Masse im Zentrum konzentriert. Eine analoge (eigentlich die gleiche!) Rechnung zeigt: **Im Inneren dieser Kugelschale** ist $\phi = \text{const.}$ (also von a unabhängig) und es gibt demnach **keine gravitative Kraft**. Technisch besteht der einzige Unterschied bei der Rechnung darin, dass nun $a < R$ und die zweite Wurzel $(R - a)$ ist.

Da wir auch die Summe bzw. das Integral über beliebig viele konzentrische Kugelschalen betrachten können, erhalten wir als einfache Konsequenz: Das Potential eines **sphärisch symmetrischen Körpers** im Außenraum ist so, als sei die **Masse im Zentrum konzentriert**. Homogenität ist dabei *nicht* erforderlich.

9.3 Gaußscher Satz und Gravitation

Die für uns interessante, zentrale physikalische Behauptung lautet: Sei O eine Oberfläche, welche eine Massenverteilung mit Gesamtmasse M einschließt (Abb. 76). Sei $\bar{F}(\bar{x})$ die von dieser Massenverteilung auf eine Testmasse m ausgeübte Kraft. Dann gilt:

$$M = -\frac{1}{4\pi G_N} \int_O \frac{1}{m} \bar{F} \cdot d\bar{f}. \quad (9.21)$$

Dies ist sehr interessant, weil es uns ermöglicht, nur aus Messungen außerhalb eines gewissen Gebiets, eine definitive Aussage über die Masse im Inneren zu machen. Es ist so etwas wie eine integrale Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Zur Herleitung benötigen wir eine wichtige und ganz allgemein nützliche mathematische Aussage, die etwas an den Satz von Stokes erinnert: den Satz von Gauß.

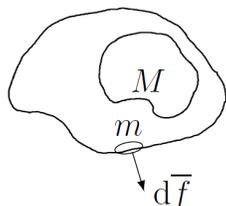


Abbildung 76: Satz von Gauß - Bestimmung von M .

9.4 Divergenz und Gaußscher Satz (M)

Wir betrachten ganz allgemein Integrale

$$I = \int_O d\bar{f} \cdot \bar{F} \quad (9.22)$$

über die Oberfläche O eines dreidimensionalen Volumens V . Wie bei unserer Herleitung von Stokes betrachten wir nunächst ein kleines, besonders einfaches Volumen – einen Quader wie in Abb. 77.

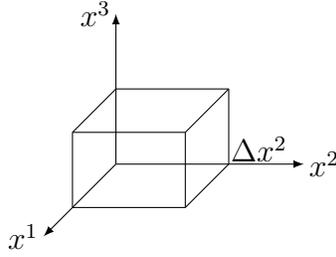


Abbildung 77: Volumen und Oberfläche eines Quaders.

Wir zerlegen unser Integral in die Summe der Integrale über drei Paare entgegengesetzter Flächen,

$$I = I_{12} + I_{23} + I_{31}, \quad (9.23)$$

wobei z.B. der Index '12' besagt, dass die relevanten Flächen diejenigen in der x^1 - x^2 -Ebene sind (und entsprechend für '23' und '31'). Damit haben wir

$$I_{12} = \int_{12, \text{oben}} dx^1 dx^2 F^3(x^1, x^2, \Delta x^3) + \int_{12, \text{unten}} dx^1 dx^2 \cdot (-F^3(x^1, x^2, 0)), \quad (9.24)$$

und entsprechende analoge Ausdrücke für I_{23} und I_{31} . Die Integrationsbereiche in den beiden Summanden in (9.24) sind gleich, so dass wir die beiden Integralzeichen zusammenfassen können. Der Integrand

$$F^3(x^1, x^2, \Delta x^3) - F^3(x^1, x^2, 0) \quad (9.25)$$

wird dann in eine Taylor-Reihe in Δx^3 entwickelt, was auf

$$I_{12} \approx \int_{12} dx^1 dx^2 \Delta x^3 \frac{\partial F^3}{\partial x^3}(x^1, x^2, 0) \approx \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 \cdot \frac{\partial F^3}{\partial x^3}(0, 0, 0) + O(\Delta^4) \quad (9.26)$$

führt. Wir haben hier Terme vierter Ordnung in den kleinen Größen Δx^1 , Δx^2 und Δx^3 nicht ausgeschrieben.

Zusammen mit der analogen Rechnung für I_{23} und I_{31} und mit $V \equiv \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$ folgt

$$I = V \cdot \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \right) = V \cdot (\partial_i F_i) \equiv V \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) \equiv V \cdot (\text{div } \bar{F}). \quad (9.27)$$

Die beiden letzten Ausdrücke definieren (ganz allgemein) die **Divergenz** eines Vektorfeldes:

$$\text{div } \bar{F} \equiv \bar{\nabla} \cdot \bar{F} \equiv \partial_i F_i. \quad (9.28)$$

Die Divergenz ist ein Skalar (eine reelle Funktion), der sich durch Ableiten der i -ten Komponente nach x^i und Summation ergibt. Die Schreibweise $\bar{\nabla} \cdot \bar{F}$ ist besonders prägnant, da die Divergenz tatsächlich das Skalarprodukt des Vektor-Operators $\bar{\nabla}$ mit \bar{F} bei gleichzeitiger Anwendung (durch Differenzieren) ist.

Nun können wir ein großes Volumen durch viele solcher kleinen Quadervolumina zusammensetzen (vgl. Abb. 78). Wir addieren alle entsprechenden Gleichungen vom Typ

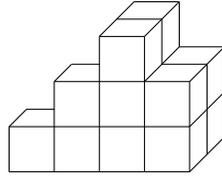


Abbildung 78: Zusammensetzung eines Volumens aus kleinen Quadervolumina.

$I = V \cdot (\nabla \cdot \vec{F})$. In der Summe aller Oberflächen-Integrale heben sich die Beiträge der ‘inneren’ (sich berührenden) Quaderflächen weg. Also bleibt rechts nur die Oberfläche des totalen Volumens stehen. Damit haben wir (im Wesentlichen) den **Satz von Gauß**

$$\int_O d\vec{f} \cdot \vec{F} = \int_V d^3\vec{r} (\nabla \cdot \vec{F}) \quad (9.29)$$

gezeigt.

Zur Erinnerung: Der **Satz von Stokes** lautet

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int_A d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{F}). \quad (9.30)$$

Wir erkennen hier eine gemeinsame Struktur: Bei Stokes integrieren wir links einen Vektor über den (1-dimensionalen) Rand einer 2d-Fläche. Rechts integrieren wir eine gewisse Kombination von Ableitung dieses Vektors über die Fläche selbst.

Analog integrieren wir bei Gauß links einen Vektor über den (2-dimensionalen) Rand, man sagt auch Oberfläche, eines 3d-Volumens. Rechts integrieren wir wieder eine gewisse Kombination von Ableitung dieses Vektors über das Volumen selbst.

Es gibt auch eine noch einfachere Variante, mit einer Dimension weniger als bei Stokes, die wir auch schon kennengelernt haben:

$$V(\vec{x}_b) - V(\vec{x}_a) = \int_C d\vec{l} \cdot (\nabla V), \quad (9.31)$$

wobei C eine Kurve von \vec{x}_a nach \vec{x}_b und V in diesem Fall kein Vektorfeld sondern eine Funktion ist. Wir kennen diesen Satz aus der Diskussion der Energieerhaltung in einem konservativen Kraftfeld, in diesem Fall $-\nabla V$.

Richtig spannend wird es allerdings erst, wenn man nach der Verallgemeinerung auf beliebige höhere Dimensionen fragt. Das dann relevante ‘**generalized Stokes’ theorem**’ sprengt aber leider unseren zeitlichen Rahmen in dieser Vorlesung.

Zum Abschluß wollen wir noch ein recht offensichtliches Loch in unserem ‘Beweis’ von Gauß zumindest provisorisch stopfen: Wir wollen (wie schon bei Stokes) die Oberfläche ‘glätten’.

Dazu genügt es, sich folgendes klar zu machen: Wir können von einem ‘eckigen’ Volumen wie in Abb. 78 tetraederförmige ‘Ecken’ (wie in Abb. 79) abschneiden bzw. solche Ecken hinzufügen können, ohne einen signifikanten Fehler zu machen. Um das zu sehen, betrachten

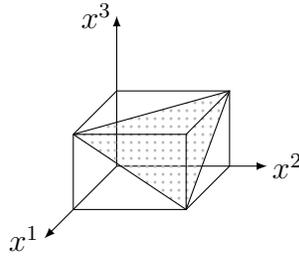


Abbildung 79: Zum Satz von Gauß: Glättung der Oberfläche.

wir zunächst die Volumenänderung durch diese Operation. Uns interessiert dabei, wie der Effekt bei festem Gesamtvolumen V mit Δ (das steht stellvertretend für Δx^i) skaliert. Da $V_{gesamt} \sim N\Delta^3$, gilt $N \sim 1/\Delta^3$. Für die Zahl der Oberflächenquader gilt also $N_O \sim 1/\Delta^2$. Die Volumenänderung ist demnach

$$\Delta V_{gesamt} \sim \Delta^3 \cdot N_O \sim \Delta^3 \cdot \frac{1}{\Delta^2} \rightarrow 0. \quad (9.32)$$

Nun betrachten wir die Änderung des Oberflächenintegrals. Dabei benutzen wir folgenden auch sonst nützlichen und interessanten Fakt: **Die Summe der Flächenvektoren eines Tetraeders¹⁵ ist Null.**

Um letzteres zu zeigen, betrachten wir das Tetraeder in Abb. 80 mit Kanten \bar{a} , \bar{b} und \bar{c} die alle von einem Vertex ausgehen und den Kanten $(\bar{b} - \bar{a})$, $(\bar{c} - \bar{a})$ und $(\bar{c} - \bar{b})$ an der gegenüberliegenden Fläche. Nun ist per Definition des Vektorproduktes die Fläche eines Dreiecks mit Kanten \bar{a} und \bar{b} gleich

$$A_{ab} = \frac{1}{2} \bar{a} \times \bar{b}, \quad (9.33)$$

wobei die Orientierung der Bewegung einer Rechtsschraube bei Drehung von \bar{a} nach \bar{b} entspricht. Unsere Behauptung, angewandt auf das Tetraeder in Abb. 80, lautet dann

$$-\frac{1}{2} \bar{a} \times \bar{b} - \frac{1}{2} \bar{b} \times \bar{c} - \frac{1}{2} \bar{c} \times \bar{a} + \frac{1}{2} (\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a}) = 0. \quad (9.34)$$

Man prüft leicht nach, dass dies korrekt ist.

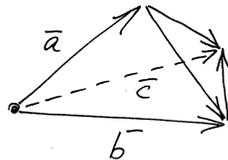


Abbildung 80: Tetraeder.

¹⁵ Das Tetraeder muss nicht regelmäßig sein. Die Aussage gilt für beliebige Dreieckspyramiden (Simplexe).

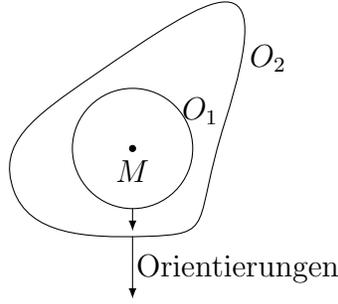


Abbildung 81: Sphäre O_1 und allgemeine Oberfläche O_2 .

Mit diesem Verständnis kehren wir jetzt zur ‘abgeschnittenen Ecke’ in Abb. 79 zurück. Wir haben gelernt, dass wir, was die Flächenvektoren betrifft, die drei kleinen, rechtwinkligen Dreiecke durch das größere, schraffierte Dreieck ersetzen können, ohne einen Fehler zu machen:

$$\bar{A}_{\text{schraffiert}} = \sum_{i=1}^3 \bar{A}_{\text{fehlendes Dreieck}, i} \quad (9.35)$$

Fehler ergeben sich dann nur, weil wir das Vektorfeld an verschiedenen Orten auswerten. Aber diese Orte sind nur um $\sim \Delta$ verschieden, der relative Fehler in der ganzen Summe wird somit mit Δ gegen Null gehen.

Wir haben also auch noch gezeigt, dass die Oberfläche wie in Abb. 79 geglättet werden kann und sind somit, nach dem Limes $\Delta \rightarrow 0$, mit Gauß für ganz allgemeine, glatte Oberflächen fertig.

9.5 Gauscher Satz und Gravitation (Fortsetzung)

Zur Erinnerung: Wir wollen die Formel

$$M = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f} \quad (9.36)$$

herleiten. Dazu betrachten wir nun zunächst den Spezialfall, dass M eine Punktmasse am Ursprung des Koordinatensystems und O_1 eine entsprechend zentrierte Sphäre mit dem Radius R sei (Abb. 81). Dann haben wir

$$I_1 \equiv \int_{O_1} \bar{F} \cdot d\bar{f} = \int_{O_1} \left(-\frac{G_N m M}{R^2} \bar{e}_r \right) \cdot (|d\bar{f}| \bar{e}_r) = -\frac{G_N m M}{R^2} \int_{O_1} |d\bar{f}| = -\frac{G_N m M}{R^2} \cdot 4\pi R^2, \quad (9.37)$$

und somit

$$M = -\frac{I_1}{4\pi m G_N}, \quad (9.38)$$

wie gefordert.

Wir betrachten nun außerdem eine allgemeine Oberfläche O_2 , die ebenfalls M umschließen soll und definieren analog

$$I_2 \equiv \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f}. \quad (9.39)$$

Wir berechnen die Differenz der beiden Integrale, also

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2} \bar{F} \cdot d\bar{f} - \int_{O_1} \bar{F} \cdot d\bar{f} = \int_{O_2} \bar{F} \cdot d\bar{f} + \int_{\tilde{O}_1} \bar{F} \cdot d\bar{f}, \quad (9.40)$$

wobei \tilde{O}_1 die relativ zu O_1 entgegengesetzt orientierte Fläche sein soll. Wir können nun die Kombination der beiden Flächen O_2 und \tilde{O}_1 als Oberfläche des ‘Zwischenraums’ zwischen O_1 und O_2 auffassen. Wir nennen diese Fläche $O_2 - O_1$ und das entsprechende Volumen $Vol_2 - Vol_1$. Dann gilt

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2 - O_1} \bar{F} \cdot d\bar{f} \quad (9.41)$$

und, nach Gauß,

$$I_2 - I_1 = \int_{Vol_2 - Vol_1} d^s \bar{r} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) = - \int_{Vol_2 - Vol_1} d^3 \bar{r} (\bar{\nabla}^2 \cdot V). \quad (9.42)$$

Unsere Eingangsbehauptung folgt also für allgemeine M umgebende Flächen, falls $\bar{\nabla}^2 V = 0$ im (massenfreien!) Zwischenraum. Letzteres wollen wir jetzt nachprüfen:

9.5.1 Wirkung des Laplace-Operators auf das Potential

Den Differentialoperator $\bar{\nabla}^2$ schreibt man auch als $\Delta \equiv \bar{\nabla}^2$ und bezeichnet ihn als Laplace-Operator. Er ergibt sich, wenn man (wie oben) von einer Funktion zunächst den Gradienten und dann von diesem Vektorfeld wiederum die Divergenz berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} f) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)^T = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) f = \Delta f \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2} \right) f. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Wir interessieren uns speziell für die Funktion

$$V(\bar{r}) = -\frac{G_N m M}{r} \quad \text{mit} \quad \bar{r} = (x^1, x^2, x^3) \quad \text{und} \quad r \equiv |\bar{r}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \quad (9.44)$$

bzw. das entsprechende ϕ . Die Vorfaktoren spielen für uns keine Rolle – wir können uns also sofort auf $\bar{\nabla}^2(1/r)$ konzentrieren. Zunächst haben wir

$$\left(\bar{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x^i}{\left(\sum_j (x^j)^2 \right)^{3/2}} = -\frac{x^i}{r^3} = -\left(\frac{\bar{r}}{r^3} \right)^i. \quad (9.45)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) &= \nabla \cdot \left(\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \left(-\frac{x^i}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^3} \right) \\ &= - \left\{ \frac{3}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^i \cdot 2x^i}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^5} \right\} = - \left\{ \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right\} = 0.\end{aligned}\tag{9.46}$$

9.5.2 Abschluss der Herleitung

Also gilt in der Tat $I_1 = I_2$ für beliebige Oberflächen O_1 und O_2 , die eine Punktmasse am Ursprung umgeben.

Wegen *Translationsinvarianz* überträgt sich dies sofort auf Flächen, die eine Punktmasse beliebiger Position umgeben. (Wir benutzen schlicht, dass sich $\int_O \bar{F} \cdot d\bar{f}$ offensichtlich nicht ändert, wenn Fläche *und* Massenpunkt um den gleichen Vektor verschoben werden.)

Damit haben wir die Gültigkeit von

$$M = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f}\tag{9.47}$$

für eine beliebige Fläche O gezeigt, welche eine Punktmasse M umgibt.

Dies gilt dann natürlich auch für eine durch i indizierte Menge von Punktmassen und deren jeweilige Kräfte:

$$M_i = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F}_i \cdot d\bar{f}.\tag{9.48}$$

Wegen der Additivität von Kräften überträgt sich das sofort auf eine aus Punktmassen zusammengesetzte Gesamtmasse,

$$M = \sum M_i = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \left(\sum_i \bar{F}_i \right) \cdot d\bar{f} = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f},\tag{9.49}$$

und schließlich im Kontinuumslimites auf beliebige Körper. Damit ist unsere eingangs gemachte Behauptung hergeleitet.

9.5.3 Eine einfache Anwendung

Für die Kraft einer kugelsymmetrischen Massenverteilung (wie in Abb. 82) gilt auf einer entsprechend symmetrischen Oberfläche O

$$|\bar{F}| = \text{const.} \quad \text{und} \quad \bar{F} \updownarrow d\bar{f},\tag{9.50}$$

also \bar{F} antiparallel zu $d\bar{f}$.

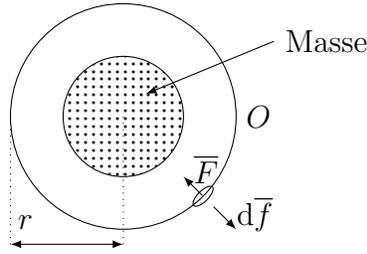


Abbildung 82: Kraft einer kugelsymmetrischen Massenverteilung.

Aus unserem ‘Theorem’ folgt nun

$$M = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_0 \bar{F} \cdot d\bar{f} = -\frac{1}{4\pi m G_N} |\bar{F}| \cdot 4\pi r^2, \quad (9.51)$$

und somit

$$|\bar{F}| = \frac{G_N m M}{r^2}. \quad (9.52)$$

Antiparallelität zu $d\bar{f}$ bedeutet Antiparallelität zu \bar{r} , also

$$\bar{F} = -\frac{\bar{r}}{r} \cdot \frac{G_N m M}{r^2}. \quad (9.53)$$

Die Kraft ist also exakt die einer entsprechenden Punktmasse im Zentrum, in Übereinstimmung mit unserer expliziten Berechnung des Potentials in Abschnitt 8.2.

9.6 Feldgleichung für das Gravitationspotential

Wir kennen nun die Aussage

$$\int_O \bar{F} \cdot d\bar{f} = -4\pi G_N m \cdot M \quad (9.54)$$

und können diese mit Gauß umschreiben als

$$\int_{Vol} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) d(Vol) = -4\pi G_N m \cdot \int_{Vol} \rho d(Vol). \quad (9.55)$$

Hier hat $d(Vol)$ die gleiche Bedeutung die $d^3\bar{x}$. Wir benutzen diese Schreibweise, um die Spezifizierung der Koordinaten x^i zu umgehen.

Die letzte Gleichung gilt für beliebige, speziell auf für sehr kleine Volumina. Wir können deshalb das Integralzeichen auch weglassen:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = -4\pi G_N \cdot m \cdot \rho. \quad (9.56)$$

In der Tat, wäre (9.56) an irgendeinem Punkt des Raumes verletzt, so müsste es wegen der angenommenen Glattheit aller Funktionen auch in einer kleinen Umgebung dieses Punktes

entsprechend verletzt sein. Wir könnten dann über dieses kleine Volumen integrieren und würden einen Widerspruch zu (9.55) erhalten.

Jetzt erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen Kraft und Potential und finden

$$\overline{\nabla}^2 V = 4\pi G_N \cdot m \cdot \rho. \quad (9.57)$$

Wechseln wir schließlich noch zu $\phi = V/m$, so ergibt sich die **Feldgleichung für das Gravitationspotential**

$$\overline{\nabla}^2 \phi = 4\pi G_N \rho. \quad (9.58)$$

Dies ist eine **Poisson-Gleichung**. Falls $\rho \equiv 0$ wird daraus die einfachere **Laplace-Gleichung**. Es sind dies sogenannte **partielle Differentialgleichungen**, was sagen soll, dass (partielle) Ableitungen nach mehreren Variablen vorkommen und die Lösung entsprechend eine Funktion von mehreren Variablen (in unserem Fall x^i) ist.

Man sagt ‘ ρ ist die Quelle für das Gravitationspotential ϕ ’. Wie schon besprochen, bewegt sich eine Testmasse in dem aus obiger Gleichung bestimmten Feld ϕ gemäß

$$\ddot{\vec{x}} = -\overline{\nabla}\phi. \quad (9.59)$$

Der Wert der Masse spielt dabei keine Rolle (‘alle Körper fallen gleich schnell’).

Wir bemerken zum Abschluß noch, dass $\overline{\nabla}^2 \phi = 4\pi G_N \rho$ konsistent mit der oben gemachten Aussage $\overline{\nabla}^2 V = 0$ (bzw. $\overline{\nabla}^2 \phi = 0$) in der Umgebung von Punktmassen ist. Dabei muss natürlich $r \neq 0$, so dass wir uns in einer gewissen Entfernung von der bei $\vec{r} = 0$ lokalisierten Punktmasse befinden. An der Stelle $\vec{r} = 0$ ist $\overline{\nabla}^2 \phi \sim \overline{\nabla}^2(1/r)$ nicht definiert. Mehr über den Umgang mit dieser Singularität und mit partiellen Differentialgleichungen im Allgemeinen lernen Sie in der Elektrodynamik. Wir begnügen uns hier damit, den Fall kontinuierlicher Massenverteilungen in dieser Sprache verstanden zu haben.

Viel Erfolg bei den Klausuren und schöne Ferien!

Literatur

- [1] Scheck, Theoretische Physik I – Mechanik
- [2] Jose/Saletan, Classical Dynamics
- [3] Nolting, Klassische Mechanik
- [4] Arnold, Mathematische Methoden der klassischen Mechanik
- [5] Landau/Lifshitz, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik.